

Jméno a příjmení:	
-------------------	--

Příklad číslo:	1	2	3	4	Σ
Počet bodů:					

Příklad 1. Určete Taylorův polynom druhého stupně funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 \sin y + y^2 \cos x$ v bodě $[\pi, \pi]$. Rozhodněte (tím se myslí i zdůvodněte), zda tečná rovina ke grafu této funkce v bodě $[\pi, \pi, f(\pi, \pi)]$ prochází bodem $[0, 0, \pi^3 + \pi^2]$.

Řešení. $T(x, y) = -\pi^2 - (\pi^2 + 2\pi)(y - \pi) - 2\pi(x - \pi)(y - \pi) + \frac{1}{2}\pi^2(x - \pi)^2 - (y - \pi)^2$, ano. □

Příklad 2. Určete těžiště tělesa v \mathbb{R}^3 , které leží nad rovinou $z = 0$, pod rovinou $z = 2$ a je dále ohraničeno kužely $x^2 + y^2 = z^2$ a $x^2 + y^2 = 2z^2$.

Řešení. $[0, 0, \frac{3}{2}]$. Lze řešit i úvahou (pokud vím, že kužel má těžiště ve čtvrtině výšky). □

Příklad 3. Nalezněte řešení rovnice

$$y^{(3)} = -2y'' - 2y' - y + \sin(x),$$

splňující $y(0) = -\frac{1}{2}$, $y'(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $y''(0) = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Řešení. $y(x) = -e^{-x} + e^{-\frac{1}{2}x} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + e^{-\frac{1}{2}x} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) - \frac{1}{2} \sin(x) - \frac{1}{2} \cos(x)$. □

Příklad 4. Uvažme následující hru dvou hráčů: na stole je sedm mincí na jedné hromádce. Hráči se střídají na tahu. Tah spočívá v provedení alespoň jednoho z následujících dvou bodů:

- rozdělení nějaké hromádky na stole na dvě (neprázdné) hromádky
- odebrání libovolných dvou mincí ze stolu

Kdo nemůže udělat tah, prohrává. Rozhodněte, za kterého hráče (prvního či druhého) existuje vyhrávající strategie. Zdůvodněte. Napište alespoň (jeden z možných) prvních tahů vyhrávající strategie hráče, který ji má (v případě, že má vyhrávající strategii druhý hráč, tak na každý z možných prvních tahů prvního hráče napište vyhrávající odpověď).

Řešení. Výhra za prvního hráče. Úvodní tah $7 \mapsto 5$. □