

# IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

## Sada 7 — Řešení

### Upozornění

Vzorová řešení dostáváte k dispozici, abyste mohli zkontrolovat správnost svých řešení. Můžete je použít i jako návody k řešení jednotlivých příkladů tak, že je budete číst po částech a budete se snažit další krok provést vždy sami. Příklady ztratí veškerý svůj smysl, pokud se je budete učit jako básničku. Snažte se nad nimi přemýšlet a vyřešit je sami, než se podíváte do vzorových řešení.

### Téma

Relace, vlastnosti relací. Ekvivalence. Uspořádání. Vhodně definované vlastnosti relací. Uzávěry relací.

### Příklad 1.

Nechť  $\mathcal{F} \subseteq 2^{A \times B}$  je množina všech parciálních funkcí z  $A$  do  $B$ . Udejte příklad množin  $A$  a  $B$  a funkcí  $e, f, g, h \in \mathcal{F}$  takových, že v uspořádané množině  $(\mathcal{F}, \subseteq)$  funkce  $e$  pokrývá funkce  $f$  a  $g$  a funkce  $f$  je pokrývána funkcemi  $e$  a  $h$ .

### Řešení

Při řešení použijeme zbabělý trik. Protože v zadání není vyžadováno, aby  $f \neq g$  a  $e \neq h$ , z definice relace pokrytí musí platit pouze  $e \neq f \neq h$  a  $e \neq g \neq h$ . Proto pro jednoduchost můžeme uvažovat  $e = h$  a  $f = g$ . Vy však zkuste najít i takový příklad, kde  $e, f, g$  a  $h$  jsou čtyři navzájem různé funkce.

Nechť  $A = \{a\}$  a  $B = \{b\}$ , odkud  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{(a, b)\}\}$ . Potom  $e = h = \{(a, b)\}$  a  $f = g = \emptyset$  jsou hledané funkce.

### Příklad 2.

Rozhodněte, zda jsou následující vlastnosti binárních relací vhodně definované, a svá tvrzení dokažte. U vlastností, které nejsou vhodně definovány, ověřte, zda splňují alespoň jednu z podmínek kladených na vhodně definované vlastnosti.

**a)** Nechť  $R \subseteq M \times M$  je binární relace na množině  $M$ . Řekneme, že relace  $R$  má *hvězdičky před očima*, jestliže pro každé  $x \in M$  platí:  $(x, x) \in R$  právě tehdy, když  $(x, y) \in R$  pro všechna  $y \in M$ .

**b)** Nechť  $R \subseteq M \times M$  je binární relace na množině  $M$ . Řekneme, že relace  $R$  je *odpudivá*, jestliže pro každé  $x, y, z \in M$  platí: pokud  $(x, y) \in R$  a  $(x, z) \in R$ , potom  $(y, z) \in R$ .

**c)** Nechť  $R \subseteq M \times M$  je binární relace na množině  $M$ . Řekneme, že relace  $R$  je *přitažlivá*, jestliže pro každé  $x, y \in M$  platí: pokud  $(x, y) \in R$ , potom existuje  $z \in M$  takové, že  $(x, z) \in R$  a  $(y, z) \in R$ .

**d)** Nechť  $R \subseteq M \times M$  je binární relace na množině  $M$ . Řekneme, že relace  $R$  je *divná*, jestliže  $R \circ R \subseteq \text{id}_M$ .

**e)** Nechť  $R \subseteq M \times M$  je binární relace na množině  $M$ . Řekneme, že relace  $R$  je *parciální funkcí* z  $M$  do  $M$  jestliže pro každé  $x, y, z \in M$  platí: pokud  $(x, y) \in R$  a  $(x, z) \in R$ , potom  $y = z$ . (Dokažte také, že tato definice je konzistentní s obecnou definicí parciální funkce.)

