11 Pokročilé dokazování nad algoritmy

Pokračujíce v látce předchozí Lekce 10 se budeme věnovat ukázkám důkazů správné funkce krátkých, ale ne zas tak jednoduchých, algoritmů.

Stručný přehled lekce

* Zastaví se náš algoritmus a jak to dokázat?
* Ukázky netriviálních aritmetických algoritmů s důkazy.
* Důkazy indukcí s pokročilými technikami.

11.1 Dokazování konečnosti algoritmu

- Co bývá snad ještě horší, než chybný výsledek algoritmu? Je to situace, kdy spuštěný algoritmus běží „do nekonečna“ a vůbec se nezastaví. □

Všimněte si, že jsme se zatím v důkazech Lekce 10 vůbec nezamýšleli nad tím, zda naše algoritmy vůbec skončí. (To není samozřejmé a důkaz konečnosti je nutno v obecnosti podávat!) □

Prozatím jsme však ukazovali algoritmy využívající jen `foreach` cykly, přitom podle naší konvence obsahuje `foreach` cyklus předem danou konečnou množinu hodnot pro řídící proměnnou, neboli náš `foreach` cyklus vždy musí skončit. Ale už v příštím algoritmu využijeme `while` cyklus, u kterého vůbec není jasné kdy a jestli skončí, a tudíž bude potřebný i důkaz konečnosti. □

- Právě nad takovou situací a její možnou prevencí se v tomto oddíle zamyslíme. Předesíláme, že další podnětná látka k témuž tématu se nachází ještě v Lekci 12.

Příklad 11.1. *Zastaví se vždy výpočet následujícího primitivního algoritmu?*

Algoritmus 11.2.

```
input x;
while  x>5  do
    x ← x+1;
done
output x
```

Odpověď je samozřejmě NE, jak každý vidí pro jakýkoliv vstup x větší než 5. Jak však tuto negativní odpověď matematicky dokázat?

To není zcela jednoduché, a proto si pomůžeme následujícím trikem:

- Předpokládejme pro spor, že Algoritmus 11.2 někdy skončí pro $x > 5$. Nechť přirozené $n > 5$ je zvoleno tak, že Algoritmus 11.2 skončí pro $x = n$ po nejmenším možném počtu ℓ průchodů cyklem `while`.

Pak jistě $\ell > 0$, neboť na začátku je podmínka x>5 splněna z definice n. Po prvním průchodu pak $x = n + 1$, avšak nyní již Algoritmus 11.2 musí skončit po $\ell - 1 < \ell$ dalších průchodech cyklu. To je spor s volbou $x = n$ coby vstupní hodnoty s nejmenším možným počtem průchodů. □

Když algoritmus vždy končí

Na rozdíl od předchozí ukázky se budeme dále věnovat pozitivním případům, kdy algoritmy poslušně končí své výpočty.

Metoda 11.3. Jednoduchý důkaz konečnosti.
Máme-li za úkol dokázat, že algoritmus skončí, vhodný postup je následující:

- Sledujeme zvolený celočíselný a zdola ohraničený *parametr algoritmu* (třeba přirozené číslo) a dokážeme, že se jeho hodnota v průběhu algoritmu neustále ostře zmenšuje. □
- Případně předchozí přístup rozšíříme na zvolenou *k-tici přirozených parametrů* a dokážeme, že se jejich hodnoty v průběhu algoritmu lexikograficky ostře zmenšují.

Jedná se zde vlastně o vhodné (a zjednodušené pro daný účel) využití principu matematické indukce. Pozor, naše „parametry“ vůbec nemusejí být proměnnými v programu. □

Například pro rekurzivní funkci `factorial(x)` z Příkladu 10.12 přímo využijeme parametr `x`, který se ostře zmenšuje, pro snadný důkaz ukončenosti.

Příklad 11.4. *Dokažte, že násl. alg. vždy skončí pro jakýkoliv přirozený vstup x.*

Algoritmus .

```
input  x;
while  x<100  do
    y ← 0;   x ← x+1;
    while  y<x  do
        y ← y+1;
    done
done
```

Postupujme podle Metody 11.3 – jak však dosáhneme „zmenšování parametru“, když hodnoty proměnných `x,y` se zvětšují?

To není až tolik obtížné, prostě budeme hodnoty `x,y` vhodně odečítat od velké konstanty. Vtip je v tom dobře zvolit vzorec parametru (vlastním odhadem chování algoritmu):

$$p(x,y) = 101^2 - 100 \cdot x - y$$

Pak je již rutinou dokázat, že v průběhu algoritmu (tj. pokud se aspoň jednou vnoří do cyklu) je vždy $p(x,y) > 0$ a v každém průchodu vnějšího i vnitřního cyklu se $p(x,y)$ ostře zmenší. □

Příklad 11.5. *Dokažte, že následující algoritmus vždy skončí pro jakýkoliv přirozený vstup x.*

Algoritmus . Rekurzivní výpočet funkce `fibonacci(x)` pro přirozené x.

```
if x < 2 then  t←x;
else  t ← fibonacci(x-1)+fibonacci(x-2);
return t
```

Nyní je na první pohled přirozené sledovat přímo parametr `x`. Indukcí podle něj pak snadno odvodíme, že výpočet `fibonacci(x)` vždy skončí. . .

