Řešené příklady k extrémům funkcí více proměnných

8.1. Určete všechny lokální extrémy funkce
$$f(x,y) = x^2 + \operatorname{arctg}^2 x + \left| y^3 + y \right|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Funkci f si vyjádříme jako součet $f_1 + f_2$, kde
$$f_1(x) = x^2 + \operatorname{arctg}^2 x, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad f_2(y) = \left| y^3 + y \right|, \quad y \in \mathbb{R}.$$
Máli-li mít funkce f v nějakém bodě lokální extrém, pak jej musí mít také vzhledem k libovolné podmnožině svého definičního oboru. Jinak řečeno, pokud má např. v bodě $[a,b]$ maximum a my položíme $y = b$, potom funkce $f(x,b)$ jedné proměnné x musí mít maximum v bodě $x = a$. Zvolme libovolně $y \in \mathbb{R}$. Pro toto pevné y dostáváme funkci jedné proměnné, která je posunutím funkce f_1, což znamená, že má maxima a minima ve stejných bodech. Nalézt extrémy f_1 je ovšem snadné. Stačí si uvědomit, že tato funkce je sudá (je součtem dvou sudých funkcí, přičemž funkce $y = \operatorname{arctg}^2 x$ je součinem dvou lichých funkcí) a rostoucí pro $x \geq 0$ (kompozice i součet rostoucích funkcí je rostoucí funkce). Má proto jediný extrém, a to minimum v bodě $x = 0$. Podobně platí, že pro pevně zvolené x je f posunutím f_2 a že také funkce f_2 má minimum v bodě $y = 0$ jako svůj jediný extrém. Dokázáli jsme tak, že f může mít lokální extrém pouze v počátku. Protože zjevně
$$f(0,0) = 0, \qquad f(x,y) > 0, \quad [x,y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\},$$
funkce f má v bodě $[0,0]$ ostré lokální (dokonce globální) minimum. $\square$

8.2. Vyšetřete lokální extrémy funkce
$$f(x,y) = \left(x + y^2\right) \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Daná funkce má parciální derivace všech řádů na celém svém definičním oboru. Lokální extrém může proto nastat pouze ve stacionárních bodech, ve kterých jsou obě parciální derivace f_x, f_y nulové. O tom, zda v těchto bodech extrém skutečně je, lze pak rozhodnout pomocí druhých derivací.

Snadno určíme
$$f_x(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \tfrac{1}{2}\left(x + y^2\right) \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}, \quad f_y(x,y) = 2y\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$
Stacionární bod $[x,y]$ musí splňovat
$$f_y(x,y) = 0, \quad \text{tj.} \quad y = 0,$$
a dále
$$f_x(x,y) = f_x(x,0) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \left(1 + \tfrac{1}{2}x\right) = 0, \quad \text{tj.} \quad x = -2.$$
Vidíme, že existuje jediný stacionární bod $[-2,0]$.

Nyní spočítáme Hessovu matici Hf druhých derivací v tomto bodě. Bude-li tato matice (příslušná kvadratická forma) pozitivně definitní, jedná se o ostré lokální minimum; a při negativní definitnosti jde o ostré lokální maximum. Pokud bude indefinitní, nepůjde o extrém. Platí
$$f_{xx}(x,y) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \left(2 + \tfrac{1}{2}\left(x + y^2\right)\right), \quad f_{yy}(x,y) = 2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}},$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = y\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

a tedy

$$Hf\,(-2,0) = \begin{pmatrix} f_{xx}\,(-2,0) & f_{xy}\,(-2,0) \\ f_{yx}\,(-2,0) & f_{yy}\,(-2,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}.$$

Připomeňme, že vlastními čísly diagonální matice jsou právě hodnoty na diagonále a že pozitivní definitnost matice znamená, že všechna její vlastní čísla jsou kladná. Odtud již plyne, že v bodě $[-2, 0]$ je ostré lokální minimum. □

8.3. Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 3xz - 2y + 2z, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Funkce f je polynomem (mnohočlenem), a tudíž o ní víme, že má parciální derivace všech řádů. Hledejme proto stacionární body (jinde extrém být nemůže) tak, že zderivujeme f postupně podle x, y, z a tyto derivace položíme rovny nule. Takto dostaneme

$$3x^2 - 3z = 0, \quad \text{tj.} \quad z = x^2,$$
$$2y - 2 = 0, \quad \text{tj.} \quad y = 1,$$

a (s využitím první rovnice)

$$z - 3x + 2 = 0, \quad \text{tj.} \quad x \in \{1, 2\}.$$

Existují tedy dva stacionární body $[1, 1, 1]$, $[2, 1, 4]$. Vypočtěme nyní všechny parciální derivace druhého řádu

