Drsná matematika III – 1. přednáška
Funkce více proměnných: křivky, směrové derivace, diferenciál

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

19. 9. 2011

Obsah přednášky

Kde je dobré číst?

- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.

Definition

Zobrazení $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazýváme *funkce více proměnných*. Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ často místo číslovaných proměnných používáme písmena x, y, z. To znamená, že funkce f definované v „rovině“ $E_2 = \mathbb{R}^2$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

a podobně v „prostoru“ $E_3 = \mathbb{R}^3$

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \in \mathbb{R}.$$

Definiční obor $A \subset \mathbb{R}^n$ – množina, kde je funkce definována. (Hříčkou pro písemky a úlohy bývá úkol k dané formuli pro funkci najít co největší definiční obor, na kterém má tato formule smysl.)

Definition

Graf funkce více proměnných je podmnožina $G_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ definová vztahem

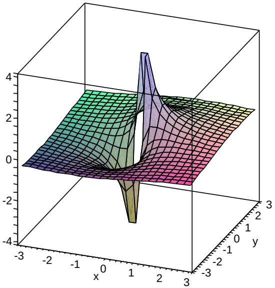
$$G_f = \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n));\ (x_1, \ldots, x_n) \in A\},$$

kde A je definiční obor f.

Grafem funkce definované v E_2

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

je plocha na obrázku, maximálním definičním oborem je $E_2 \setminus \{(0, 0)\}$.



Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením $\mathbb{R}^n$, což je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.
Navíc je na $\mathbb{R}^n$ standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory.
Proto je na E_n dána *metrika*, tj. funkce vzdálenosti $\|P - Q\|$ dvojic bodů P, Q předpisem

$$\|P - Q\|^2 = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

kde u je vektor, jehož přičtením k P obdržíme Q. Např. E_2 je vzdálenost bodů $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ dána $\|P_1 - P_2\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.
Trojúhelníková nerovnost pro každé tři body P, Q, R

$$\|P - R\| = \|(P - Q) + (Q - R)\| \leq \|(P - Q)\| + \|(Q - R)\|.$$

Rozšíření pojmů topologie $\mathbb{R}$ pro body P_i libovolného Euklidovského E_n:

Definition

- *Cauchyovská posloupnost* – $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j,
- *konvergentní posloupnost* – $\|P_i - P\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j, bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i,
- *hromadný bod P množiny $A \subset E_n$* – existuje posloupnost bodů v A konvergující k P a vesměs různých od P,
- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,
- *otevřené δ–okolí bodu P* – množina $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n;\ \|P - Q\| < \delta\}$,

Definition

- *hraniční bod P množiny A* – každé δ–okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod P množiny A* – existuje δ–okolí bodu P, které celé leží uvnitř A,
- *ohraničená množina* – leží celá v nějakém δ–okolí některého svého bodu (pro dostatečně velké δ),
- *kompaktní množina* – uzavřená a ohraničená množina.

Theorem

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

1. *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ–okolí,*
2. *každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
3. *každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A,*
4. *A je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v A,*
5. *A je kompaktní, právě když každé její otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.*

Definition

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \to E_n$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

Definition

- *Limita:* $\lim_{t \to t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$
- *Derivace:* $c'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{|t - t_0|} \cdot (c(t) - c(t_0)) \in \mathbb{R}^n$
- *Integrál:* $\int_a^b c(t) dt \in \mathbb{R}^n$.

Výrok o integrálu má smysl i pro křivku ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$! Limity, derivace i integrály lze spočíst po jednotlivých n souřadných složkách v $\mathbb{R}^n$ a stejně se rozpozná i jejich existence.

Analogie souvislosti Riemannova integrálu a antiderivace pro křivky:

Theorem

Je-li $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ křivka spojitá na intervalu $[a, b]$, pak existuje její Riemannův integrál $\int_a^b c(t)dt$. Navíc je křivka

$$C(t) = \int_a^t c(s)ds \in \mathbb{R}^n$$

dobře definovaná, diferencovatelná a platí $C'(t) = c(t)$ pro všechny hodnoty $t \in [a, b]$.

Věta o střední hodnotě dává existenci čísel t_i takových, že

$$c_i(b) - c_i(a) = (b - a) \cdot c_i'(t_i).$$

Tato čísla ale budou obecně různá, nemůžeme proto vyjádřit rozdílový vektor koncových bodů $c(b) - c(a)$ jako násobek derivace křivky v jediném bodě.

Např. v rovině E_2 pro $c(t) = (x(t), y(t))$ takto dostáváme

$$c(b) - c(a) = (x'(\xi)(b-a), y'(\eta)(b-a)) = (b-a) \cdot (x'(\xi), y'(\eta))$$

pro dvě (obecně různé) hodnoty $\xi, \eta \in [a, b]$.
Pořád nám ale úvaha stačí na následující odhad

Theorem

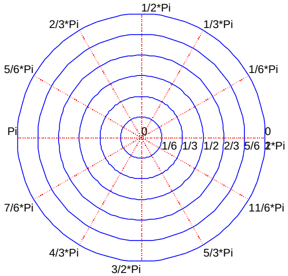
Je-li c křivka v E_n se spojitou derivací na kompaktním intervalu $[a, b]$, pak pro všechny $a \le s \le t \le b$ platí

$$\|c(t) - c(s)\| \le \sqrt{n} \max_{r\in[a,b]} \|c'(r)\| \cdot |t - s|.$$

Derivace zadává **tečný vektor** ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.
Přímka zadaná parametricky $T: \ c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je **tečna ke křivce** c v bodě t_0, nezávisí na parametrizaci křivky c.