V čem je tedy možný nedostatek tohoto přímého přístupu? V zásadě pouze jediný; nezískáme z něj žádný rozumný horní odhad počtu kroků algoritmu.

Na druhou stranu při trikové volbě parametru $p(x) = 2^x$ pro Metodu 11.3 v každé iteraci rekurzivního volání `fibonacci(x)` pro $x \geq 2$ nastane

$$p(x-1) + p(x-2) = 2^{x-1} + 2^{x-2} \leq 2 \cdot 2^{x-1} - 1 < 2^x$$

a počet iterací výpočtu `fibonacci(n)` tak bude vždy nejen konečný, ale přímo striktně menší než 2^n. □

11.2 Přehled technik důkazu indukcí

- Doposud zde byla matematická indukce představována ve své přímočaré formě, kdy dokazované tvrzení obvykle přímo nabízelo celočíselný parametr, podle nějž bylo potřebné indukci vést. □
- Indukční krok pak prostě zpracoval přechod „$n \to n+1$“. □
- To však u dokazování správnosti algoritmů typicky neplatí a našim cílem zde je ukázat možné techniky, jak správně indukci na dokazování algoritmů aplikovat. □
- Uvidíme, jak si z nabízejících se parametrů správně vybrat a jak je případně kombinovat.

Technika fixace parametru

Příklad 11.6. *Mějme následující algoritmus. Co je jeho výsledkem výpočtu?*

Algoritmus .

```
input  x, y;
z ← 0;
while  x>0  do
    z ← z+y;   x ← x-1;
done
output  z;
```

Sledováním algoritmu zjistíme, že hodnota z bude součtem $z = y + \cdots + y$, dokud x se nesníží na nulu. Poté odhadneme:

Věta. Pro každé $x, y \in \mathbb{N}$ Algoritmus 11.6 vypočítá hodnotu $z = x \cdot y$. □

```
while  x>0  do
    z ← z+y;   x ← x-1;
done
```

Důkaz: Budiž $b \in \mathbb{N}$ libovolné ale pro další úvahy pevné.

Dokážeme, že pro každé $x \in \mathbb{N}$ je výsledkem algoritmu hodnota $z = z_0 + x \cdot b$, kde b je hodnota vstupu y a z_0 je hodnota v proměnné z na začátku uvažovaného výpočtu (pro potřeby indukce). □

- Báze $x = 0$ znamená, že tělo cyklu ani jednou neproběhne a výsledkem bude počáteční $z = z_0$ (nula na úplném začátku). □
- Indukční krok. Nechť je tvrzení známo pro $x = i$ a uvažujme nyní vstup $x = i + 1 > 0$. Prvním průchodem cyklem se uloží $z \leftarrow z + y = z_0 + b$ a $x \leftarrow x - 1 = i$.
  Začáteční hodnota vstupu y nyní (pro naše úvahy) je $z_0 + b$ a podle indukčního předpokladu je výsledkem algoritmu hodnota

$$(z_0 + b) + i \cdot b = z_0 + (i + 1) \cdot b = z_0 + x \cdot b \,.$$

Důkaz matematickou indukcí je tímto ukončen. □

Indukce k součtu parametrů

Příklad 11.7. *Je dán následující rekurentní algoritmus.*

Algoritmus . Funkce `kombinacni(m,n)` pro přirozená m, n.

```
res ← 1;
if m>0 ∧ n>0 then
    res = kombinacni(m-1,n)+kombinacni(m,n-1);
fi
return res;
```

Výše uvedený vzorec (a ostatně i název funkce) naznačuje, že funkce má co společného s kombinačními čísly a *Pascalovým trojúhelníkem*

$$\binom{a+1}{b+1} = \binom{a}{b+1} + \binom{a}{b},$$

je však třeba správně „nastavit“ význam parametrů $a, b \ldots$

Věta. Pro každé parametry $m, n \in \mathbb{N}$ je výsledkem výpočtu funkce `kombinacni(m,n)` hodnota $r = \binom{m+n}{m}$ (kombinační číslo) – počet všech m-prvkových podmnožin $(m+n)$-prvkové množiny.

```
res ← 1;
if m>0 ∧ n>0 then
    res = kombinacni(m-1,n)+kombinacni(m,n-1);
fi
```

Důkaz indukcí vzhledem k součtu parametrů $i = m + n$: □

- Báze $i = m + n = 0$ pro $m, n \in \mathbb{N}$ znamená, že $m = n = 0$. Opět však s výhodou využijeme rozšíření báze na případy $m = 0$ nebo $n = 0$ (zvlášť).