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0, \quad f_{xz} = f_{zx} = -3,$$
$$f_{yy} = 2, \quad f_{yz} = f_{zy} = 0, \quad f_{zz} = 1.$$

S jejich pomocí ve stacionárních bodech snadno určíme Hessovu matici

$$Hf\,(1,1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Hf\,(2,1,4) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potřebujeme zjistit, zda jsou tyto matice pozitivně definitní, negativně definitní, příp. indefinitní, abychom mohli rozhodnout, jestli a jaké jsou v nich extrémy. V případě první z matic (pro bod $[1, 1, 1]$) ihned vidíme vlastní číslo $\lambda = 2$. Neboť je její determinant roven -6 a jedná se o symetrickou matici (všechna vlastní čísla jsou reálná), matice musí mít také záporné vlastní číslo (determinant je součinem vlastních čísel). Matice $Hf\,(1, 1, 1)$ je tedy indefinitní – v bodě $[1, 1, 1]$ extrém není.

Pro matici $Hf\,(2, 1, 4)$ použijeme tzv. Sylvestrovo kritérium. Podle tohoto kritéria je reálná symetrická matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

pozitivně definitní, právě když všechny hlavní minory A, tj. determinanty

$$d_1 = \left|a_{11}\right|, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots \quad d_n = |\,A\,|,$$

jsou kladné, a je negativně definitní tehdy a jenom tehdy, když je

$$d_1 < 0, \quad d_2 > 0, \quad d_3 < 0, \quad \dots, \quad (-1)^n d_n > 0.$$

Neboť

$$\left|12\right| = 12 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 > 0,$$

matice $Hf\,(2,1,4)$ je pozitivně definitní – v bodě $[2,1,4]$ je ostré lokální minimum. □

8.4. Stanovte lokální extrémy funkce

$$z = \left(x^2 - 1\right)\left(1 - x^4 - y^2\right), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Opět spočítáme parciální derivace z_x a z_y a položíme je rovny nule. Takto obdržíme rovnice

$$-6x^5 + 4x^3 + 2x - 2xy^2 = 0, \quad \left(x^2 - 1\right)(-2y) = 0$$

s řešeními $[x,y] = [0,0]$, $[x,y] = [1,0]$, $[x,y] = [-1,0]$. Doplňme, že k nalezení řešení stačilo určit reálné kořeny $1, -1$ polynomu $-6x^4 + 4x^2 + 2$ pomocí substituce $u = x^2$. Nyní vypočítáme druhé parciální derivace

$$z_{xx} = -30x^4 + 12x^2 + 2 - 2y^2, \quad z_{xy} = z_{yx} = -4xy, \quad z_{yy} = -2\left(x^2 - 1\right)$$

a ve stacionárních bodech vyčíslíme Hessovu matici se ziskem

$$Hz\,(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Hz\,(1,0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Hz\,(-1,0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že první z matic je pozitivně definitivní, a tudíž je v počátku ostré lokální minimum.

Zbývající dvě matice jsou ale negativně semidefinitní. Nelze tedy na základě druhých parciálních derivací s určitostí říci, zda je v bodech $[1,0]$, $[-1,0]$ extrém. Zkoumejme proto funkční hodnoty v okolích těchto bodů. Platí

$$z(1,0) = z(-1,0) = 0, \qquad z(x,0) < 0 \quad \text{pro } x \in (-1,1).$$

Uvažujme dále y v závislosti na $x \in (-1,1)$ dané předpisem $y = \sqrt{2\left(1 - x^4\right)}$ splňujícím, že $y \to 0$ pro $x \to \pm 1$. Pro tuto volbu je však

$$z\left(x, \sqrt{2\left(1 - x^4\right)}\right) = \left(x^2 - 1\right)\left(x^4 - 1\right) > 0, \quad x \in (-1,1).$$

Ukázali jsme, že v libovolně malých okolích bodů $[1,0]$, $[-1,0]$ nabývá z hodnot větších i menších, než je funkční hodnota v těchto bodech. Nejedná se tak o extrémy. □

8.5. Rozhodněte, zda má polynom

$$p(x,y) = x^6 + y^8 + y^4x^4 - x^6y^5$$

ve stacionárním bodě $[0,0]$ lokální extrém.