**f)** Nechť  $R \subseteq M \times M$  je binární relace na množině  $M$ . Řekneme, že relace  $R$  je *totální funkcí* z  $M$  do  $M$  jestliže pro každé  $x \in M$  existuje  $y \in M$  takové, že  $(x, y) \in R$  a pro každé  $x, y, z \in M$  platí: pokud  $(x, y) \in R$  a  $(x, z) \in R$ , potom  $y = z$ . (Dokažte také, že tato definice je konzistentní s obecnou definicí totální funkce.)

### Řešení

**a)** Vlastnost „mít hvězdičky před očima“ je vhodně definovaná. K tomu, abychom to dokázali, musíme ukázat, že libovolná relace s hvězdičkami před očima splňuje obě podmínky z definice vhodně definované vlastnosti.

Pro první podmínku předpokládejme, že  $M$  je množina,  $R \subseteq M \times M$  relace na  $M$ . Musíme ukázat, že potom existuje relace  $S \subseteq M \times M$  s hvězdičkami před očima taková, že  $R \subseteq S$ . Položme  $S = M \times M$ . Snadno se ukáže, že relace  $S$  má hvězdičky před očima (udělejte to!), první podmínka je tedy splněna.

Pro druhou podmínku předpokládejme, že  $M$  je množina a pro každé  $i \in I$ , kde  $I$  je indexová množina, je  $R_i \subseteq M \times M$  relace s hvězdičkami před očima. Musíme ukázat, že relace  $\bigcap_{i \in I} R_i$  má také hvězdičky před očima.

Nechť  $(a, a) \in \bigcap_{i \in I} R_i$ . Potom  $(a, a) \in R_i$  pro každé  $i \in I$  a protože relace  $R_i$  má hvězdičky před očima pro každé  $i \in I$ , dostáváme, že pro každé  $i \in I$  platí  $(a, b) \in R_i$  pro každé  $b \in M$ . Tedy  $(a, b) \in \bigcap_{i \in I} R_i$  pro každé  $b \in M$ .

Nechť naopak  $(a, b) \in \bigcap_{i \in I} R_i$  platí pro každé  $b \in M$ . Potom volbou  $b = a$  dostáváme  $(a, a) \in \bigcap_{i \in I} R_i$ .

Uměli byste k libovolné relaci  $R \subseteq M \times M$  vytvořit její uzávěr s hvězdičkami před očima? Pokud ano, jak?

**b)** Odpudivost je vhodně definovaná vlastnost.

Nechť  $M$  je množina,  $R \subseteq M \times M$  relace. Snadno se ověří, že  $M \times M$  je odpudivá (dokažte!), takže první podmínka je splněna.

Pro druhou podmínku předpokládejme, že  $M$  je množina a pro každé  $i \in I$ , kde  $I$  je indexová množina, je  $R_i \subseteq M \times M$  odpudivá relace. Ukážeme, že  $\bigcap_{i \in I} R_i$  je také odpudivá relace. Nechť  $x, y, z \in M$  jsou libovolné prvky takové, že  $(x, y), (x, z) \in \bigcap_{i \in I} R_i$ . Potom  $(x, y), (x, z) \in R_i$  pro každé  $i \in I$ . Protože relace  $R_i$  je odpudivá pro každé  $i \in I$ , pro každé  $i \in I$  platí  $(y, z) \in R_i$ . Tedy  $(y, z) \in \bigcap_{i \in I} R_i$ , což bylo dokázat.

Uměli byste k libovolné relaci  $R \subseteq M \times M$  vytvořit její odpudivý uzávěr? Pokud ano, jak?

**c)** Přitažlivost není vhodně definovaná vlastnost.

První podmínka je splněna, protože  $M \times M$  je přitažlivá (dokažte!).

Protipříklad pro druhou vlastnost tvoří například množiny  $A = \{a, b, c\}$ ,  $I = \{1, 2\}$  a relace  $R_1 = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, a), (a, c)\}$  a  $R_2 = \{(a, b), (b, b)\}$ . Potom  $R_1$  i  $R_2$  jsou přitažlivé (dokažte rozborem po jednotlivých prvcích), ale  $R_1 \cap R_2 = \{(a, b)\}$ , což není přitažlivá relace.

