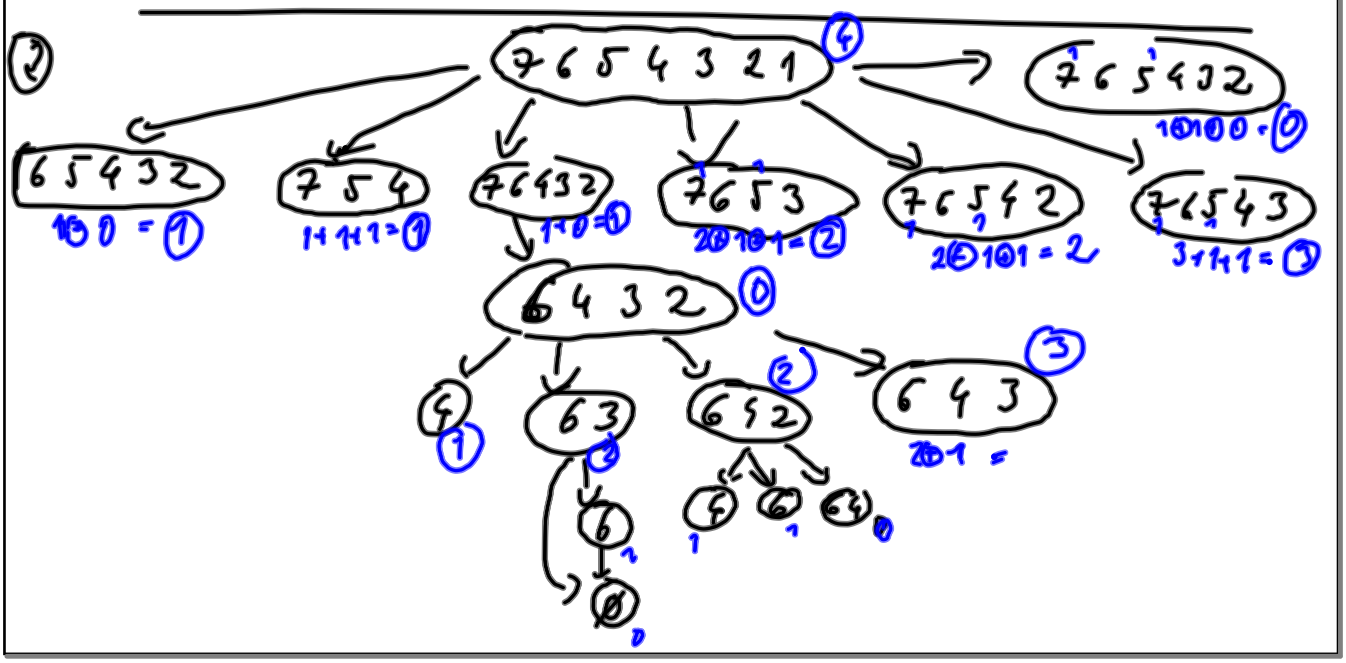
5 6 7

$SG(5) \oplus SG(6) \oplus SG(7)$

$1 \oplus 2 \oplus 3 = 0$



$y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y'' - 2y = 0 \qquad \text{(zhomogenizovaná rce)}$$

Uvažme char. polynom

$s^2 - 2$. Hledáme jeho kořeny

$s^2 - 2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

Obecné řešení homogenní rce:

$$y = k_1 \cdot e^{x\sqrt{2}} + k_2 \cdot e^{-x\sqrt{2}}, \; k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

12 13-10:13

Hledejme partikulární řešení původní nehomogenní rce:

$$y_p = ax^2 + bt + c$$

$$(y_p'' - 2y_p) = 2a - 2(ax^2 + bt + c) = x^2$$

$$x^2: \ -2a = 1 \Rightarrow a = -\tfrac{1}{2}$$
$$x: \ -2b = 0 \Rightarrow b = 0$$
$$x^0: \ 2a - 2c = 0 \Rightarrow a = c = -\tfrac{1}{2}$$

$$\underline{y_p = -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}}$$

Obecné řešení původní nehomogenní rce je

$$y = -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2} + k_1 e^{x\sqrt{2}} + k_2 e^{-x\sqrt{2}}, \quad k_1, k_2 \in R$$

12 13-10:23

Řešte

$$y^{(3)} - 2\cdot y'' + 2y' - 4y = \cos(x) \qquad y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$e^{ix} =$