Řešení. Snadno lze ověřit, že parciální derivace p_x a p_y jsou v počátku skutečně nulové. Také všechny parciální derivace p_{xx}, p_{xy}, p_{yy} jsou ale v bodě $[0,0]$ rovny nule. Hessova matice $Hp\,(0,0)$ je tudíž současně pozitivně i negativně semidefinitní. Jednoduchá úvaha však ihned dává výsledek. Všimněme si např., že je $p(0,0) = 0$ a současně

$$p(x,y) = x^6\left(1 - y^5\right) + y^8 + y^4x^4 > 0$$

pro $[x,y] \in \mathbb{R}\times(-1,1)\setminus\{[0,0]\}$. Zadaný polynom má proto v počátku lokální minimum. $\square$

8.6. Stanovte globální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$$

na množině bodů $[x,y]$ vyhovujících nerovnostem

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad y \leq -x + 3. \tag{0.1}$$

Řešení. Máme zadán polynom se spojitými parciálními derivacemi na kompaktní (tj. uzavřené a ohraničené) množině. Taková funkce nutně nabývá své nejmenší a největší hodnoty na této množině, a to ve stacionárních bodech nebo na hranici. Stačí tedy najít stacionární body uvnitř množiny a stacionární body na konečném počtu otevřených (příp. jednobodových) částí hranice, vyčíslit v těchto bodech f a vybrat největší a nejmenší hodnotu. Dodejme, že množina bodů určená nerovnostmi (0.1) je zřejmě trojúhelníkem s vrcholy $[0,0]$, $[3,0]$, $[0,3]$.

Určeme stacionární body uvnitř tohoto trojúhelníku jako řešení rovnic $f_x = 0$, $f_y = 0$. Neboť

$$f_x(x,y) = 2x + 4y - 6, \quad f_y(x,y) = 4x - 4y,$$

těmto rovnicím vyhovuje pouze bod $[1,1]$. Hranici můžeme (nabízejícím se způsobem) vyjádřit jako sjednocení tří úseček výběrem dvojic vrcholů. Nejprve uvažujme $x = 0$, $y \in [0,3]$, kdy je $f(x,y) = -2y^2 - 1$. Graf této funkce (jedné proměnné) na intervalu $[0,3]$ ovšem známe. Není tudíž obtížné stanovit body, ve kterých nastávají globální extrémy. Jde o krajní body $[0,0]$, $[0,3]$. Podobně můžeme uvažovat $y = 0$, $x \in [0,3]$, přičemž také obdržíme jenom krajní body $[0,0]$, $[3,0]$. Zbývá úsečka $y = -x + 3$, $x \in [0,3]$, pro niž po úpravě dostáváme

$$f(x,y) = f(x, -x+3) = -5x^2 + 18x - 19, \quad x \in [0,3].$$

Potřebuje tedy najít stacionární body polynomu $p(x) = -5x^2 + 18x - 19$ z intervalu $[0,3]$. Rovnici $p'(x) = 0$, tj. $-10x + 18 = 0$, pak vyhovuje $x = 9/5$. To znamená, že v posledním případě jsme (kromě již zahrnutých krajních bodů) získali ještě jeden bod $[9/5, 6/5]$, ve kterém může být globální extrém. Celkem máme tyto „podezřelé“ body

$$[1,1], \quad [0,0], \quad [0,3], \quad [3,0], \quad \left[\tfrac{9}{5}, \tfrac{6}{5}\right]$$

po řadě s funkčními hodnotami

$$-4, \quad -1, \quad -19, \quad -10, \quad -\tfrac{14}{5}.$$

Vidíme, že největší hodnoty -1 nabývá funkce f v bodě $[0,0]$ a nejmenší hodnoty -19 pak v bodě $[0,3]$. □

8.7. Najděte maximální a minimální hodnotu polynomu

$$p(x,y) = 4x^3 - 3x - 4y^3 + 9y$$

na množině

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1\right\}.$$

Řešení. Také v tomto příkladu máme zadán polynom na kompaktní množině, a proto se omezíme na hledání stacionárních bodů uvnitř a stacionárních a „krajních“ bodů na hranici M. Jako řešení rovnic

$$p_x(x,y) = 12x^2 - 3 = 0, \quad p_y(x,y) = -12y^2 + 9 = 0$$

však dostáváme pouze body

$$\left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right], \quad \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right], \quad \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right], \quad \left[-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right],$$

které se nacházejí na hranici M. To znamená, že p nemá uvnitř M žádný extrém. Stačí tak najít maximum a minimum p na jednotkové kružnici $k:$ $x^2 + y^2 = 1$. Kružnici k umíme vyjádřit parametricky jako

