PB165 – Grafy a sítě

Kostry grafu

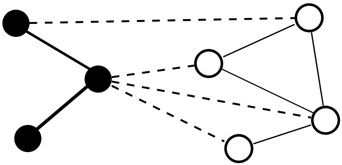
Obsah přednášky

Terminologický úvod

Definice

Stromem v grafu G rozumíme podgraf grafu G, který je stromem. Hrany a vrcholy, které do tohoto stromu náleží, nazýváme stromové. V opačném případě se hrana zve nestromová. Hranu, jejíž jeden krajní vrchol je součástí stromu T v neorientovaném grafu, budeme značit jako okrajovou hranu stromu T. Je-li graf orientovaný, značíme hranu jako okrajovou pokud je součástí stromu T její počáteční vrchol.

Obrázek: Strom v grafu je vyznačen plnými vrcholy a tučnými hranami, okrajové hrany čárkovaně.



Růst stromu v grafu

Věta

Je-li G graf a T strom v G, potom graf vzniklý z T přidáním jeho libovolné okrajové hrany je také stromem.

Důkaz.

Jelikož hrana má alespoň jeden ze svých koncových vrcholů v T, existuje cesta z přidaného vrcholu do všech vrcholů T a graf zůstává spojitý.

Přidaná hrana má mezi vrcholy stromu T zároveň nejvýše jeden vrchol. Nemůže tedy žádným způsobem vzniknout cyklus a graf zůstává i acyklický, tedy strom. $\square$

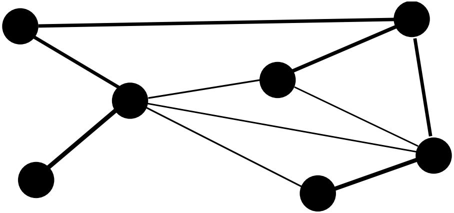
Kostra grafu

Definice

Kostra grafu G je takový strom T v grafu G, pro který platí $V(T) = V(G)$.

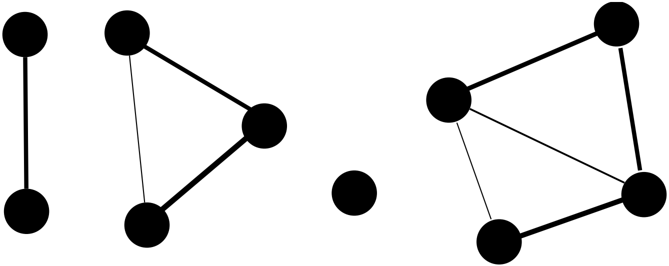
- Graf může mít více než jednu kostru.
- Každý acyklický podgraf grafu G je obsažen v alespoň jedné kostře grafu G.

Obrázek: Kostra je vyznačena tučnými hranami.



Kostra komponent grafu

Graf může mít kostru zřejmě jen v případě, že je souvislý. Pokud souvislý není, mohou ale mít kostru jeho komponenty souvislosti. Kostra nesouvislého grafu je tedy lesem, nikoliv stromem, přičemž každý jeho strom je kostrou jedné komponenty grafu.



