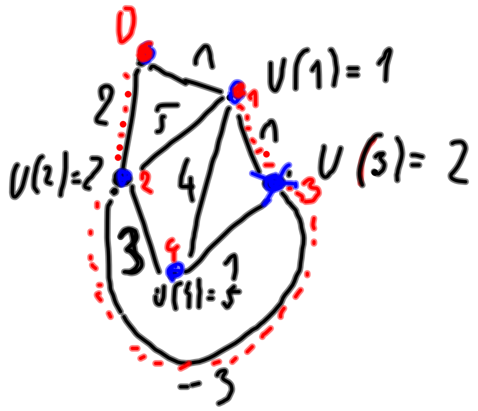
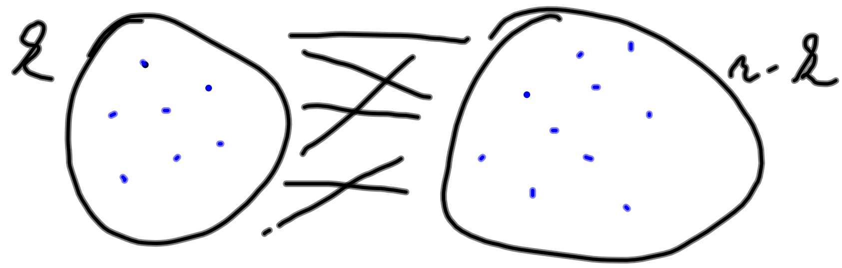


② Pro lib. $n \geq 4$ tvrzení neplatí:
ukážeme, že odebráním 2 hran, které nemají společný vrchol vznikne (hranově) $(n-2)$-souvislý graf:

zřejmě odebráním $(n-3)$ hran nevznikne izolovaný vrchol: Kdyby vznikly dvě komponenty, každá alespoň o 2 vrcholech, řekněme k a $n-k$ vrcholech, $k \geq 2$.



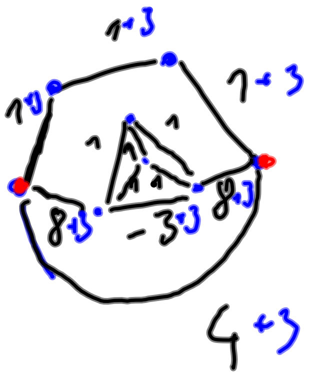
V K_n vedlo mezi těmito komponentami $k(n-k)$ hran. Tedy $(n-1) \geq k(n-k)$

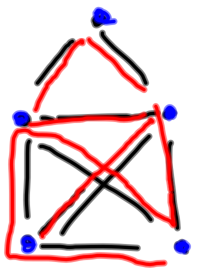
$$\iff k^2 - kn + (n-1) \geq 0$$

$$k_{1,2} = \frac{n \pm \sqrt{n^2-4(n-1)}}{2} = \begin{cases} 1 \\ n-1 \end{cases}$$

tedy pro $k \in (1, n-1)$ platí $k^2 - kn + (n-1) < 0$ ↯

3)



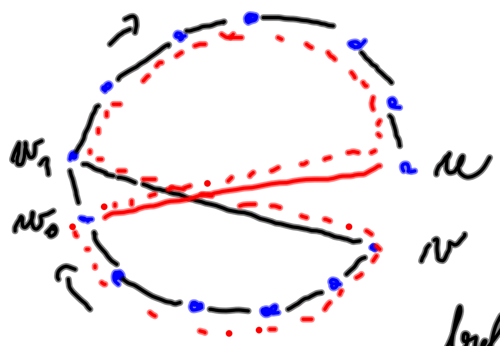


Postačující podmínky pro existenci Hamiltonovské kružnice v grafu:

(i) Stupeň každého z vrcholů je alespoň $\frac{n}{2}$ (n je počet vrcholů v grafu) (Dirac)

(ii) Součet stupňů lib. dvou vrcholů je alespoň n. (Ore)

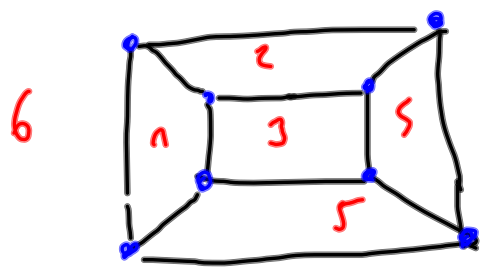
Důkaz: Ukážeme, že v grafu, který není Hamiltonovský, existují dva vrcholy, jejichž součet stupňů je $< n$. Potom přidáváním hran do tohoto grafu vznikne někdy graf Hamiltonovský! Nechť H je naposledy přidaná hrana (mezi vrcholy u a v):



V grafu nemůže být hrana ——, protože již před přidáním hrany H by v grafu byla Hamilt. kružnice

nechť $st(v) = k$, pak $st(w) \leq (n-1)-k$,
tedy $st(v) + st(u) \leq n-1$

Rovinné grafy



s ... počet stěn (oblastí) daného grafu

v ... počet vrcholů

h ... počet hran

$8 + 6 - 12 = 2$

$s + v - h = 2$

$$3s = \sum_{s \in S} 3 \le \sum_{s \in S} n_s = 2h$$

$$3s \le 2h$$

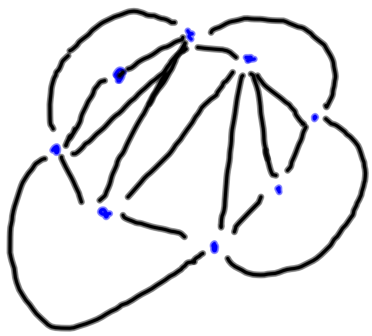
$$\frac{3}{2} s \le h$$

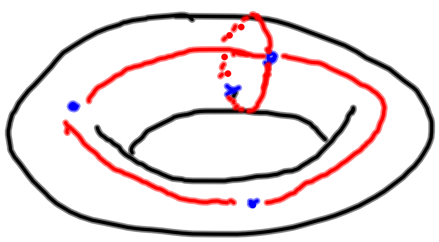
S ... množina stěn

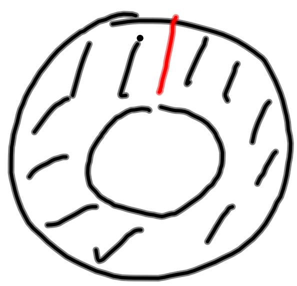
n_s ... počet hran ohraničujících stěnu s

$\Longrightarrow$ jedenáctistěn má minimálně 17 hran

$v = 8$







$v = 4$

$h = 5$

$s = 1$

$v + s - h = 4 + 1 - 5 =$

$= 0$