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \qquad t \in [-\pi, \pi].$$

Od hledání extrémů p na M tak přecházíme k hledání extrémů funkce

$$f(t) := p(\cos t, \sin t) = 4\cos^3 t - 3\cos t - 4\sin^3 t + 9\sin t$$

na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Platí

$$f'(t) = -12\cos^2 t \sin t + 3\sin t - 12\sin^2 t \cos t + 9\cos t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Abychom mohli určit stacionární body, musíme funkci f' vyjádřit ve tvaru, ze kterého bude možné vypočítat, kde její graf protíná osu x. Použijeme k tomu identitu

$$\tfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \mathrm{tg}^2\, t,$$

která platí všude, kde mají obě strany smysl. S její pomocí dostáváme

$$f'(t) = \cos^3 t \left[-12\mathrm{tg}\, t + 3\left(\mathrm{tg}\, t + \mathrm{tg}^3\, t\right) - 12\mathrm{tg}^2\, t + 9\left(1 + \mathrm{tg}^2 t\right)\right]$$

pro $t \in [-\pi, \pi]$ taková, že je $\cos t \ne 0$. Toto omezení ovšem nevyloučí žádné stacionární body, protože $\sin t \ne 0$, je-li $\cos t = 0$. Stacionárními body f jsou tak $t \in [-\pi, \pi]$, pro která je

$$-4\mathrm{tg}\, t + \mathrm{tg}\, t + \mathrm{tg}^3\, t - 4\mathrm{tg}^2\, t + 3 + 3\mathrm{tg}^2 t = 0.$$

Substitucí $s = \mathrm{tg}\, t$ obdržíme

$$s^3 - s^2 - 3s + 3 = 0, \quad \text{tj.} \quad (s-1)\left(s - \sqrt{3}\right)\left(s + \sqrt{3}\right) = 0.$$

Hodnotám

$$s = 1, \quad s = \sqrt{3}, \quad s = -\sqrt{3}$$

odpovídá postupně

$$t \in \{-\tfrac{3}{4}\pi, \tfrac{1}{4}\pi\}, \quad t \in \{-\tfrac{2}{3}\pi, \tfrac{1}{3}\pi\}, \quad t \in \{-\tfrac{1}{3}\pi, \tfrac{2}{3}\pi\}.$$

Nyní vyčíslíme funkci f ve všech těchto bodech a také v krajních bodech $t = -\pi$, $t = \pi$. Při seřazení podle velikosti je

$$f\left(-\tfrac{1}{3}\,\pi\right) = -1 - 3\sqrt{3} < f\left(-\tfrac{3}{4}\,\pi\right) = -3\sqrt{2} < f\left(-\tfrac{2}{3}\,\pi\right) = 1 - 3\sqrt{3} < -1,$$
$$f(-\pi) = f(\pi) = -1 < 0,$$
$$f\left(\tfrac{2}{3}\,\pi\right) = 1 + 3\sqrt{3} > f\left(\tfrac{1}{4}\,\pi\right) = 3\sqrt{2} > f\left(\tfrac{1}{3}\,\pi\right) = -1 + 3\sqrt{3} > 0.$$

Globální minimum má funkce f tedy v bodě $t = -\pi/3$ a maximum v bodě $t = 2\pi/3$.

Nyní se vraťme k původní funkci p. Protože

$$\cos\left(-\tfrac{1}{3}\,\pi\right) = \tfrac{1}{2}, \quad \sin\left(-\tfrac{1}{3}\,\pi\right) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\tfrac{2}{3}\,\pi\right) = -\tfrac{1}{2}, \quad \sin\left(\tfrac{2}{3}\,\pi\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

nabývá polynom p minimální hodnoty $-1-3\sqrt{3}$ (pochopitelně stejné jako f) v bodě $\left[1/2, -\sqrt{3}/2\right]$ a maximální hodnoty $1 + 3\sqrt{3}$ v bodě $\left[-1/2, \sqrt{3}/2\right]$. $\square$

8.8. V jakých bodech nabývá funkce

$$f(x, y) = x^2 - 4x + y^2$$

globálních extrémů na množině $M : |\,x\,| + |\,y\,| \le 1$?