$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{3!} + \dots$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Char. polynom:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0$$

	1	−2	2	−4
2	1	0	2	0

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 4 = (\lambda - 2)\cdot(\lambda^2 + 2) = (\lambda - 2)(\lambda + i\sqrt{2})(\lambda - i\sqrt{2})$$

Obecné řešení homogenní rce

$$y = k_1 e^{2x} + k_2 e^{i\sqrt{2}x} + k_3 e^{-i\sqrt{2}x}$$

$$= k_1 e^{2x} + c_2 \sin(\sqrt{2}x) + c_3 \cos(\sqrt{2}x)$$

12 13-10:29

Hledejme partikulární řešení nehomogenní rce:

volme $y = a\cdot\cos x + b\sin x$

$y' = -a\sin x + b\cos x$

$y'' = -a\cos x - b\sin x$

$y^{(3)} = a\sin x - b\cos x$

$a\sin x - b\cos x - 2(a\cos x - b\sin x) + 2(-a\sin x + b\cos x) + 4(a\cos x + b\sin x)$

$= \cos x$

$\sin x: \; a + 2b - 2a - 4b = 0 \Rightarrow a = -2b$

$\cos x: \; -b + 2a + 2b - 4\cancel{b} = b - 2a = 1 \Rightarrow 5b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{5}$

$a = -\frac{2}{5}$

$y_p = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$

Obecné řešení původní nehomogenní rce je

12 13-10:41

$$y = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x + c_1 e^{2x} + c_2 \sin(\sqrt{2}x) + c_3 \cos(\sqrt{2}x)$$

Vytvořující funkce

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \longmapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$f(x) \qquad g(x)$$

Jaká posloupnost odpovídá funkci $f(x)\cdot g(x)$?

$$f(x)\cdot g(x) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + b_1 a_0)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + \\ + \dots$$

$$\sim \{c_n\}_{n=0}^{\infty} \qquad c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n$$

Předchozí pozorování využijeme při řešení následující úlohy:

nechť a_n je počet vyhovujících řad n studentů,
navíc položme $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ a odvoďme rekurentní formuli pro a_n

uvažme, kde v řadě n studentů stojí nejvyšší z nich

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2 \cdot a_{n-3} + a_3 \cdot a_{n-4} + \dots + a_{n-4} \cdot a_3 + a_{n-3} \cdot 2 + a_{n-2} \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 1$$

$$= a_{n-1} \cdot a_0 + a_{n-2} \cdot a_1 + \dots + a_1 a_{n-2} + a_0 a_{n-1}$$

Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Potom $[f(x)]^2 = a_0^2 + (a_0 a_1 + a_1 a_0)x + (a_2 a_0 + a_1 a_1 + a_0 a_2)x^2 + \dots$

$n \geq 1$

$$\underbrace{a_n}_{\substack{\text{koeficient} \\ \text{u } x^n \text{ v řadě } f(x)}} = \underbrace{a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \dots + a_{n-2} a_1 + a_{n-1} a_0}_{\text{koeficient v řadě } [f(x)]^2 \text{ u } x^{n-1}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - 1 = [f(x)]^2 \cdot x$$

Vyřešíme kvadr. rci vzhledem k neznámé $f(x)$:

$$x \cdot [f(x)]^2 - f(x) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

12 13-11:18

Rozviňme nyní $f(x)$ do mocninné řady:

K tomu potřebujeme rozvinout do řady fci $\sqrt{1-4x}$:

$$h(x) = \sqrt{1-4x}$$

$$h'(x) = -2(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$h''(x) = -4(1-4x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$h^{(3)}(x) = -8\cdot 3(1-4x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$h^{(4)}(x) = -16\cdot 3\cdot 5(1-4x)^{-\frac{7}{2}}$$

$$\vdots$$

$$h^{(n)}(x) = -2^n\cdot \overbrace{3\cdot 5\cdot \ldots (2n-3)}^{(2n-3)!!}\cdot (1-4x)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

$$= -2^n\cdot \frac{(2n-2)!}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n-2}\cdot (1-4x)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

$$= -2\cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}(1-4x)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n =$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} +2 \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,n!} x^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$$

$$1 \pm \sqrt{1-4x} = 1 \pm 1 \mp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$$

Řešením může být vzhledem ke kladnosti a_n pouze řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n$$

a_n je koeficient u x^n v řadě $f(x)$, tedy $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

12 13-11:34