Drsná matematika III – 4. přednáška
Integrace funkcí více proměnných

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

10. 10. 2010

Obsah přednášky

Kde je dobré číst?

- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.

Integrály závislé na parametrech

Jestliže integrujeme podle jedné proměnné x funkci $n+1$ proměnných $f(x, y_1, \ldots, y_n)$, potom výsledek bude funkcí $F(y_1, \ldots, y_n)$ v zbývajících proměnných.

Theorem

Pro spojitě diferencovatelnou funkci $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ definovanou pro x z konečného intervalu $[a, b]$ a na nějakém okolí bodu $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ uvažujme integrál

$$F(y_1, \ldots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, \ldots, y_n)dx.$$

Potom platí pro všechny indexy $j = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(a) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, a_1, \ldots, a_n)dx$$

Ověření plyne z přímo z definice Riemannova integrálu.
Ta vyčísluje pro libovolnou spojitou funkci jeho hodnotu pomocí aproximací konečnými součty (ekvivalentně horními, dolními nebo Riemannovými součty s libovolnými reprezentanty).
Je zřejmé, že při důkazu je třeba brát v úvahu pouze souřadnici y_j parametrů (ostatní jsou prostě konstantní pro všechny naše úvahy), proto si technicky formulace zjednodušíme, když se rovnou omezíme na případ $n = 1$ a tedy $y = (y_1)$.
Výsledek pak vcelku snadno plyne přímo z věty o střední hodnotě pro funkce jedné proměnné a z definice parciální derivace.

Předchozí výsledky o extrémech funkcí více proměnných nyní mají přímé použití např. pro minimalizaci ploch nebo objemů objektů zadanými funkcemi v závislosti na parametrech.
Využití je širší. Jako další příklad můžeme uvést možnost přímého derivování výsledků integrálních transformací, kterým jsme se věnovali v druhé části předchozí kapitoly sedmé.

Integrace funkcí více proměnných

Tak jak jsme motivovali integrování představou o výpočtu plochy pod grafem funkce jedné proměnné, můžeme prakticky stejně postupovat u objemu části trojrozměrného prostoru pod grafem funkce $z = f(x, y)$ dvou proměnných. Místo výběru malých intervalů $[x_i, x_{i+1}]$ dělících celý interval, přes který integrujeme, a přiblížením příslušné části objemu ploškou obdélníku s výškou danou hodnotou funkce f v reprezentantu tohoto intervalu ξ_i, tj. výrazem

$$f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

budeme pracovat s děleními v obou proměnných a hodnotami reprezentujícími výšku grafu nad tímto obdélníčkem v rovině.

Co jsou obory integrace?

Nejjednodušším přístupem je uvažovat pouze obory integrace S, které jsou dány jako součiny intervalů, tj. jsou zadány rozsahem $x \in [a, b]$ a $y \in [c, d]$.

Hovoříme v této souvislosti o **vícerozměrném intervalu**.

Pokud je S jiná ohraničená množina v $\mathbb{R}^2$, pracujeme místo ní s dostatečně velikou oblastní $[a, b] \times [c, d]$, ale upravíme naši funkci tak, že $f(x, y) = 0$ pro všechny body mimo S.

Definice Riemannova integrálu věrně sleduje náš postup pro jednu proměnnou.

Integrál existuje, jestliže pro každou volbu posloupnosti dělení Ξ (nyní ve všech proměnných zároveň) a reprezentantů jednotlivých krychliček

$$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \times \ldots \times [z_j, z_{j+1}] \subset \mathbb{R}^n,$$

s maximální velikostí mezi všemi použitými intervaly jdoucí k nule, budou integrální součty

$$S_{\Xi,\xi} = \sum_{i,\ldots,j} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \ldots (z_{j+1} - z_j).$$

konvergovat k jedné hodnotě, kterou zapisujeme

$$\int_S f(x, \ldots, z)dx \ldots dz$$

Pro všechny spojité funkce f opět lze dokázat existenci Riemannova integrálu a tento výsledek lze snadno rozšířit pro „dostatečně spojité“ funkce na „dostatečně rozumných“ oborech integrace.

Definition

Omezenou množinu $S \subset \mathbb{R}^n$ označujeme za **Riemannovsky měřitelnou**, jestliže je její charakteristická funkce, definovaná $\xi(x) = 1$ pro $x \in S$ a $\xi(x) = 0$ jinak, Riemannovsky integrovatelná.