Řešení. Pokud vyjádříme f ve tvaru

$$f(x, y) = (x-2)^2 - 4 + y^2,$$

je vidět, že tato funkce má globální maximum a minimum ve stejných bodech jako funkce

$$g(x, y) := \sqrt{(x-2)^2 + y^2}, \quad [x, y] \in M.$$

Posunutí funkce ani aplikace rostoucí funkce $v = \sqrt{u}$ pro $u \ge 0$ totiž nemění body, kde nastávají extrémy (pouze změní hodnotu extrémů). O funkci g však víme, že udává vzdálenost bodu $[x, y]$ od bodu $[2, 0]$. Neboť množina M je zřejmě čtvercem s vrcholy $[1, 0]$, $[0, 1]$, $[-1, 0]$, $[0, -1]$, nejblíže z bodů M k bodu $[2, 0]$ je vrchol $[1, 0]$ a nejvzdálenější je vrchol $[-1, 0]$. Máme výsledek – minimální hodnotu má f v bodě $[1, 0]$ a maximální v bodě $[-1, 0]$. $\square$

8.9. Spočítejte lokální extrémy funkce $y = f(x)$ určené implicitně rovnicí

$$3x^2 + 2xy + x = y^2 + 3y + \tfrac{5}{4}, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\left[x, x - \tfrac{3}{2}\right];\, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Řešení. V souladu s teoretickou částí označme

$$F(x, y) = 3x^2 + 2xy + x - y^2 - 3y - \tfrac{5}{4}, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\left[x, x - \tfrac{3}{2}\right];\, x \in \mathbb{R}\right\}$$

a vypočtěme derivaci

$$y' = f'(x) = -\tfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\tfrac{6x+2y+1}{2x-2y-3}.$$

Vidíme, že tato derivace existuje spojitě na celé zadané množině. Zvláště je na této množině implicitně určena funkce f (jmenovatel je nenulový).

Lokální extrém může nastat pouze pro x, y, pro která je $y' = 0$, tj. $6x + 2y + 1 = 0$. Dosadíme-li $y = -3x - 1/2$ do rovnice $F(x, y) = 0$, obdržíme po úpravě $-12x^2 + 6x = 0$ a následně

$$[x, y] = \left[0, -\tfrac{1}{2}\right], \quad [x, y] = \left[\tfrac{1}{2}, -2\right].$$

Snadno také spočítáme

$$y'' = (y')' = -\tfrac{(6+2y')(2x-2y-3)-(6x+2y+1)(2-2y')}{(2x-2y-3)^2}.$$

Dosazením $x = 0$, $y = -1/2$, $y' = 0$ a $x = 1/2$, $y = -2$, $y' = 0$ dostaneme

$$y'' = -\tfrac{6(-2)-0}{4} > 0 \quad \text{pro } [x,y] = \left[0, -\tfrac{1}{2}\right]$$

a

$$y'' = -\tfrac{6(+2)-0}{4} < 0 \quad \text{pro } [x,y] = \left[\tfrac{1}{2}, -2\right].$$

Dokázali jsme tak, že v bodě $x = 0$ v okolí $[0, -1/2]$ je ostré lokální minimum a v bodě $x = 1/2$ v okolí $[1/2, -2]$ ostré lokální maximum. $\square$

8.10. Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x,y)$ zadané na maximální množině implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0. \tag{0.2}$$

Řešení. Derivování (0.2) podle x a y dává

$$\begin{aligned} 2x + 2zz_x - z - xz_x - yz_x + 2 + 2z_x &= 0, \\ 2y + 2zz_y - xz_y - z - yz_y + 2 + 2z_y &= 0. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá

$$z_x = f_x(x,y) = \frac{z - 2x - 2}{2z - x - y + 2}, \quad z_y = f_y(x,y) = \frac{z - 2y - 2}{2z - x - y + 2}. \tag{0.3}$$

Všimněme si, že parciální derivace jsou spojité všude, kde je definována funkce f. To implikuje, že lokální extrémy mohou být pouze ve stacionárních bodech. Ve stacionárních bodech pak platí

$$\begin{aligned} z_x &= 0, \quad \text{tj.} \quad z - 2x - 2 = 0, \\ z_y &= 0, \quad \text{tj.} \quad z - 2y - 2 = 0. \end{aligned}$$

Máme dvě rovnice, které umožňují vyjádřit x a y v závislosti na z. Dosazením do (0.2) potom již získáme body

$$\begin{aligned} [x,y,z] &= \left[-3+\sqrt{6}, -3+\sqrt{6}, -4+2\sqrt{6}\right], \\ [x,y,z] &= \left[-3-\sqrt{6}, -3-\sqrt{6}, -4-2\sqrt{6}\right]. \end{aligned}$$