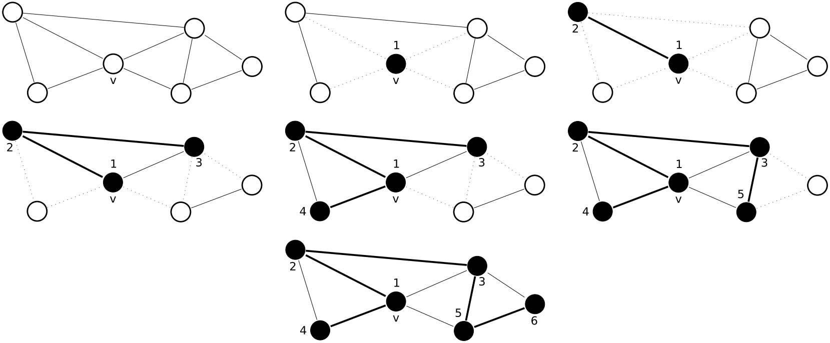
Budování stromu v grafu

Vstupem algoritmu je graf G a jeho vrchol v. Výstupem je graf s očíslovanými (přirozenými čísly ohodnocenými) vrcholy $1, \dots, n$.

```
inicializuj strom T jako vrchol v.
Nastav počítadlo vrcholů na 1 a označ vrchol v,
Dokud strom T neobsahuje všechny vrcholy komponenty,
jíž je podgrafem:
  Vyber okrajovou hranu e.
  Nechť u je její vrchol, který není součástí stromu.
  Přidej vrchol u a hranu e do stromu T.
  Zvyš hodnotu počítadla vrcholů o 1.
  Očísluj vrchol u.
Vrať strom T.
```

Budování stromu v grafu – příklad

Obrázek: Růst stromu. Výstupní strom T je vyznačen tučně, okrajové hrany čárkovaně.

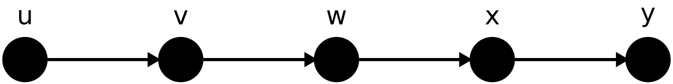


Budování stromu v grafu – vlastnosti

- Výběr okrajové hrany musí být proveden podle deterministického pravidla, aby výstup byl jednoznačný.
- Hranám je přidělena priorita a do grafu je přidána vždy ta s prioritou nejvyšší.
- Je-li algoritmus spuštěn z počátečního vrcholu v, strom T složený z očíslovaných vrcholů a stromových hran je kostrou komponenty grafu G, jíž je vrchol v součástí.
- Graf je spojitý právě když algoritmus budování stromu připojí všechny vrcholy tohoto grafu.

Budování stromu v orientovaném grafu

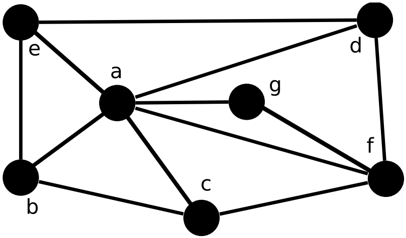
Algoritmus budování stromu v orientovaném grafu je stejný jako v případě grafu neorientovaného. Výstupní stromy se ovšem mohou lišit počtem vrcholů v závislosti na tom, který vrchol je vybrán jako počáteční.



Výstup algoritmu budování stromu v orientovaném grafu na obrázku se bude lišit v závislosti na vybraném počátečním vrcholu.

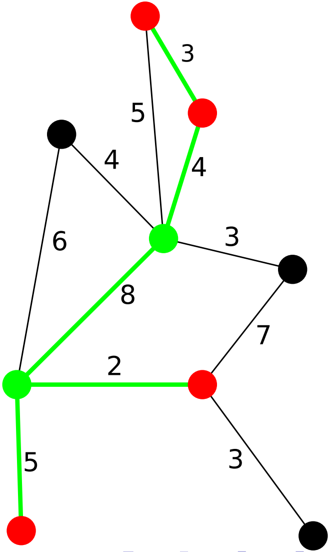
Strom v grafu – cvičení

1. Nakreslete výstup algoritmu budování stromu v grafu, je-li vstupem graf na obrázku. Priorita hran je určena lexikografickým pořadím sestupně (lexikograficky menší hrana má vyšší prioritu) a výpočet začíná ve vrcholu:
   1. *a*
   2. *c*



Steinerův strom

- Problém v nezáporně hranově ohodnoceném grafu
- Nalezení minimálního spojitého podgrafu obsahujícího *podmnožinu* vrcholů
- Ve většině variant *NP-úplný*, v praxi heuristiky



