# Drsná matematika III – 5. přednáška
# Diferenciální operátory

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

17. 10. 2011

# Obsah přednášky

# Kde je dobré číst?

- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.
- Kurz 18.03 na MIT OpenCourseWare, viz http//ocw.mit.edu/OcwWeb/Mathematics

# lineární model prvního řádu

Derivace pracuje s okamžitými změnami studovaných veličin. Ze stejných důvodů jsme kdysi zaváděli diference a právě vztahy mezi hodnotami veličin a změnami těch samých nebo jiných veličin vedly k rovnicím.

Nejjednodušším modelem bylo úročení vkladů nebo půjček a totéž pro tzv. Malthusiánský model populace. Přírůstek byl úměrný hodnotě.

V rámci spojitého modelování by stejný požadavek vedl na rovnici vztahující derivaci funkce $y'(x)$ s její hodnotou

$$y'(x) = r \cdot y(x)$$

s konstantou úměrnosti $r$. Je snadné uhodnout řešení této rovnosti

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{rx}$$

s libovolnou konstantou $C$.

Tuto konstantu určíme jednoznačně volbou tzv. **počáteční hodnoty** $y_0 = y(x_0)$ v nějakém bodě $x_0$.

Pokud je část růstu v našem modelu dána konstatním působením nezávislém na hodnotě $y$ nebo $x$ (např. paušální poplatky za vedení účtu nebo přirozený úbytek populace třeba v důsledku porážek na jatkách), přidáme na pravé straně konstantu $s$:

$$y'(x) = r \cdot y(x) + s.$$

Zjevně bude řešením této rovnice funkce

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{rx} - \frac{s}{r}.$$

K tomuto závěru je velice lehké dojít, pokud si uvědomíme, že množinou všech řešení první (homogenní) rovnice je jednorozměrný vektorový prostor, zatímco řešení druhé (nehomogenní) rovnice se obdrží přičtením kteréhokoliv jednoho jejího řešení ke všem řešením předchozí rovnice. Lze pak snadno najít konstantní řešení $y(x) = k$ pro $k = -\frac{s}{r}$.

# Nelineární model prvního řádu

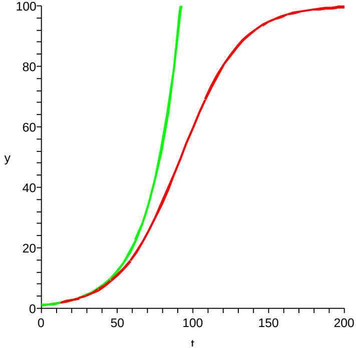
U diferenčních rovnic jsme diskutovali tzv. logistický model populačního růstu založený na předpokladu, že poměr změny velikosti populace $p(n+1) - p(n)$ a její velikosti $p(n)$ je v afinní závislosti na samotné velikosti populace.
Nyní bychom tentýž vztah pro spojitý model patrně formulovali pro populaci $p(t)$ závislou na čase $t$ jako

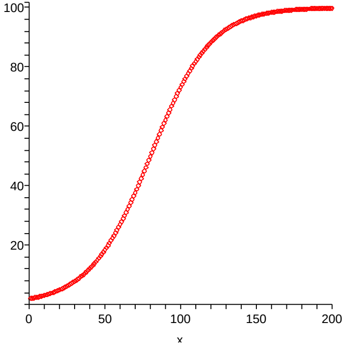
$$p'(t) = p(t)\left(-\frac{r}{K}p(t) + r\right),$$

tj. při hodnotě $p(t) = K$ pro velkou konstantu $K$ je přírůstek nulový, zatímco pro $p(t)$ blízké nule je poměr rychlosti růstu populace k její velikosti blízký $r$ (což je malé číslo v řádu setin vyjadřující rychlost růstu populace za dobrých podmínek.)
Derivováním lze přímo ověřit, že následující funkce je řešením pro každou konstantu $C$

$$p(t) = \frac{K}{1 + CK\,\mathrm{e}^{-rt}}.$$

# Srovnání diskrétního a spojitého modelu




Srovnáním červeného grafu řešení s $K = 100$, $r = 0,05$ a $C = 1$ (volba $C$ odpovídá $p(0) = 1$) s řešením diferenční rovnice (napravo) vidíme, že skutečně oba přístupy k modelování populací dávají docela podobné výsledky. Pro srovnání je do levého obrázku zeleně vkreslen řešení Malthusiánského modelu s odpovídajícími daty.