Uměli byste k libovolné relaci  $R \subseteq M \times M$  vytvořit její přitažlivý uzávěr? Pokud ano, jak?

**d)** Divnost není vhodně definovaná vlastnost.

Uvažme relaci  $R = M \times M \subseteq M \times M$ , kde  $M$  je množina. Potom jediná relace  $S$  na  $M$ , pro kterou platí  $R \subseteq S$ , je  $S = M \times M$ , ovšem  $M \times M$  není divná, pokud  $M$  je alespoň dvouprvková (dokažte!). Tedy divnost nespĺňuje první podmínku. Uvědomte si, že jsme zde použili obecnější tvrzení: vlastnost  $V$  splňuje první podmínku právě tehdy, když  $M \times M$  má vlastnost  $V$ . Dokažte toto tvrzení.

Druhou podmínku divnost splňuje, pokud  $I \neq \emptyset$ . Kdybychom připustili i možnost  $I$ , dostali bychom se do problémů, jejichž vysvětlování sahá za rámec těchto příkladů. Problémy mají souvislost s tím, že neplatí první podmínka. Kdyby platila, problémy by se neprojevaly.

Nechť tedy  $M$ ,  $I \neq \emptyset$  jsou množiny,  $R_i \subseteq M \times M$  divná relace pro každé  $i \in I$ . Abychom ukázali, že  $\bigcap_{i \in I} R_i$  je divná relace, musíme ukázat, že  $\bigcap_{i \in I} R_i \circ \bigcap_{i \in I} R_i \subseteq \text{id}_M$ . K tomu stačí dokázat následující implikaci

$$(a, b) \in \bigcap_{i \in I} R_i \circ \bigcap_{i \in I} R_i \Rightarrow a = b$$

Nechť tedy  $(a, b) \in \bigcap_{i \in I} R_i \circ \bigcap_{i \in I} R_i$ . Z definice skládání relací existuje  $c \in M$  takové, že  $(a, c) \in \bigcap_{i \in I} R_i$  a  $(c, b) \in \bigcap_{i \in I} R_i$ . To může nastat jen tehdy, pokud  $(a, c) \in R_i$  a  $(c, b) \in R_i$  pro každé  $i \in I$ . Protože  $I \neq \emptyset$ , existuje  $j \in I$  takové, že  $(a, c), (c, b) \in R_j$ , takže  $(a, b) \in R_j \circ R_j \subseteq \text{id}_M$ , protože  $R_j$  je divná relace. Tedy  $a = b$ .

Dobře si promyslete, proč jsme v předchozím odstavci potřebovali předpoklad  $I \neq \emptyset$ .

Uměli byste k libovolné relaci  $R \subseteq M \times M$  vytvořit její divný uzávěr? Pokud ano, jak?

**e)**

Tato definice je vlastně instancí definice pro obecné funkce  $f : A \rightarrow B$ , pokud položíme  $A = B = M$ .

Protože  $M \times M$  není parciální funkce (dokažte!), nesplňuje tato vlastnost první podmínku (vizte výše).

Důkaz toho, že druhá podmínka pro  $I \neq \emptyset$  platí je snadný a ponecháváme jej čtenáři.

**f)** V tomto případě jsou všechny důkazy natolik snadné, že uvedeme pouze správné výsledky a důkazy ponecháme čtenáři.

Skutečně se jedná o totální funkce, i když zde není korespondence tak zřejmá jako v případě parciálních funkcí.

Protože  $M \times M$  není totální funkce (dokažte!), nesplňuje tato vlastnost první podmínku (vizte výše).

Tato vlastnost nesplňuje ani druhou podmínku. Protipříkladem jsou množiny  $M = \{a, b\}$ ,  $I = \{1, 2\}$  a relace  $R_1 = \{(a, b), (b, a)\}$  a  $R_2 = \text{id}_M$ .

### Příklad 3.

Určete reflexivní, symetrický, tranzitivní, reflexivní a tranzitivní, resp. reflexivní, symetrický a tranzitivní uzávěr následujících relací. Nestáčí jen opsat definice. Podejte přesné charakterizace prvků jednotlivých uzávěrů.