Definice Riemannova integrálu sice nedává rozumný návod, jak hodnoty integrálů skutečně vypočíst, okamžitě ale vede k základním vlastnostem Riemannova integrálu (srovnejte s vlastnostmi integrálu v jedné proměnné):

Theorem

Množina Riemannovsky integrovatelných funkcí na vícerozměrném intervalu $S \subset \mathbb{R}^n$ je vektorovým prostorem a Riemannův integrál je na něm lineární formou.
Pokud je obor integrace S zadán jako disjunktní sjednocení konečně mnoha Riemannovsky měřitelných oborů S_i, je integrál funkce f přes S dán součtem integrálů přes obory S_i.

Násobné integrály

Riemannovsky integrovatelné množiny zejména zahrnují případy, kdy lze S definovat pomocí spojité funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici x umíme zadat dvěmi funkcemi rozsah další souřadnice $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$, poté rozsah další souřadnice $z \in [\eta(x, y), \zeta(x, y)]$ atd.

Theorem

V případě množiny S zadané jako výše a Riemannovsky integrovatelné funkce f na S je Riemannův integrál vyčíslen formulí

$$\int_S f(x, y, \dots, z) dx \dots dz =$$
$$\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \dots \left(\int_{\eta(x,y,\dots)}^{\zeta(x,y,\dots)} f(x, y, \dots, z) dz \right) \dots dy \right) dx$$

Důkaz.

Výsledek vyplývá docela snadno přímo z definice Riemannova integrálu pomocí konečných součtů. Stačí si pečlivě hlídat vhodné poskládání jednotlivých sčítanců konečných součtů tak, aby vycházely postupně přiblížení integrálů ve vnitřních závorkách. □

Přímým důsledkem je:

Theorem

Pro vícerozměrný interval $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ a spojitou funkci $f(x_1, \ldots, x_n)$ na S je násobný integrál

$$\int_S f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

nezávislý na pořadí ve kterém postupně integraci provádíme.

Změna souřadnic při integraci

Při výpočtu integrálů funkcí jedné proměnné jsme používali transformace souřadnic jako mimořádně silný nástroj.
Obdobně lze transformace využívat pro integrály funkcí více proměnných.
Připomeňme nejdříve jak je to s transformacemi pro jednu proměnnou:
Integrovaný výraz $f(x)dx$ vyjadřuje plochu obdélníčku určeného (linearizovaným) přírůstkem proměnné x a hodnotou $f(x)$. Pokud proměnnou transformujeme vztahem $x = u(t)$, vzjadřuje se i linearizovaný přírůstek jako

$$dx = \frac{du}{dt}dt$$

a proto i příslušný příspěvek pro integrál je vyjádřen jako

$$f(u(t))\frac{du}{dt}dt,$$

přičemž buď předpokládáme, že znaménko derivace $u'(t)$ je kladné, Intuitivně je postup v n proměnných docela podobný, pouze musíme použít znalostí z lineární algebry o objemu rovnoběžnostěnů.

Theorem

Nechť $G(t_1, \dots, t_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_n) = G(t_1, \dots, t_n)$, je spojitě diferencovatelné zobrazení, $S = G(T)$ a T jsou Riemannovsky měřitelné množiny a $f : S \to \mathbb{R}$ spojitá funkce. Potom platí

$$\int_S f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots x_n = \int_T f(G(t_1, \dots, t_n)) |\det(D^1 G(t_1, \dots, t_n))| dt_1 \dots dt_n.$$

Podrobný formální důkaz nebudeme prezentovat, je však přímočarou realizací výše uvedené úvahy ve spojení s definicí Riemannova integrálu.

Abychom si přiblížili obsah tvrzení poslední věty, uvedeme jeho speciální případ pro integrál funkce $f(x, y)$ ve dvou proměnných a transformaci

$$G(s, t) = (g(s, t), h(s, t)).$$

Dostáváme

$$\int_{G(T)} f(x, y) dxdy = \int_T f(g(s, t), h(s, t)) \left| \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s} \right| dsdt.$$

Úplně konkrétně spočteme integrál z charakteristické funkce kružnice o poloměru R (tj. její plochu)
Nejprve spočítáme Jacobiho matici transformace $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Proto je determinant z této matice roven

$$\det D^1 G(r, \theta) = r(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r.$$

Můžeme tedy přímo počítat pro kružnici S o poloměru R, která je obrazem obdélníku $(r, \theta) \in [0, R] \times [0, 2\pi] = T$:

$$\int_S dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^R rdr\, d\theta = \int_0^R 2\pi rdr = \pi R^2.$$