**Definition**

Diferenciální rovnice prvního řádu je

$$F(y'(x), y(x), x) = 0$$

s nějakou pevnou funkcí $F$, která každé trojici reálných čísel přiřadí jedno reálné číslo.

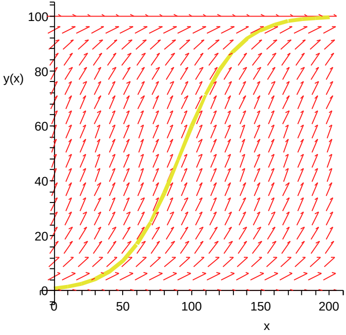
Zápis připomíná implicitně zadané funkce $y(x)$, nicméně navíc je tu závislost na derivaci hledané funkce $y(x)$.
Obvykle pracujeme s rovnicemi, které jsou vyřešeny vzhledem k derivaci, tj.

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

dále se omezíme jen na tento případ.

Taková rovnice zadává pro každou hodnotu $(x, y)$ v rovině vektor $(1, f(x, y))$, tj. rychlost se kterou nám rovnice grafu řešení přikazuje pohybovat se rovinou. Např. pro logistický model

$$p'(t) = p(t)\left(-\frac{r}{K}p(t) + r\right)$$




Intuitivně lze na základě takových obrázků očekávat, že pro každou počáteční podmínku bude existovat právě jedno řešení naší rovnice.

Existence i jednoznačnost řešení skutečně platí pro všechny rozumné funkce $f$, my si výsledek sformulujeme pro dosti velkou třídu rovnic takto:

**Theorem (O existenci a jednoznačnosti řešení ODE)**

*Nechť funkce $f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ má spojité parciální derivace. Pak pro každý bod $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ existuje interval $[x_0-a,x_0+a]$, s $a\in\mathbb{R}$ kladným, a právě jedna funkce $y(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, která je řešením rovnice*

$$y'(x)=f(x,y(x)).$$

# Náznak důkazu

Funkce $y(x)$ je řešením naší rovnice tehdy a jen tehdy, když

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} y'(x)\,dx = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx.$$

Pravá strana tohoto výrazu je ovšem, až na konstantu, integrální operátor

$$L(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx$$

a při řešení diferenciální rovnice hledáme pevný bod pro tento operátor $L$, tj. chceme najít funkci $y = y(x)$ s $L(y) = y$. Důkaz spočívá v odhadu, že pro dostatečně malý interval kolem $x_0$ bude takový operátor zmenšovat vzdálenost funkcí. Z obecné věty o kontrakci pak vyplývá hledané tvrzení.

Užitečným typem rovnic, pro který známe elementární postup k řešení jsou tzv. *rovnice se separovanými proměnnými*:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$$

pro dvě dostatečně hladké funkce jedné reálné proměnné $f$ a $g$. Obecné řešení tu lze získat integrací, tj. nalezením primitivních funkcí

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}, \quad F(x) = \int f(x) dx.$$

Pak totiž spočtením funkce $y(x)$ z implicitně zadaného vztahu $F(x) + C = G(y)$ s libovolnou konstantou $C$ vede k řešení. Skutečně, derivováním této rovnosti (s použitím pravidla pro derivování složené funkce $G(y(x))$ dostaneme skutečně $\frac{1}{g(y)} \cdot y'(x) = f(x)$.