**a)**  $R = \{(k, 2k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

**b)**  $R = \{(k + 2, k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

**c)**  $R = \{(a, b) \mid b \mid a\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

**d)**  $R = \{(k, k^2) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

**e)**  $R = \{(a, b) \mid a \leq b + 3\} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

**f)**  $R = \{(f, g) \mid \forall x \in \mathbb{N}_0 : g(x + 1) = f(x)\} \subseteq \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0} \times \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0}$

**g)** Nechť  $\mathcal{F} \subseteq 2^{A \times A}$  je množina všech parciálních funkcí z  $A$  do  $A$ .  $R = \{(f, g) \mid f \cup g \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$  Jak by se výsledky změnily, kdybychom uvažovali obecné parciální funkce z  $A$  do  $B$ ?

**h)** Nechť  $\mathcal{F} \subseteq 2^{A \times A}$  je množina všech parciálních funkcí z  $A$  do  $A$ .  $R = \{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f \cup g \in \mathcal{F}\} \subseteq 2^{A \times A} \times 2^{A \times A}$ . Jak by se výsledky změnily, kdybychom uvažovali obecné parciální funkce z  $A$  do  $B$ ?

## Řešení

V řešení budeme značit  $R_o$  reflexivní,  $\vec{R}$  symetrický,  $R^+$  tranzitivní,  $R^*$  reflexivní a tranzitivní a  $\vec{R}^*$  reflexivní, symetrický a tranzitivní obal relace  $R$ .

a)

$$\begin{aligned}R_o &= \{(k, k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{(k, 2k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \\ \vec{R} &= \{(k, 2k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{(2k, k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \\ R^+ &= \{(k, 2^i k) \mid i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0\} \\ R^* &= \{(k, 2^i k) \mid k, i \in \mathbb{N}_0\} \\ \vec{R}^* &= \{(2^i k, 2^j k) \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0\}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}R_o &= \{(k, k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{(k+2, k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \\ \vec{R} &= \{(k+2, k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{(k, k+2) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \\ R^+ &= \{(k+2i, k) \mid i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0\} \\ R^* &= \{(k+2i, k) \mid i, k \in \mathbb{N}_0\} \\ \vec{R}^* &= \{(k+2i, k+2j) \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0\}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}R_o &= \{(a, b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid b \mid a\} \\ \vec{R} &= \{(a, b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid b \mid a \text{ nebo } a \mid b\} \\ R^+ &= \{(a, b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid b \mid a\} \\ R^* &= \{(a, b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid b \mid a\} \\ \vec{R}^* &= \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}R_o &= \{(k, k) \mid k \in \mathbb{Q}\} \cup \{(k, k^2) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \\ \vec{R} &= \{(k, k^2) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{(k^2, k) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \\ R^+ &= \{(k, k^{2^i}) \mid i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0\} \\ R^* &= \{(k, k) \mid k \in \mathbb{Q}\} \cup \{(k, k^{2^i}) \mid i, k \in \mathbb{N}_0\} \\ \vec{R}^* &= \{(k, k) \mid k \in \mathbb{Q}\} \cup \{(k^{2^i}, k^{2^j}) \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0\}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}R_o &= \{(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid a \leq b + 3\} \\ \vec{R} &= \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ R^+ &= \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ R^* &= \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ \vec{R}^* &= \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}R_{\circ} &= \{(f, f) \mid f \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0}\} \cup \\ &\quad \{(f, g) \mid f, g \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0} \wedge \forall x \in \mathbb{N}_0 : g(x+1) = f(x)\} \\ \vec{R} &= \{(f, g) \mid f, g \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0} \wedge \forall x \in \mathbb{N}_0 : g(x+1) = f(x)\} \cup \\ &\quad \{(f, g) \mid f, g \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0} \wedge \forall x \in \mathbb{N}_0 : f(x+1) = g(x)\} \\ R^+ &= \{(f, g) \mid f, g \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0} \wedge \exists k \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}_0 : g(x+k) = f(x)\} \\ R^* &= \{(f, g) \mid f, g \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0} \wedge \exists k \in \mathbb{N}_0 \forall x \in \mathbb{N}_0 : g(x+k) = f(x)\} \\ \vec{R}^* &= \{(f, g) \mid f, g \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0} \wedge \exists k, l \in \mathbb{N}_0 \forall x \in \mathbb{N}_0 : g(x+k) = f(x+l)\}\end{aligned}$$

g) Nenechte se zastrašit složitými konstrukcemi. Tento příklad je velmi jednoduchý.