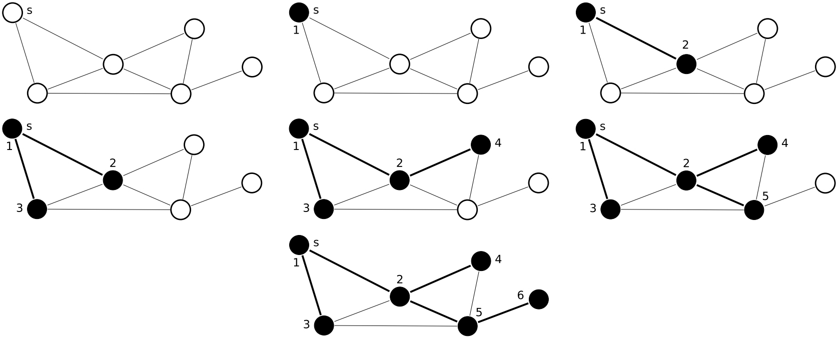
Průchod grafem do šířky

- BFS (Breadth-First Search)
- Předpokládáme, že vstupem je souvislý neorientovaný graf.
- Slouží k prohledání a navštívení všech vrcholů grafu.
- Vrcholy jsou navštěvovány v pořadí podle vzdálenosti od počátečního vrcholu.
- Nalezne nejkratší cestu z počátečního vrcholu do všech ostatních.
- Při průchodu grafem je budován strom cest do všech jeho vrcholů.
- Pro implementaci algoritmu se používá fronta.

Průchod grafem do šířky

```
Inicializuj strom T vrcholem v.
Nastav dist[v] = 0, dist[x]=nedosažitelný pro x != v.
Inicializuj množinu okrajových hran jako prázdnou.
Inicializuj počítadlo vrcholů na 1 a označ jím vrchol v.
Dokud nejsou označeny všechny vrcholy, opakuj:
  Aktualizuj seznam okrajových hran.
  Vyber okrajovou hranu e, jež vychází z očíslovaného
    vrcholu w s nejnižším možným číslem.
  Přidej hranu e a její koncový vrchol u do stromu T.
  Zvyš počítadlo vrcholů o 1.
  Očísluj přidaný vrchol u.
  Nastav dist[u] = dist[w] + 1.
Vrať strom T.
```

Průchod do šířky – příklad



Implementace průchodu do šířky

```
Inicializuj strom T vrcholem v.
Nastav dist[v] = 0, dist[x] = -1 pro x != v.
Inicializuj frontu vrcholů jako prázdnou a vlož v.
Inicializuj počítadlo vrcholů na 1 a označ jím vrchol v.
Dokud jsou ve frontě nějaké vrcholy, opakuj:
  Z počátku fronty odeber vrchol w.
  Dokud je e hrana vycházející z w do x:
    Je-li x neočíslovaný:
      Zvyš počítadlo vrcholů o 1.
      Očísluj x.
      Nastav dist[x] = dist[w] + 1.
      Přidej x na konec fronty.
      Přidej vrchol x a hranu e do T.
Vrať strom T.
```

Průchod do šířky – vlastnosti

Nechť u, v jsou vrcholy v grafu G. Vzdálenost vrcholů u, v (počet hran na nejkratší cestě mezi těmito vrcholy) budeme značit $\delta(u, v)$. Neexistuje-li cesta mezi těmito vrcholy, klademe $\delta(u, v) = \infty$.

Lemma 1

Nechť (u, v) je hrana v grafu G. Potom platí

$$\forall s \in V(G) : \delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$$

Důkaz.

- Pokud do některého z vrcholů u, v neexistuje z s cesta, neexistuje cesta ani do druhého z nich a platí rovnost.
- Nechť z vrcholu s do vrcholu u vede cesta p délky k. Potom existuje cesta z s do v složená z p a hrany (u, v). Délka této cesty je právě $k + 1$ a nerovnost tedy platí. Může ovšem existovat i cesta kratší.

$\square$

Průchod do šířky – vlastnosti

Lemma 2

Po skončení algoritmu BFS s počátečním vrcholem s platí

$$\forall v \in V(G) : \mathrm{dist[v]} \geq \delta(s, v)$$

Důkaz.

Důkaz je veden indukcí k počtu vložení vrcholů do fronty:

- Tvrzení zřejmě platí po vložení počátečního vrcholu s do fronty.
- Uvažujme vkládání do fronty vrcholu x, do nějž vede hrana z w. Z indukčního předpokladu $\mathrm{dist[w]} \geq \delta(s, w)$ a Lemmatu 1 plyne:

$$\mathrm{dist[x]} = \mathrm{dist[w]} + 1 \geq \delta(s, w) + 1 \geq \delta(s, x)$$

□

Průchod do šířky – vlastnosti

Lemma 3

Pro vrcholy $< v_1, \ldots, v_k >$ fronty v BFS platí

$$\mathrm{dist}[v_k] \leq \mathrm{dist}[v_1] \wedge \mathrm{dist}[v_i] \leq \mathrm{dist}[v_{i+1}]$$

Důkaz.