# Příklad rovnice

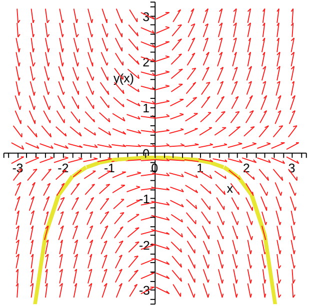
Najdeme řešení rovnice

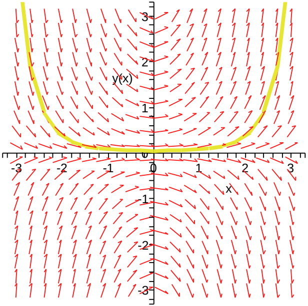
$$y'(x) = x \cdot y(x).$$

Přímým výpočtem dostaneme $\ln |y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C$. Odtud to vypadá (alespoň pro kladná $y$) na

$$y(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2 + C} = D \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2},$$

kde $D$ je nyní libovolná kladná konstanta.
Ve skutečnosti dostaneme všechna řešení, když uvážíme všechna reálná $D$



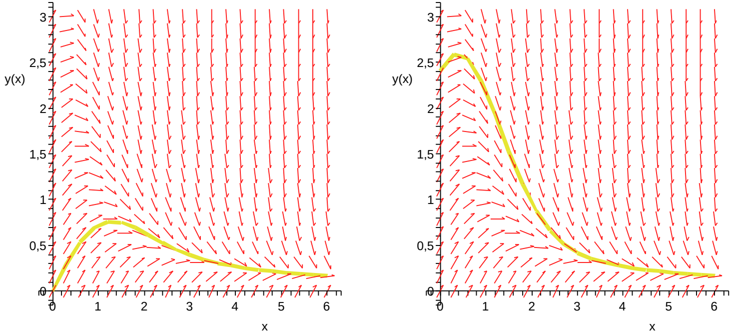




Na obrázku jsou vynesena dvě řešení, která ukazují na nestabilitu rovnice vůči počátečním podmínkám: Jestliže pro libovolné $x_0$ volíme $y_0$ blízké nule, pak se nám dramaticky mění chování výsledného řešení. Navíc si povšimněme konstatního řešení $y(x) = 0$, které odpovídá počáteční podmínce $y(x_0) = 0$.

Jestliže lehce pozměníme rovnici na

$$y'(x) = 1 - x \cdot y(x),$$

narazíme naopak na stabilní chování viditelné na následujícím obrázku. Tuto rovnici už ale neumíme řešit pomocí separace proměnných.




Zato umíme stejným postupem řešit logistický model populace.

Na řešení rovnice $y'(x) = f(x, y)$ lze také pohlížet jako na hledání (parametrizované) křivky $(x(t), y(t))$ v rovině, kde jsme již předem pevně zvolili parametrizaci proměnné $x(t) = t$. Takto můžeme nejen zapomenout na tuto pevnou volbu pro jednu proměnnou $x$, nýbrž hlavně přibrat libovolný počet proměnných.
Například v rovině můžeme psát takový systém ve tvaru

$$x'(t) = f(t, x(t), y(t)), \quad y'(t) = g(t, x(t), y(t))$$

se dvěmi funkcemi $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se spojitými derivacemi. Obdobně pro více proměnných.

Jednoduchým příkladem v rovině může sloužit systém rovnic

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = x(t).$$

Snadno lze uhádnout (nebo aspoň ověřit), že řešením takového systému je

$$x(t) = R\cos t, \quad y(t) = R\sin t$$

s libovolnou nezápornou konstantou $R$ a křivky řešení budou právě parametrizované kružnice o poloměru $R$.
Na takové systémy umíme přímo rozšířit platnost věty o jednoznačnosti a řešení:

## Theorem (O existenci a jednoznačnosti řešení systémů ODE)

*Nechť funkce* $f_i(t, x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ *všechny mají spojité parciální derivace. Pak pro každý bod* $(t_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^2$ *existuje interval* $[t_0 - a, t_0 + a]$, *s* $a \in \mathbb{R}$ *kladným, a právě jedna funkce* $y(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, *která je řešením systému rovnic*

$$x_1'(x) = f_1(t, x_1(t), \ldots, x_n(x)), \ldots, x_n'(x) = f_n(t, x_1(t), \ldots, x_n(x))$$

