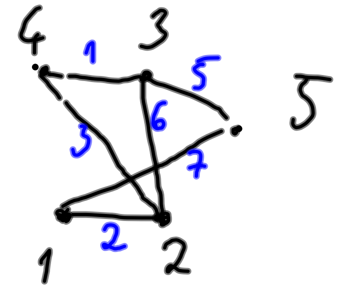
Matice nejkratších cest v grafu:



$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 7 \\ 2 & 0 & 6 & 3 & \infty \\ \infty & 6 & 0 & 1 & 5 \\ \infty & 3 & 1 & 0 & \infty \\ 7 & \infty & 5 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

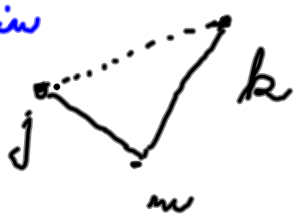
Sestrojíme posloupnost matic $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$, kde U_i zadává délky nejkratších cest o maximálně i hranách (tj. $u^{(i)}_{jk}$ je délka nejkratší cesty z vrcholu j do vrcholu k o nejvýše i hranách).

$$U_2 = U_1 \boxdot U_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 7 \\ 2 & 0 & 6 & 3 & \infty \\ \infty & 6 & 0 & 1 & 5 \\ \infty & 3 & 1 & 0 & \infty \\ 7 & \infty & 5 & \infty & 0 \end{pmatrix} \boxdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 7 \\ 2 & 0 & 6 & 3 & \infty \\ \infty & 6 & 0 & 1 & 5 \\ \infty & 3 & 1 & 0 & \infty \\ 7 & \infty & 5 & \infty & 0 \end{pmatrix} = \overset{U_2}{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 9 \\ 8 & 4 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 9 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\cdot \mapsto +$

$+ \mapsto \min$

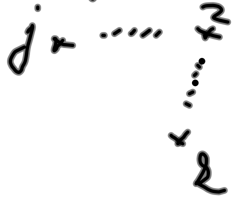


$$U_2 \boxdot U_1 = \overset{U_3}{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 9 \\ 6 & 4 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 9 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}} \qquad U_3 \boxdot U_1 = U_3$$

$$(= U_4)$$

Floydův algoritmus.

Spočítáme posloupnost matic $U_0, U_1, \dots, U_n$ (n-počet vrcholů), kde U_i udává délky nejkratších cest mezi danými dvěma vrcholy jdoucí (mimo vybraných dvou vrcholů) pouze přes vrcholy $\le i$.

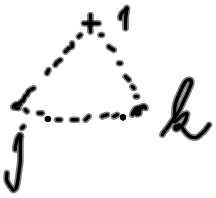


$$U_0 := \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ j\to \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} & k & & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & \infty & \infty & 7 \\ 2 & 0 & 6 & 3 & \infty \\ \infty & 6 & 0 & 1 & 5 \\ \infty & 3 & 1 & 0 & \infty \\ \boxed{7} & \infty & 5 & \infty & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$

$$U_1 := \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 7 \\ 2 & 0 & 6 & 3 & 9 \\ \infty & 6 & 0 & 1 & 5 \\ \infty & 3 & 1 & 0 & \infty \\ 7 & 9 & 5 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

$\min(\square + \square, \bigcirc)$

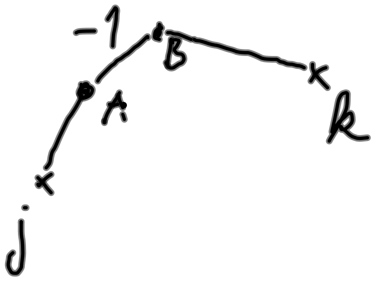
$\min(u_{j1} + u_{1k}, u_{jk})$



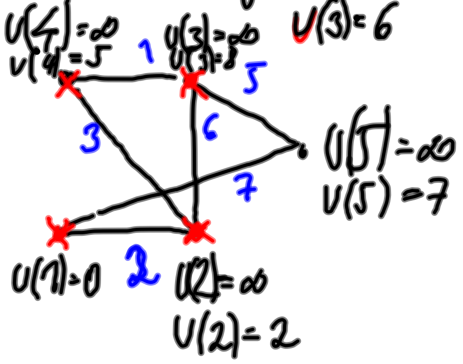
$$U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 6 & 3 & 9 \\ 8 & 6 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 12 \\ 7 & 9 & 5 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

U_3

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & \cancel{8}\ 6 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & \cancel{6}\ 4 & 3 & 9 \\ \cancel{8}\ 6 & \cancel{6}\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 9 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$



Dijkstrův algoritmus



$U(1) = 0$

$U(n) = \infty \qquad n \in \{2, \dots, n\}$

neorientovaném, konečném

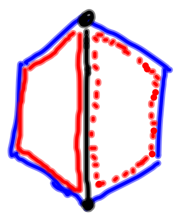
Dokažte, že v grafu, ve kterém má každý vrchol stupeň právě 3, existuje kružnice délky nedělitelné třemi.

Dk. Dokážeme tvrzení pro grafy s uzly stupně alespoň 3. Budeme dokazovat indukcí vzhledem k počtu vrcholů (k) daného grafu.

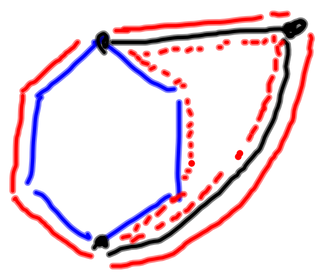
(i) $k=4$, K_4 ✓

(ii) Indukční krok: nechť tvrzení platí pro všechny grafy s nejvýše k vrcholy. Uvažme nyní graf s $(k+1)$ vrcholy takový, že každý jeho vrchol má stupeň alespoň 3.

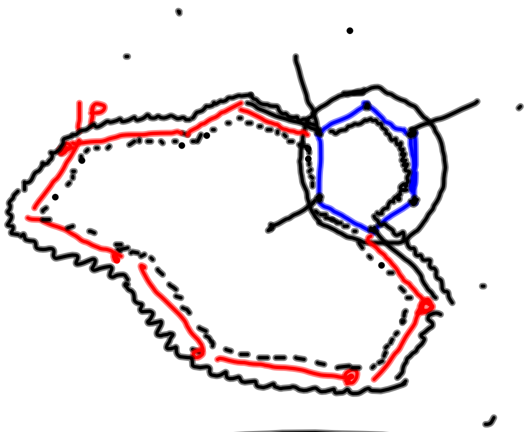
V takovém grafu existují kružnice. Kdyby délka této kružnice byla dělitelná třemi provedeme následující úvahu:



Součet délek červených kružnic je roven délce modré plus 2, tedy číslo nedělitelné třemi, tudíž by minimálně jedna z červených kružnic měla délku nedělitelnou 3.



Součet délek červených kružnic je v tomto případě délka modré plus 4, tudíž délka některé z nich by nebyla dělitelná třemi.



Součet délek černých kružnic je dvojnásobek délky červené kružnice plus délka modré kružnice

□