Nyní potřebujeme druhé derivace k tomu, abychom mohli říci, zda jde v příslušných bodech o lokální extrémy. Derivováním z_x v (0.3) dostáváme

$$z_{xx} = f_{xx}(x,y) = \tfrac{(z_x-2)(2z-x-y+2)-(z-2x-2)(2z_x-1)}{(2z-x-y+2)^2},$$

derivujeme-li podle x, a

$$z_{xy} = f_{xy}(x,y) = \tfrac{z_y(2z-x-y+2)-(z-2x-2)(2z_y-1)}{(2z-x-y+2)^2},$$

když derivujeme podle y. Důvodem, proč jsme neurčili také z_{yy}, je záměnné postavení x a y v (0.2) (pokud zaměníme x za y, rovnice se nezmění). Navíc také x-ové a y-ové souřadnice uvažovaných bodů jsou stejné, a proto je v těchto bodech $z_{xx} = z_{yy}$. Snadno již ve stacionárních bodech vyčíslíme

$$\begin{aligned} f_{xx}\left(-3+\sqrt{6}, -3+\sqrt{6}\right) &= f_{yy}\left(-3+\sqrt{6}, -3+\sqrt{6}\right) = -\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \\ f_{xy}\left(-3+\sqrt{6}, -3+\sqrt{6}\right) &= f_{yx}\left(-3+\sqrt{6}, -3+\sqrt{6}\right) = 0, \end{aligned}$$

$$f_{xx}\left(-3-\sqrt{6},-3-\sqrt{6}\right)=f_{yy}\left(-3-\sqrt{6},-3-\sqrt{6}\right)=\tfrac{1}{\sqrt{6}},$$
$$f_{xy}\left(-3-\sqrt{6},-3-\sqrt{6}\right)=f_{yx}\left(-3-\sqrt{6},-3-\sqrt{6}\right)=0.$$

Při zápisu do Hessovy matice je

$$Hf\left(-3+\sqrt{6},-3+\sqrt{6}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$
$$Hf\left(-3-\sqrt{6},-3-\sqrt{6}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

Očividně první Hessova matice je záporně a druhá kladně definitní, což znamená, že v bodě $\left[-3+\sqrt{6},-3+\sqrt{6}\right]$ je ostré lokální maximum, zatímco v bodě $\left[-3-\sqrt{6},-3-\sqrt{6}\right]$ je ostré lokální minimum funkce f. $\square$

8.11. Stanovte ostré lokální extrémy funkce

$$f(x,y)=\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y},\quad x\neq 0,\ y\neq 0$$

na množině bodů, které vyhovují rovnici $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=4$.

Řešení. Neboť funkce f i funkce zadaná implicitně rovnicí $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-4=0$ mají zřejmě spojité parciální derivace všech řádů na množině $\mathbb{R}^2\setminus\{[0,0]\}$, hledejme stacionární body, tj. hledejme řešení rovnic $L_x=0$, $L_y=0$ pro

$$L(x,y,\lambda)=\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}-\lambda\left(\tfrac{1}{x^2}+\tfrac{1}{y^2}-4\right),\quad x\neq 0,\ y\neq 0.$$

Takto dostáváme rovnice

$$-\tfrac{1}{x^2}+\tfrac{2\lambda}{x^3}=0,\quad -\tfrac{1}{y^2}+\tfrac{2\lambda}{y^3}=0,$$

které vedou na $x=2\lambda$, $y=2\lambda$. Vzhledem k uvažované množině bodů podmínka $x=y$ dává stacionární body

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\quad \left[-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]. \tag{0.4}$$

Zkoumejme dále druhý diferenciál funkce L. Snadno lze určit

$$L_{xx}=\tfrac{2}{x^3}-\tfrac{6\lambda}{x^4},\quad L_{xy}=0,\quad L_{yy}=\tfrac{2}{y^3}-\tfrac{6\lambda}{y^4},\quad x\neq 0,\ y\neq 0,$$

odkud plyne

$$d^2L(x,y)=\left(\tfrac{2}{x^3}-\tfrac{6\lambda}{x^4}\right)dx^2+\left(\tfrac{2}{y^3}-\tfrac{6\lambda}{y^4}\right)dy^2.$$

Diferencováním vazebné podmínky $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=4$ pak dostáváme

$$-\tfrac{2}{x^3}\,dx-\tfrac{2}{y^3}\,dy=0,\quad \text{tj.}\quad dy^2=\tfrac{y^6}{x^6}\,dx^2.$$

Proto je

$$d^2L(x,y)=\left[\tfrac{2}{x^3}-\tfrac{6\lambda}{x^4}+\left(\tfrac{2}{y^3}-\tfrac{6\lambda}{y^4}\right)\tfrac{y^6}{x^6}\right]dx^2.$$