*s počáteční podmínkou*

$$x_1(t_0) = z_1, \ldots, x_n(t_0) = z_n.$$

Ve skutečnosti je možné se omezit na tzv. **autonomní systémy rovnic**, tj. ty kde pravá strana není explicitně závislá na čase $t$. Obecný případ ve větě se z nich dostane stejným způsobem, jako jsme pracovali v rovině s jednou rovnicí $y'(x) = f(x, y)$.

Poslední systém dvou autnomních rovnic, jehož řešení jsou parametrizované kružnice je dobrým příkladem.
Samotný systém rovnic (a každý obecný také) si pak můžeme představit jako „pole vektorů“ v rovině, prostoru atd., které udává „tok prostředí“. Řešením je pak křivka, která odpovídá skutečnému toku jedné „částečky“ tohoto prostředí.

# Model „Lotka – Voltera“ pro dravce a kořist

Jako o něco složitější příklad si uveďme klasický populační model „dravec – kořist“, který zavedli ve dvacátých létech minulého století pánové Lotka a Volterra.

Označíme $x(t)$ vývoj počtu jedinců v populaci kořisti a $y(t)$ totéž pro dravce. Přepokládáme, že přírůstek kořisti by se řídil Malthusiánským modelem (tj. exponenciální růst), kdyby nebyli loveni. U dravce naopak očekáváme, že by bez kořisti pouze přirozeně vymíral (tj. exponenciální pokles stavů). Přitom ale ještě musíme uvážit interakci dravce s kořistí, kterou očekáváme přímo úměrnou počtu obou. Dostáváme tak tzv. Lotka–Volterra model

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \alpha x(t) - \beta y(t)x(t)\\
y'(t) &= -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t)
\end{aligned}
$$

Operace derivování je lineární zobrazení z (dostatečně) hladkých funkcí do funkcí. Pokud derivace $(\frac{d}{dx})^j$ jednotlivých řádů $j$ vynásobíme pevnými funkcemi $a_j(x)$ a výrazy sečteme, dostaneme tzv. *lineární diferenciální operátor*:

$$y(x) \mapsto D(y)(x) = a_k(x)y^{(k)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0 y(x).$$

Řešit příslušnou *homogenní lineární diferenciální rovnici* pak znamená najít funkci $y$ splňující $D(y) = 0$, tj. obrazem je identicky nulová funkce.
Ze samotné definice je zřejmé, že součet dvou řešení bude opět řešením, protože pro libovolné funkce $y_1$ a $y_2$ platí

$$D(y_1 + y_2)(x) = D(y_1)(x) + D(y_2)(x).$$

Obdobně je také konstantní násobek řešení opět řešením. Celá množina všech řešení lineární diferenciální rovnice $k$-tého řádu je tedy vektorovým prostorem.

Přímou aplikací předchozí věty o jednoznačnosti a existenci řešení rovnic dostáváme:

**Corollary**

*Vektorový prostor všech řešení homogenní lineární diferenciální rovnice $k$–tého řádu je vždy dimenze $k$. Proto můžeme vždy řešení zadat jako lineární kombinaci libovolné množiny $k$ lineárně nezávislých řešení. Taková řešení jsou zadána jednoznačně lineárně nezávislými počátečními podmínkami na hodnotu funkce $y(x)$ jejích prvních $(k-1)$ derivací.*