  V obou rozšířených případech daná podmínka algoritmu není splněna, a proto výsledek výpočtu bude iniciální `res = 1`. Je toto platná odpověď? □

  * Kolik je prázdných podmnožin ($m = 0$) jakékoliv množiny? Jedna, $\emptyset$.
  * Kolik je m-prvkových podmnožin ($n = 0$) m-prvkové množiny? Zase jedna, ta množina samotná.

  Tím je důkaz báze indukce dokončen.

```
res ← 1;
if m>0 ∧ n>0 then
    res = kombinacni(m-1,n)+kombinacni(m,n-1);
fi
```

- Indukční krok je $i+1=m+n$ pro $m,n>0$.
  Nyní je podmínka algoritmu splněna a vykonají se rekurentní volání

  `kombinacni(m-1,n) + kombinacni(m,n-1)`. □

  Rekurentní volání se vztahují k výběru podmnožin $m-1+n=m+n-1=i$-prvkové množiny, například $M=\{1,2,\dots,i\}$. Výsledkem tedy je, podle indukčního předpokladu pro součet i, počet $(m-1)$-prvkových plus m-prvkových podmnožin množiny M. □

  Kolik nyní je m-prvkových podmnožin $(i+1)$-prvkové množiny $M'=M\cup\{i+1\}$? Pokud ze všech podmnožin odebereme prvek $i+1$, dostaneme právě m-prvkové podmnožiny (z těch neobsahujících $i+1$) plus $(m-1)$-prvkové podmnožiny (z těch původně obsahujících $i+1$). □To je přesně rovno `kombinacni(m-1,n) + kombinacni(m,n-1)`, jak jsme měli dokázat. □

Zesílení dokazovaného tvrzení

Příklad 11.8. *Zjistěte, kolik znaků* `'z'` *v závislosti na celočíselné hodnotě* n *vstupního parametru* `n` *vypíše následující algoritmus.*

Algoritmus 11.9.

```
st  ← "z";
foreach  i ← 1,2,3,...,n-1,n  do
     vytiskni řetězec  st;
     st  ←  st . st ;     (zřetězení dvou kopií st za sebou)
done □
```

Zkusíme-li si výpočet simulovat pro $n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$, postupně dostaneme počty `'z'` jako $0, 1, 3, 7, 15 \ldots$. □Na základě toho již není obtížné „uhodnout“, že počet `'z'` bude (asi) obecně určen vztahem $2^n - 1$.

Toto je však třeba dokázat! □

Jak záhy zjistíme, matematická indukce na naše tvrzení přímo „nezabírá“, ale mnohem lépe se nám povede s následujícím přirozeným zesílením dokazovaného tvrzení:

Algoritmus .

```
st ← "z";
foreach i ← 1,2,3,...,n-1,n do
    vytiskni řetězec st;
    st ← st . st ;    (zřetězení dvou kopií st za sebou)
done
```

Věta. Pro každé přirozené n Algoritmus 11.9 vypíše právě 2^n-1 znaků `'z'` a proměnná `st` bude na konci obsahovat řetězec 2^n znaků `'z'`. □

Důkaz: Postupujeme indukcí podle n. Báze pro $n=0$ je zřejmá, neprovede se ani jedna iterace cyklu a tudíž bude vytištěno $0=2^0-1$ znaků `'z'`, což bylo třeba dokázat. Mimo to proměnná `st` iniciálně obsahuje $1=2^0$ znak `'z'`. □

Nechť tedy tvrzení platí pro jakékoliv n_0 a položme $n=n_0+1$. Podle indukčního předpokladu po prvních n_0 iteracích bude vytištěno $2^{n_0}-1$ znaků `'z'` a proměnná `st` bude obsahovat řetězec 2^{n_0} znaků `'z'`. V poslední iteraci cyklu (pro `i` $\leftarrow$ `n=n`$_0$`+1`) vytiskneme dalších 2^{n_0} znaků `'z'` (z proměnné `st`) a dále řetězec `st` „zdvojnásobíme“. □

Proto po n iteracích bude vytištěno celkem $2^{n_0}-1+2^{n_0}=2^{n_0+1}-1=2^n-1$ znaků `'z'` a v `st` bude uloženo $2\cdot 2^{n_0}=2^{n_0+1}=2^n$ znaků `'z'`. □

11.3 Zajímavé algoritmy aritmetiky

Například umocňování na velmi vysoké exponenty je podkladem RSA šifry:

Algoritmus 11.10. Binární postup umocňování.
Pro daná čísla a, b vypočteme jejich celočíselnou mocninu (omezenou na zbytkové třídy modulo m kvůli prevenci přetečení rozsahu celých čísel v počítači), tj. $c = a^b \mod m$.

```
c ← 1;
while  b > 0  do
    if  b mod 2 > 0  then c ← (c·a) mod m;
    b ← ⌊b/2⌋;   a ← (a·a) mod m;
done
výsledek c; □
```

Zde použijeme k důkazu správnosti algoritmu indukci podle délky ℓ binárního zápisu čísla b.