Indukcí k počtu operací vkládání a odebírání na frontě:

- Po vložení počátečního vrcholu zřejmě tvrzení platí.
- Indukční krok: odebráním vrcholu se platnost tvrzení změnit nemůže. Pokud $\mathrm{dist}[v_1] = \mathrm{dist}[v_k]$, pak po odebrání $\mathrm{dist}[v_1]$ jsou přidány vrcholy o vzdálenosti rovné $\mathrm{dist}[v_k] + 1$.
V druhém případě, kdy $\mathrm{dist}[v_1] + 1 = \mathrm{dist}[v_k]$, jsou po odebrání $\mathrm{dist}[v_1]$ přidány vrcholy o vzdálenosti rovné $\mathrm{dist}[v_k]$.

$\square$

Průchod do šířky – důkaz

Věta

Po skončení algoritmu BFS s počátečním vrcholem s na grafu G jsou očíslovány všechny vrcholy dosažitelné z s a v poli `dist` *jsou hodnoty $\delta(s, v)$.*

Důkaz.

Pro nedosažitelné vrcholy tvrzení zřejmě platí. Označme V_k množinu vrcholů, pro něž $\delta(s, v) = k$. Dokážeme, že pro každý vrchol v jsou následující kroky provedeny právě jednou:

1. Očíslování vrcholu.
2. Nastavení `dist[v]`
3. Vložení v do fronty.

Důkaz bude veden indukcí ke k.

Průchod do šířky – důkaz

Důkaz - pokračování.

- Pro $k = 0$, tedy počáteční vrchol, jsou tyto kroky provedeny jedinkrát při inicializaci.
- Indukční krok: Fronta se před skončením výpočtu nikdy nevyprázdní a poté, co je do ní vrchol vložen, se jeho vypočtená vzdálenost ani očíslování nemění. Uvažujme libovolný vrchol $v \in V_k, k \geq 1$. Z lemmat 2 a 3 plyne, že vrchol v může být navštíven až poté, co jsou do fronty přidány všechny vrcholy z množiny V_{k-1}. Jelikož $\delta(s, v) = k$, existuje na cestě z s do v vrchol $u \in V_{k-1}$ takový, že existuje hrana (u, v). Nechť u je první takový vrchol přidaný do fronty. Potom je vrchol v objeven právě z vrcholu u a platí `dist[v]` $=$ `dist[u]` $+ 1$.

Průchod do šířky – složitost

Každou hranu "projdeme" právě jednou a všechny vrcholy také navštívíme právě jednou. Při vhodné implementaci fronty, která umožňuje přidávání a odebírání vrcholů v konstantním čase, je tedy časová složitost BFS $O(|V| + |E|)$.

Poznámka

Prezentovaný algoritmus lze snadno upravit tak, aby krom výpočtu vzdálenosti od počátečního vrcholu s vypočítal i jeho předchůdce na nejkratší cestě z s.

Průchod grafem do hloubky

- DFS – Depth First Search
- Namísto postupného procházení vrcholů od nejbližších ke kořeni postupuje algoritmus do hloubky – dokud je to možné, vybere vždy hranu vedoucí dále z vrcholu, do kterého právě vstoupil. Poté se vrací stromem ke kořenu – "backtrackuje".
- Algoritmus i jeho implementace velice podobné BFS – stejná časová složitost.
- Projde všemi vrcholy grafu.
- Vstupem je rovněž neorientovaný souvislý graf
- Nenalezne nejkratší cesty do vrcholů.
- DFS vhodnější pro prohledávání stavových prostorů a heuristiky.
- K implementaci se používá zásobník.