Zkusme si popsat jednoduchý model pro pohyb nějakého tělesa upnutého k jednomu bodu silnou pružinou. Je-li $y(t)$ výchylka našeho tělesa od bodu $y_0 = y(0) = 0$, pak lze uvažovat, že zrychlení $y''(t)$ v čase $t$ bude úměrné velikosti výchylky, avšak s opačným znaménkem. Dostáváme tedy tzv. rovnici oscilátoru

$$y''(t) = -y(t).$$

Tato rovnice odpovídá systému rovnic

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = x(t).$$

Řešením takového systému je

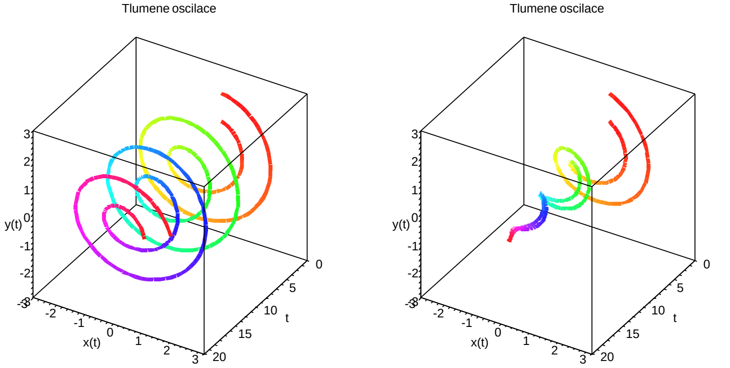
$$x(t) = R\cos(t - \tau), \quad y(t) = R\sin(t - \tau)$$

s libovolnou nezápornou konstantou $R$, která určuje maximální amplitudu, a konstantou $\tau$, která určuje fázový posun.
Pro určení jednoznačného řešení potřebujeme proto znát nejen počáteční polohu $y_0$, nýbrž také rychlost pohybu v tomto okamžiku.
Těmito dvěma údaji bude určena jak amplituda tak fázový posun jednoznačně.
Předpokládejme, že vlivem vlastností materiálu pružiny bude také působit síla úměrná okamžité rychlosti pohybu našeho objektu, s opačným znaménkem než amplituda.

To vyjádříme dodatečným členem s první derivací a naše rovnice je

$$y''(t) = -y(t) - \alpha y'(t),$$

kde $\alpha$ je konstanta, která vyjadřuje velikost tlumení. Na obrázku jsou fázové diagramy pro řešení s dvěmi různými počátečními podmínkami. Nalevo je nulové tlumení, napravo je $\alpha = 0.3$




Samotné oscilace jsou vyjádřeny hodnotami na ose $y$, hodnoty $x$ zobrazují rychlost pohybu.

Připomeňme homogenními lineární diferenční rovnice. Analogie jde i dále v okamžiku, kdy jsou všechny koeficienty $a_j$ diferenciálního operátoru $D$ konstantní. Už jsme viděli u takové rovnice prvního řádu, že řešením je exponenciála s vhodnou konstantou u argumentu. Stejně jako u diferenčních rovnic se podbízí vyzkoušet, zda takový tvar řešení $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ s neznámým parametrem $\lambda$ může splnit rovnici $k$–tého řádu. Dosazením dostaneme

$$D(\mathrm{e}^{\lambda x}) = \left(a_k \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0(x)\right) \mathrm{e}^{\lambda x}\,.$$

Parametr $\lambda$ tedy vede na řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty tehdy a jen tehdy, když je $\lambda$ kořenem tzv. *charakteristického polynomu* $a_k\lambda^k + \cdots + a_1\lambda + a_0$.

Pokud má charakteristický polynom $k$ různých kořenů, dostáváme bázi celého vektorového prostoru řešení. Pokud je $\lambda$ násobný kořen, přímým výpočtem s využitím toho, že je pak také kořenem derivace charakteristického polynomu, dostaneme, že je řešením i funkce $x\,\mathrm{e}^{\lambda x}$. Podobně pak pro vyšší násobnost $\ell$ dostáváme $\ell$ různých řešení $\mathrm{e}^{\lambda}, x\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \dots, x^{\ell}\,\mathrm{e}^{\lambda x}$.

