odpovídající bod $[0, 1-\pi, \pi^2]$

směrový vektor $(\cos(t), -1, 2t)$

$(-1, -1, 2\pi)$

$x = -s$

$y = 1 - \pi - s$

$z = \pi^2 + 2\pi s$

kolmé vektory k $(-1, -1, 2\pi)$:

$(1, -1, 0)$, $(0, 2\pi, 1)$

$x - y - \pi + 1 = 0$

$2\pi y + z + \pi^2 - 2\pi = 0$

$x_1 = 3 + t$ $\quad$ $x_2 = -1 - 2s$

$y_1 = 5 + 2t$ $\quad$ $y_2 = 3 - 4s$

$z_1 = 1 - 3t$ $\quad$ $z_2 = -4 + 6s$

$(3-(-1), 5-3, 1-(-4)) \neq k(1, 2, -3) \Rightarrow$ mimoběžné přímky

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,y) \mid x^2 + 2xy + 1 = 0 \}$

$(x+y)^2 - y^2 + 1 = 0$

$r = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2)$

$f_x(x,y) = \dfrac{x^2 + 2xy + 1 - (x+y)(2x+2y)}{(x^2+2xy+1)^2}$

$f_x(1,2) = \dfrac{6 - 3\cdot 6}{6^2} = -\dfrac{12}{36} = -\dfrac{1}{3}$

$f_y(x,y) = \dfrac{(x^2-2xy+1) - (x+y)\cdot 2x}{(x^2+2xy+1)^2}$

$f_y(1,2) = \dfrac{6-6}{36} = 0$

$r = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(x-1)$

$r = \frac{5}{6} - \frac{1}{3}x$

9 27-10:13

Tečna je dána průnikem tečných rovin ke grafům funkcí f a g v bodě $[2,1]$.

Normálové vektory těchto rovin jsou

$$(f_x, f_y, -1), \text{ resp. } (g_x, g_y, -1)$$

$$(2x, 2y, -1), \text{ resp. } \left(\ln|y|, \frac{x}{y}, -1\right)$$

V bodě $[2,1]$ pak

$$(4, 2, -1), \text{ resp. } (0, 2, -1)$$

Kolmý vektor k oběma je

$(0, 1, 2)$, což je tedy směrový vektor tečny.

Param. rce jsou tedy
$$x = 2$$
$$y = 1+t$$
$$z = 2t$$

$$f_x(x,y) = \frac{4xy-1}{(2x^2y - x)}$$

$$f_x(1,1) = \frac{3}{1} = 3$$

$$f_y(x,y) = \frac{2x^2}{(2x^2y-x)}$$

$$f_y(1,1) = 2$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{4y(2x^2y-x) - (4xy-1)(4xy-1)}{(2x^2y-x)^2}$$

$$f_{xx}(1,1) = \frac{4\cdot 1 - 3\cdot 3}{1^2} = -5$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{4x(2x^2y-x) - (5xy-1)2x^2}{(2x^2y-x)^2} = -$$

$$f_{xy}(1,1) = \frac{4-6}{1^2} = -2$$

$$f_{yx}(1,1) = -2$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{-2x^2(2x^2)}{(2x^2y-x)^2} = -\frac{4x^4}{(2x^2y-x)^2}$$

$$f_{yy}(1,1) = -4$$

$$T^2_{[1,1]}(\ln(2x^2y-x)) = 3\cdot(x-1) + 2(y-1) + \frac{1}{2}\left(-5(x-1)^2 - \cancel{2}4(x-1)(y-1) - 4(y-1)^2\right) =$$

$$= -\frac{5}{2}x^2 - 2xy - 2y^2 + 10x + 8y - \frac{23}{2}$$

$$T^2_{[x_0,y_0]} f = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(y-y_0) + \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(y-y_0)^2\right)$$

9 27-10:33

$$(x_1, \dots, x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A \sim f} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{w}) + f(\vec{v}, \vec{w})$$

---

1) určíme patu kolmice spuštěné z $[1,1,1]$ na rovinu $x + 2y + 2z = 2$: přímka kolmice má param. vyjádření

$x = 1 + t$ průnik s rovinou

$y = 1 + 2t$ $\quad 1 + t + 2(1+2t) + 2(1+2t) = 2$

$z = 1 + 2t$ $\quad 5 + 9t = 2 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$

pata kolmice: $\left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

2, parametrické vyjádření roviny:

$(1,2,2)$, $(0,1,-1)$, $(-2,1,0)$

jsou volné na

volím bod $[0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ dané roviny.

$$x = -2t$$
$$y = \frac{1}{2} + t + s$$
$$z = \frac{1}{2} - s$$

Vzdálenost $d(s,t)$ bodu uvažované roviny od bodu $[1,1,1]$ (resp. její čtverec) je

$$d(s,t) = (1+2t)^2 + (t+s-\tfrac{1}{2})^2 + (s+\tfrac{1}{2})^2 =$$
$$= 5t^2 + 2s^2 + 2ts + 3t + \tfrac{3}{2}$$

stac. body:

$d_s(s,t) = 4s + 2t$, $d_t(s,t) = 10t + 2s + 3$

$d_s(s,t)=0$: $2t+4s=0 \Rightarrow t=-2s$

$d_t(s,t)=0$: $10t+2s-3=0$

$-20s+2s+3=0 \Rightarrow s=\frac{1}{6} \Rightarrow t=-\frac{1}{3}$

$$Hd=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$d([x_0,y_0,z_0],\ ax+by+cz+d=0)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

to zadává posit. defin. formu $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ v daném stac. bodě nabývá minimum uvažované funkce.

V uvažované rovině to odpovídá bodu

$x=-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$

$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

$z=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

vzdálenost je

$\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1$

9 27-11:23

stac. body:

$$f_x(x,y) = 2xy - y - 1 \quad = 0$$

$$f_y(x,y) = x^2 - x \quad = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$$

i) $x = 0 \Rightarrow y = -1 \qquad X_1 = [0, -1]$

ii) $x = 1 \Rightarrow y = 1 \qquad X_2 = [1, 1]$

O povaze stac. bodů rozhodneme pomocí Hessiánu dané fce:

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$$

9 27-11:31

$$Hf(0,-1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

tato matice je indefinitní

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tato matice je rovněž indefinitní

Tedy v žádném ze stac. bodů nenastává extrém.
Jsou to tzv. sedlové body.

Stac. body:

$$f_x = 2x-2 = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$f_y = -z+2y+2 = 0 \Rightarrow -z-4z+2=0 \Rightarrow z = \frac{2}{5}$$
$$f_z = -y-2z = 0 \Rightarrow y = -2z \Rightarrow y = -\frac{4}{5}$$

stac. je jediný a to $\left[1, -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right]$

Hessián je

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

což je indefinitní sym. matice, v daném nenastává extrém.