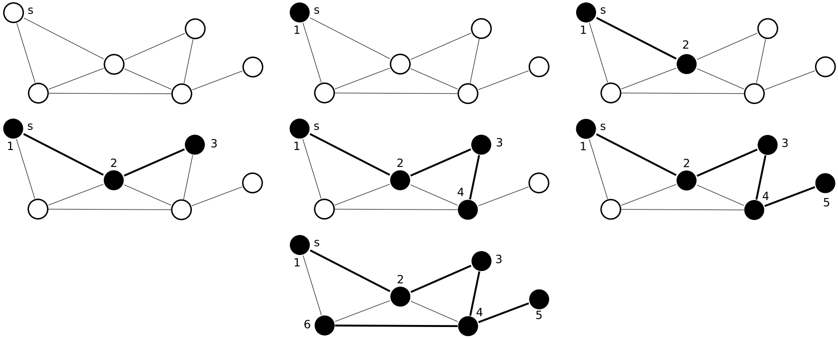
Průchod grafem do hloubky

```
Inicializuj strom T vrcholem v.
Inicializuj množinu okrajových hran jako prázdnou.
Inicializuj počítadlo vrcholů na 1 a označ jím vrchol v.
Dokud nejsou označeny všechny vrcholy, opakuj:
  Aktualizuj seznam okrajových hran.
  Vyber okrajovou hranu e, jež vychází z očíslovaného
    vrcholu w s nejvyšším možným číslem.
  Přidej hranu e a její koncový vrchol u do stromu T.
  Zvyš počítadlo vrcholů o 1.
  Očísluj přidaný vrchol u.
Vrať strom T.
```

Průchod do hloubky – implementace

```
Inicializuj strom T vrcholem v.
Inicializuj zásobník vrcholů jako prázdný a vlož v.
Inicializuj počítadlo vrcholů na 1 a označ jím vrchol v.
Dokud jsou v zásobníku nějaké vrcholy, opakuj:
  Z vrcholu zásobníku odeber vrchol w.
  Dokud je e hrana vycházející z w do x:
    Je-li x neočíslovaný:
      Zvyš počítadlo vrcholů o 1.
      Očísluj x.
      Přidej x na vrchol zásobníku.
      Přidej vrchol x a hranu e do T.
Vrať strom T.
```

Průchod do hloubky – příklad



Průchod do hloubky – vlastnosti

Věta

Nechť T je strom, jenž je výstupem běhu DFS na grafu G, a e hrana z G, která nepatří do stromu T. Nechť x, y jsou koncové vrcholy hrany e a platí, že x je algoritmem označen nižším číslem než y. Potom y je následníkem vrcholu x ve stromu T.

Důkaz.

Vrchol y byl algoritmem zřejmě navštíven později než x. Při vstupu algoritmu do x je hrana (x, y) označena jako okrajová. Vrchol y je však očíslován dříve než algoritmus vrchol x definitivně "opustí"– y je tedy následníkem vrcholu x. $\square$

Průchod grafem – cvičení

1. Pro graf z předchozího cvičení a počáteční vrchol b nakreslete výstup včetně očíslování
    1. průchodu do šířky.
    2. průchodu do hloubky.
2. Charakterizujte grafy, jejichž výstupní strom včetně očíslování je shodný v případě průchodu do šířky i do hloubky.
3. Upravte algoritmus BFS, aby u každého vrcholu uložil i jeho předchůdce na cestě z počátečního vrcholu.

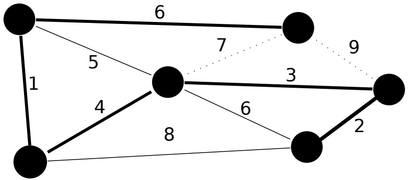
Minimální kostra grafu

Definice

Nechť G je souvislý graf s ohodnocenými hranami. Kostra grafu G, jejíž součet ohodnocení všech hran je nejnižší, se nazývá minimální kostra grafu G.

- Nalezení nejlevnější, ale neredundantní, počítačové či např. elektrické sítě spojující všechny koncové a aktivní prvky, resp. přípojná místa.
- Speciální případ Steinerova stromu

Obrázek: Minimální kostra je vyznačena tučně.