U obecné lineární diferenciální rovnice předepisujeme nenulovou hodnotu diferenciálního operátoru $D$. Opět úplně analogicky k úvahám o systémech lineárních rovnic nebo u lineárních diferenčních rovnic přímo vidíme, že obecné řešení takovéto (nehomogenní) rovnice

$$D(y)(x) = b(x)$$

pro nějakou pevně zadanou funkci $b(x)$ je součtem jednoho jakéhokoliv řešení této rovnice a množiny všech možných řešení příslušné homogenní rovnice $D(y)(x) = 0$. Celý prostor řešení je tedy opět pěkný konečněrozměrný afinní prostor, byť ukrytý v obrovském prostoru funkcí.

Kromě tak jednoduchých rovnic, jako jsou ty lineární s konstantními koeficienty se v praxi většinou setkáváme s postupy, jak přibližně spočíst řešení rovnice, se kterou pracujeme.
Už jsme podobné úvahy dělali všude tam, kde jsme se zabývali aproximacemi (tj. zejména lze doporučit porovnání s dřívějšími odstavci o splajnech, Taylorových polynomech a Fourierových řadách). S trochou odvahy můžeme také považovat diferenční a diferenciální rovnice za vzájemné aproximace. V jednom směru nahrazujeme diference diferenciály (např. u ekonomických nebo populačních modelů), ve druhém pak naopak.
Zastavíme se na chvilku u nahrazování derivací diferencemi. Nejdříve si však připomeneme obvyklé značení pro zápis odhadů chyb.

## Definition

Pro funkci $f(x)$ v proměnné $x$ řekneme, že je v okolí hromadného bodu $x_0$ svého definičního oboru **řádu velikosti** $O(\varphi(x))$ pro nějakou funkci $\varphi(x)$, jestliže existuje okolí $U$ bodu $x_0$ a konstanta $C$ taková, že

$$|f(x)| \leq C \cdot |\varphi(x)|$$

pro všechny $x \in U$. Limitní bod $x_0$ bývá často i nevlastní hodnota $\pm\infty$.

Nejobvyklejší příklady jsou $O(x^p)$ pro **polynomiální řád velikosti** a to v nule nebo v nekonečnu, $O(\ln x)$ pro **logaritmický řád velikosti** v nekonečnu atd. Všimněme si, že logaritmický řád velikosti nezávisí na volbě základu.
Dobrým příkladem je aproximace funkce jejím Taylorovým polynomem řádu $k$ v bodě $x_0$. Taylorova věta pro funkce jedné proměnné říká, že chyba této aproximace je $O(h^{k+1})$, kde $h$ je přírůstek argumentu $x - x_0 = h$.
Podobné úvahy jsme dělali i u Fourierových řad.

V případě obyčejných diferenciálních rovnic je nejjednodušším schématem aproximace tzv. Eulerovými polygony. Budeme ji prezentovat pro jednu obyčejnou rovnici s jednou nezávislou a jednou závislou veličinou. Úplně stejně ale funguje pro systémy rovnic, když skalární veličiny a jejich derivace v čase $t$ nahradíme vektory závislé na času a jejich derivacemi.
Uvažujme tedy opět rovnici (pro jednoduchost a bez újmy na obecnosti prvního řádu)

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Označme si diskrétní přírůstek času $h$, tj. $t_n = t_0 + nh$, a $y_n = y(t_n)$. Z Taylorovy věty (se zbytkem druhého řádu) a naší rovnice vyplývá, že

$$y_{n+1} = y_n + y'(t_n)h + O(h^2) = y_n + f(t_n, y_n)h + O(h^2).$$

Jestliže tedy od $t_0$ do $t_n$ uděláme $n$ takových kroků o přírůstek $h$, bude očekávaný odhad celkové chyby vyplývající z lokálních nepřesností naší lineární aproximace nejvýše $hO(h^2)$, tj. chyba bude v řádu velikosti $O(h)$. Ve skutečnosti vstupují při výpočtu do hry ještě zaokrouhlovací chyby.

Při numerickém řešení Eulerovou metodou postupujeme tak, že za přibližné řešení považujeme po částech lineární polygon definovaný výše.