$$\begin{aligned}R_{\circ} &= \{(f, g) \mid f, g \in \mathcal{F}, f \cup g \in \mathcal{F}\} \\ \vec{R} &= \{(f, g) \mid f, g \in \mathcal{F}, f \cup g \in \mathcal{F}\} \\ R^+ &= \mathcal{F} \times \mathcal{F} \\ R^* &= \mathcal{F} \times \mathcal{F} \\ \vec{R}^* &= \mathcal{F} \times \mathcal{F}\end{aligned}$$

Pokud bychom uvažovali obecné parciální funkce z  $A$  do  $B$ , na výsledcích by se nic nezměnilo.

h)

$$\begin{aligned}R_{\circ} &= \{(R, R) \mid R \subseteq A \times A\} \cup \{(f, g) \mid f, g \in \mathcal{F}, f \cup g \in \mathcal{F}\} \\ \vec{R} &= \{(f, g) \mid f, g \in \mathcal{F}, f \cup g \in \mathcal{F}\} \\ R^+ &= \mathcal{F} \times \mathcal{F} \\ R^* &= \{(R, R) \mid R \subseteq A \times A\} \cup \mathcal{F} \times \mathcal{F} \\ \vec{R}^* &= \{(R, R) \mid R \subseteq A \times A\} \cup \mathcal{F} \times \mathcal{F}\end{aligned}$$

Pokud bychom uvažovali obecné parciální funkce z  $A$  do  $B$ , na výsledcích by se nic nezměnilo.

#### Příklad 4.

Dokažte, nebo uveďte protipříklad pro následující tvrzení.

a) Jestliže  $R, S$  jsou uspořádání na  $M$ , potom také  $R \circ S$  je uspořádání na  $M$ .

b) Jestliže  $R$  je uspořádání na  $M$ , potom také  $R^{-1} \cap R$  je uspořádání na  $M$ .

#### Řešení

a) Tvrzení neplatí. Jako protipříklad uvažme  $M = \{a, b, c, d\}$ ,  $S = \text{id}_M \cup \{(a, b), (c, d)\}$ ,  $R = \text{id}_M \cup \{(b, c), (d, a)\}$ . Potom  $(a, c), (c, a) \in R \circ S$ , takže  $R \circ S$  není antisymetrická relace.

b) Tvrzení platí. Nechť  $x \in M$ . Jelikož  $R$  je reflexivní, platí  $(x, x) \in R$ , tedy také  $(x, x) \in R^{-1}$ . Proto  $(x, x) \in R^{-1} \cap R$  a tudíž  $R^{-1} \cap R$  je reflexivní.

Nechť  $(x, y), (y, x) \in R^{-1} \cap R$ . Pak  $(x, y), (y, x) \in R$ , a protože  $R$  je antisymetrická, platí  $x = y$  (což bylo dokázat).

Nechť  $(x, y), (y, z) \in R^{-1} \cap R$ . Pak  $(x, y), (y, z) \in R^{-1}$  a  $(x, y), (y, z) \in R$ . Z tranzitivity  $R$  dostáváme, že  $(x, z) \in R$ . Jelikož  $(x, y), (y, z) \in R^{-1}$ , platí  $(y, x), (z, y) \in R$  a proto  $(z, x) \in R$  (opět z tranzitivity  $R$ ). Celkem  $(x, z), (z, x) \in R$ , tedy  $(x, z) \in R^{-1} \cap R$  (což bylo dokázat).