Primův algoritmus

- Hledání minimální kostry.
- Neprohledává systematicky všechny kostry grafu.
- Začíná v libovolném vrcholu a buduje strom.
- Nejvyšší prioritu mají hrany s nejnižším ohodnocením.
- Stále existuje jen jedna komponenta minimální kostry, která postupně roste.
- Složitost závisí na datové struktuře ukládající okrajové hrany:

Matice sousednosti	$\mathcal{O}(V^2)$
Binární halda	$\mathcal{O}(Elog(V))$
Fibonacciho halda	$\mathcal{O}(E + Vlog(V))$

Primův algoritmus

```
Vyber libovolný vrchol s vstupního grafu.
Inicializuj výstupní strom T vrcholem s.
Inicializuj množinu okrajových hran jako prázdnou.
Dokud T neobsahuje všechny vrcholy:
  Aktualizuj množinu okrajových hran.
  Nechť e je okrajová hrana s nejnižším ohodnocením
    a její koncový vrchol v nepatřící do T.
  Přidej vrchol v a hranu e do stromu T.
Vrať strom T.
```

Primův algoritmus – důkaz

Věta

Výstupní strom T_k vytvořený k iteracemi Primova algoritmu je podstromem minimální kostry grafu.

Důkaz.

Indukcí přes k:

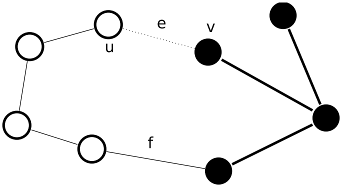
1. Pro $k = 0$ patří do grafu jen vrchol s.
2. Nechť T_k je podstromem minimální kostry T a strom T_{k+1} vznikne přidáním hrany e s minimálním ohodnocením, jejíž vrchol u patří do T_k a v nikoliv.

$\square$

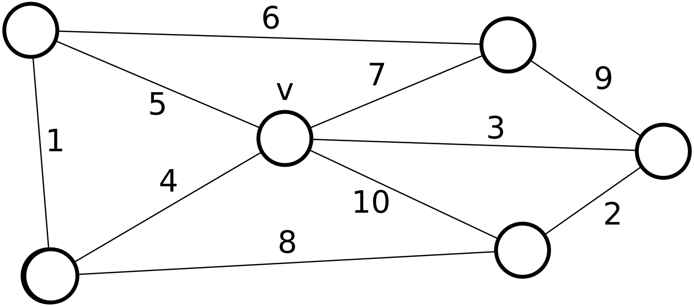
Primův algoritmus – důkaz

Důkaz – pokračování

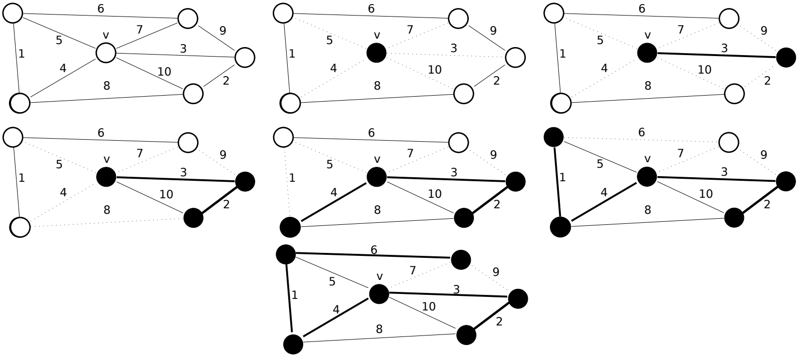
Pokud T obsahuje hranu e, je T_{k+1} podstromem minimální kostry. V případě, že hrana e do minimální kostry nepatří, existuje v grafu $T + e$ (minimální kostra s přidanou hranou e) cyklus hranou e procházející. Nechť f je první hrana na "delší" cestě mezi vrcholy u, v taková, že nepatří do T_k. Potom je i f okrajová hrana stromu T_k, ale má nižší prioritu (tudíž vyšší ohodnocení) než hrana e. Nahradíme-li tedy v T hranu f hranou e, celková váha se nezvýší a vzniklá kostra bude minimální.