Uvažujeme vlastně jednorozměrnou kvadratickou formu, jejíž pozitivní (negativní) definitnost ve stacionárním bodě znamená, že v tomto bodě je minimum (maximum). Uvědomíme-li si, že pro stacionární body bylo $x=2\lambda$, $y=2\lambda$, pouhým dosazením získáváme

$$d^2L\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2},\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-4\sqrt{2}\,dx^2,\quad d^2L\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2},-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\sqrt{2}\,dx^2,$$

což znamená, že v bodě $\left[\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2\right]$ má funkce f ostré lokální maximum a v bodě $\left[-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2\right]$ potom ostré lokální minimum. Ještě doplňme hodnoty

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2},\quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2\sqrt{2}. \tag{0.5}$$

Nyní si ukážeme rychlejší způsob, jak jsme mohli dospět k výsledku. Známe (příp. snadno určíme) druhé parciální derivace funkce L, tj. její Hessovu matici

$$HL\,(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{2}{x^3}-\frac{6\lambda}{x^4} & 0\\ 0 & \frac{2}{y^3}-\frac{6\lambda}{y^4}\end{pmatrix}.$$

Vyčíslením

$$HL\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2},\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\begin{pmatrix}-2\sqrt{2} & 0\\ 0 & -2\sqrt{2}\end{pmatrix},\quad HL\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2},-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 0\\ 0 & 2\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

pak zjistíme, že tato kvadratická forma je pro první stacionární bod negativně definitní (jedná se o ostré lokální maximum) a pozitivně definitní pro druhý stacionární bod (ostré lokální minimum).

Upozorněme na nebezpečí tohoto „rychlejšího" přístupu, kdybychom obdrželi indefinitní formu (matici). V takovém případě bychom nemohli tvrdit, že v daném bodě extrém nenastává. Při nezačlenění vazebné podmínky (což jsme během výpočtu d^2L provedli) totiž uvažujeme obecnější situaci. Grafem funkce f na zadané množině je křivka, kterou lze zadat jako funkci jedné proměnné. Tomu právě musí odpovídat jednodimenzionální kvadratická forma. □

8.12. Nalezněte globální extrémy funkce

$$f(x,y)=\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y},\quad x\neq 0,\ y\neq 0$$

na množině bodů, které vyhovují rovnici $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=4$.

Řešení. Na tomto příkladu si ukážeme, že hledání globálních extrémů může být výrazně snazší než hledání extrémů lokálních (viz předešlý příklad) také tehdy, když jsou uvažovány hodnoty funkce na neohraničené množině. Stejným způsobem jako v minulém příkladu bychom ovšem nejprve stanovili stacionární body (0.4) a hodnoty (0.5). Raději zdůrazněme, že v tomto příkladu hledáme extrémy funkce na nekompaktní množině, a tak se nemůžeme spokojit s pouhým vyčíslením funkčních hodnot ve stacionárních bodech. Důvodem je, že funkce f na uvažované množině vůbec nemusí maximální ani minimální hodnoty nabývat – její obor hodnot zde může být otevřeným intervalem. Ukažme si, že tomu tak ale není.

Uvažujme proto $|\,x\,|\geq 10$ a uvědomme si, že rovnici $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=4$ mohou splňovat pouze hodnoty y, pro které je $|\,y\,|\geq 1/2$. Máme tak odhady

$$-2\sqrt{2}<-\tfrac{1}{10}-2\leq f(x,y)\leq\tfrac{1}{10}+2<2\sqrt{2},\quad \text{je-li}\quad |\,x\,|\geq 10.$$

Současně je (záměnou x za y dostaneme stejnou úlohu)

$$-2\sqrt{2} < -\tfrac{1}{10} - 2 \le f(x,y) \le \tfrac{1}{10} + 2 < 2\sqrt{2}, \quad \text{je-li} \quad |\,y\,| \ge 10.$$

Odtud vidíme, že globálních extrémů na uvedené množině musí funkce f nabývat, a to uvnitř čtverce $ABCD$ s vrcholy v bodech $A = [-10,-10]$, $B = [10,-10]$, $C = [10,10]$, $D = [-10,10]$. Jako průnik „stokrát zmenšeného“ čtverce s vrcholy $\tilde{A} = [-1/10,-1/10]$, $\tilde{B} = [1/10,-1/10]$, $\tilde{C} = [1/10,1/10]$, $\tilde{D} = [-1/10,1/10]$ a zadané množiny potom očividně dostaneme prázdnou množinu. Globální extrémy jsou tedy v bodech ve vnitřku kompaktní množiny ohraničené těmito dvěma čtverci. Neboť je na této množině f spojitě diferencovatelná, globální extrémy mohou být jedině ve stacionárních bodech. Nutně je

$$f_{\max} = f\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}, \quad f_{\min} = f\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}.$$