Křivky a funkce jsou speciální případy zobrazení $F : E_m \to E_n$.
Stejně jako u vektorových prostorů, volba souřadnic, tj. našeho „pohledu na věc", může zjednodušit nebo zhoršit naše vnímání.
Změna souřadnic – invertibilní zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Příklad: polohu P zadáváme jako vzdálenost od počátku souřadnic r a úhel φ mezi spojnicí s počátkem a osou x.



Přechod z polárních souřadnic do standardních je

$$P_{\text{polární}} = (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = P_{\text{kartézské}}$$

Graf funkce můžeme také vnímat jako obraz zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Definition

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má **derivaci ve směru vektoru** $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)).$$

Speciální volbou přímek ve směru souřadných os dostáváme tzv. **parciální derivace funkce** f, které značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, nebo bez odkazu na samotnou fukci jako operace $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Pro funkce v E_2 dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + t, y) - f(x, y)),$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x, y + t) - f(x, y)).$$

Example

Se samotnými parciálními nebo směrovými derivacemi nevystačíme pro dobrou aproximaci chování funkce lineárními výrazy:

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{když } xy = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \quad h(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{když } y = x^2 \neq 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

ádná z nich neprodlužuje všechny hladké křivky procházející bodem $(0,0)$ na hladké křivky.
Pro g existují obě parciální derivace v $(0,0)$ a jiné směrové derivace neexistují, zatímco pro h existují všechny směrové derivace v bodě $(0,0)$ a platí $d_v h(0) = 0$ pro všechny směry v, takže jde o lineární závislost na $v \in \mathbb{R}^2$.

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Definition

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je **diferencovatelná v bodě** x, jestliže

1. v bodě x existují všechny směrové derivace $d_v f(x)$, $v \in \mathbb{R}^n$,
2. $d_v f(x)$ je lineární v závislosti na přírůstku v a
3. $0 = \lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}\big(f(x+v) - f(x) - d_v f(x)\big)$.

Lineární výraz $d_v f$ (závislý na vektorové proměnné v) nazýváme **diferenciál funkce** f vyčíslený na přírůstku v.

V literatuře se často také říká **totální diferenciál** df funkce f.

Uvažujme $f : E_2 \to \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi.
Diferenciál v pevném bodě (x_0, y_0) je lineární funkce $df : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

na přírůstcích se souřadnicemi danými právě parciálními derivacemi.
Obecněji v případě funkcí více proměnných píšeme obdobně

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \qquad (*)$$

a platí:

Theorem

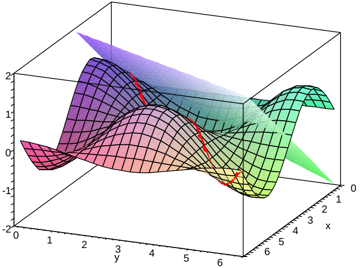
Nech¸ $f : E_n \to \mathbb{R}$ je funkce n proměnných, která má v okolí bodu $x \in E_n$ spojité parciální derivace. Pak existuje její diferenciál df v bodě x a jeho souřadné vyjádření je dáno rovnicí $(*)$.

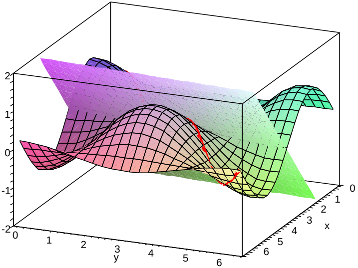
Pro $f : E_2 \to \mathbb{R}$ a pevný bod $(x_0, y_0) \in E_2$ uvažme rovinu v E_3:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Je to jediná rovina procházející (x_0, y_0), ve které leží derivace a tedy i tečny všech křivek $c(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. Říkáme jí **tečná rovina** ke grafu funkce f.

Na obrázku jsou zobrazeny dvě tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$. Červená čára je obrazem křivky $c(t) = (t, t, f(t, t))$.





Obecně pro $f : E_n \to \mathbb{R}$ je *tečnou rovinou* afinní nadrovina v E_{n+1}. Tato nadrovina

1. prochází bodem $(x, f(x))$
2. její zaměření je grafem lineárního zobrazení $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tj. diferenciálu v bodě $x \in E_n$.

Analogie s funkcemi jedné proměnné:
Diferencovatelná funkce f na E_n má v bodě $x \in E_n$ nulový diferenciál tehdy a jen tehdy, když její složení s libovolnou křivkou procházející tímto bodem zde má stacionární bod.
To ovšem neznamená, že v takovém bodě musí mít f aspoň lokálně buď maximum nebo minimum. Stejně jako u funkcí jedné proměnné můžeme rozhodovat teprve podle derivací vyšších.