Primův algoritmus – příklad



Primův algoritmus – příklad



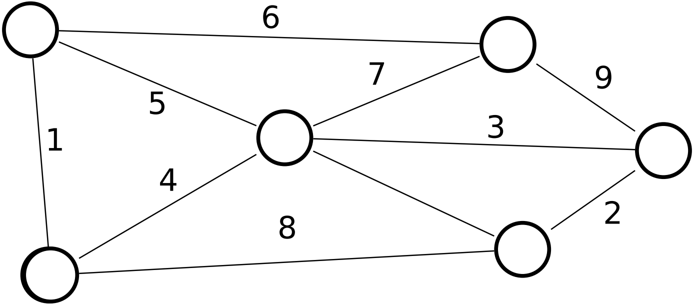
Kruskalův algoritmus

- Druhý algoritmus pro hledání minimální kostry grafu.
- Nepostupuje cestou budování stromu, naopak vzniká les.
- Přidává hrany seřazené vzestupně podle jejich ohodnocení.
- Při použití vhodných datových struktur časová složitost $\mathcal{O}(Elog(V))$.

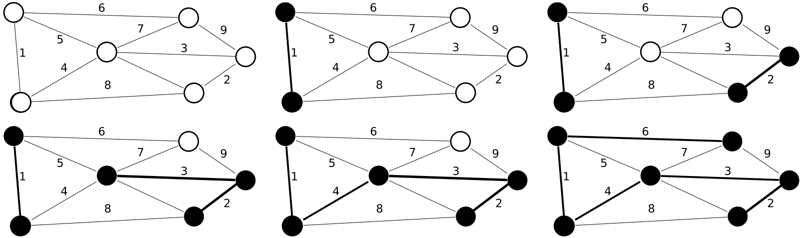
Kruskalův algoritmus

```
Setřid' hrany grafu G vzestupně podle ohodnocení.
Inicializuj seznam komponent souvislosti všemi vrcholy.
Dokud je ve výstupním stromu T více než 1 komponenta:
  Vyber hranu s nejnižším ohodnocením, která spojuje
    vrcholy ležící v různých komponentách.
  Přidej tuto hranu do výstupního stromu T.
  Aktualizuj seznam komponent.
Vrat' strom T.
```

Kruskalův algoritmus – příklad



Kruskalův algoritmus – příklad



Borůvkův algoritmus

- Vznik roku 1926 pro návrh efektivní elektrické sítě, znovuobjeven 1938, 1951 a v 60. letech
- Vycházel z něj Kruskal při návrhu svého algoritmu.
- Metoda budování lesa (stejně jako Kruskalův alg.)
- Komponenty lesa rostou stejným způsobem jako v Primově algoritmu, ale paralelně
- Velmi rychlý růst kostry
- Omezení: žádné dvě hrany v grafu nesmějí mít stejné ohodnocení

Cvičení:

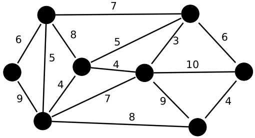
- Proč nesmějí mít dvě hrany v grafu stejné ohodnocení?
- Co se může stát, když mají? Musí se to stát vždy?
- Jak můžeme algoritmus upravit, aby toto omezení neměl?

Borůvkův algoritmus – pseudokód

```
Nechť T je prázdná množina hran
Dokud T není kostra grafu:
  Nechť E je prázdná množina hran
  Pro všechny komponenty souvislosti:
    Nechť S je prázdná množina hran
    Pro všechny vrcholy komponenty:
      Přidej do S hranu s nejnižším ohodnocením,
        která vede do jiné komponenty
    Přidej do E nejlevnější hranu z S
  Přidej E do T
T je minimální kostra grafu
```

Minimální kostra – cvičení

1. Na graf na obrázku aplikujte některý z algoritmů hledání minimální kostry.



2. Graf na obrázku představuje komunikační síť, kde ohodnocení hran udává pravděpodobnost nechybovosti linky. Pravděpodobnost nechybové cesty v grafu je součinem pravděpodobností všech linek na trase. Najděte nejspolehlivější cestu z s do t.