□

8.13. Určete maximální a minimální hodnotu, kterých nabývá funkce $f(x,y,z) = xyz$ na množině M vymezené podmínkami

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 0.$$

Řešení. Není obtížné si uvědomit, že M je kružnice. V rámci řešení úlohy však postačuje vědět, že je M kompaktní, tj. ohraničená (první podmínka je rovnice jednotkové sféry – kulové plochy) a uzavřená (množina, která je řešením uvedených rovnic, je uzavřená, neboť z platnosti těchto rovnic pro všechny členy jisté konvergentní posloupnosti vyplývá jejich platnost pro limitu této posloupnosti). Funkce f i vazebné funkce $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $G(x,y,z) = x + y + z$ mají spojité parciální derivace všech řádů (jsou to polynomy). Jacobiho matice vazeb pak je

$$\begin{pmatrix} F_x(x,y,z) & F_y(x,y,z) & F_z(x,y,z) \\ G_x(x,y,z) & G_y(x,y,z) & G_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Její hodnost je snížena (menší než 2), právě když je vektor $(2x, 2y, 2z)$ násobkem vektoru $(1,1,1)$, což dává $x = y = z$ a podle druhé ze zadaných podmínek dále $x = y = z = 0$. Ovšem množina M počátek neobsahuje. Nic nám tedy nebrání hledat stacionární body použitím metody Lagrangeových multiplikátorů.

Pro

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = xyz - \lambda_1\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right) - \lambda_2\,(x + y + z)$$

rovnice $L_x = 0$, $L_y = 0$, $L_z = 0$ po řadě dávají

$$yz - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0,$$
$$xz - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0,$$
$$xy - 2\lambda_1 z - \lambda_2 = 0.$$

Odečtením první rovnice od druhé a od třetí dostaneme

$$xz - yz - 2\lambda_1 y + 2\lambda_1 x = 0,$$
$$xy - yz - 2\lambda_1 z + 2\lambda_1 x = 0,$$

tj. po úpravě

$$(x-y)\,(z+2\lambda_1)=0,$$
$$(x-z)\,(y+2\lambda_1)=0.$$

Poslední rovnice jsou splněny v těchto čtyřech případech

$$x=y, x=z; \quad x=y, y=-2\lambda_1;$$
$$z=-2\lambda_1, x=z; \quad z=-2\lambda_1, y=-2\lambda_1,$$

tedy (zahrnutím podmínky $G=0$)

$$x=y=z=0; \quad x=y=-2\lambda_1, z=4\lambda_1;$$
$$x=z=-2\lambda_1, y=4\lambda_1; \quad x=4\lambda_1, y=z=-2\lambda_1.$$

S výjimkou prvního případu (který zřejmě nemůže být splněn) začleněním podmínky $F=0$ obdržíme

$$(4\lambda_1)^2+(-2\lambda_1)^2+(-2\lambda_1)^2=1, \quad \text{tj.} \quad \lambda_1=\pm\tfrac{1}{2\sqrt{6}}.$$

Celkem tak získáváme body

$$\left[-\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[-\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{2}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[\tfrac{2}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right],$$
$$\left[\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{2}{\sqrt{6}},\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[-\tfrac{2}{\sqrt{6}},\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right].$$

Nebudeme ověřovat, zda se jedná o stacionární body. Důležité je, že v této šestici jsou zahrnuty všechny stacionární body.

Hledáme globální maximum a minimum spojité funkce f na kompaktní množině M. Globální extrémy (o kterých víme, že existují) však mohou být pouze v bodech lokálních extrémů vzhledem k M. Tyto lokální extrémy pak musí být v některém z uvedených bodů. Proto pouze vyčíslíme funkci f v těchto bodech. Tím zjistíme, že hledané maximum je

$$f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right)=f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{2}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right)=f\left(\tfrac{2}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right)=\tfrac{1}{3\sqrt{6}}$$

a minimum potom

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right)=f\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{2}{\sqrt{6}},\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right)=f\left(-\tfrac{2}{\sqrt{6}},\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right)=-\tfrac{1}{3\sqrt{6}}.$$

□