Věta. Algoritmus 11.10 skončí a správně vypočte hodnotu $c = a^b \mod m$.

```
c ← 1;
while  b > 0  do
    if  b mod 2 > 0  then c ← (c·a) mod m;
    b ← ⌊b/2⌋;   a ← (a·a) mod m;
done
výsledek c;
```

Důkaz: Báze indukce je pro $\ell = 1$, kdy $b = 0$ nebo $b = 1$. Přitom pro $b = 0$ se cyklus vůbec nevykoná a výsledek je $c = 1$. Pro $b = 1$ se vykoná jen jedna iterace cyklu a výsledek je $c = a \mod m$. □

Nechť tvrzení platí pro $\ell_0 \geq 1$ a uvažme $\ell = \ell_0 + 1$. Pak zřejmě $b \geq 2$ a vykonají se alespoň dvě iterace cyklu. Po první iteraci bude $a' = a^2$, $b' = \lfloor b/2 \rfloor$ a $c' = (a^{b \mod 2}) \mod m$. Tudíž délka binárního zápisu b' bude jen ℓ_0 a podle indukčního předpokladu zbylé iterace algoritmu skončí s výsledkem

$$c = c' \cdot a'^{b'} \mod m = \left(a^{b \mod 2} \cdot a^{2\lfloor b/2 \rfloor}\right) \mod m = a^b \mod m\,.$$

□

Euklidův algoritmus

Algoritmus 11.11. Euklidův pro největšího společného dělitele.

```
input  p, q;
while  p>0 ∧ q>0  do
    if  p>q  then  p ← p-q;
    else  q ← q-p;
done
output  p+q;
```
□

Věta. Pro každé $p, q \in \mathbb{N}$ na vstupu algoritmus vrátí hodnotu největšího společného dělitele čísel p a q, nebo 0 pro $p = q = 0$. □

Důkaz povedeme indukcí podle součtu $i = p + q$ vstupních hodnot.
(Je to přirozená volba v situaci, kdy každý průchod cyklem algoritmu sníží jedno z p, q, avšak není jasné, které z nich.) □

- Báze indukce pro $i = p + q = 0$ je zřejmá; cyklus algoritmu neproběhne a výsledek ihned bude 0.

```
while  p>0 ∧ q>0  do
    if  p>q  then  p ← p-q;
    else  q ← q-p;
done
```

- Ve skutečnosti je výhodné uvažovat „rozšířenou bázi“, která zahrnuje i případy, kdy jedno z p, q je nulové. □
  Pak výsledek $p+q$ bude roven tomu nenulovému z obou sčítanců, což je v tomto případě zároveň jejich největší společný dělitel. □

- Indukční krok. Mějme tedy nyní vstupní hodnoty $p = h_p > 0$ a $q = h_q > 0$ – tehdy dojde k prvnímu průchodu tělem cyklu našeho algoritmu. □
  * Předp. $h_p > h_q$; poté po prvním průchodu tělem cyklu budou hodnoty $p = h_p - h_q$ a $q = h_q$, přičemž nyní $p + q = h_p < h_p + h_q = i$.
  * Podle indukčního předpokladu tudíž výsledkem algoritmu pro vstupy $p = h_p - h_q$ a $q = h_q$ bude největší společný dělitel $NSD(h_p - h_q,\ h_q)$. □
  * Symetricky pro $h_p \leq h_q$ algoritmus vrátí $NSD(h_p,\ h_q - h_p)$.

Důkaz tak bude dokončen následujícím Lematem 11.12. □

Největší společný dělitel

Lema 11.12. $NSD(a,b) = NSD(a-b,b) = NSD(a,b-a)$.

Všimněte si, že dělitelnost je dobře definována i na záporných celých číslech. □

Důkaz: Ověříme, že $c = NSD(a-b,b)$ je také největší společný dělitel čísel a a b (druhá část je pak symetrická). □

- Jelikož číslo c dělí čísla $a-b$ a b, dělí i jejich součet $(a-b)+b = a$. Potom c je společným dělitelem a a b. □
- Naopak nechť d nějaký společný dělitel čísel a a b. Pak d dělí také rozdíl $a-b$. Tedy d je společný dělitel čísel $a-b$ a b. Jelikož c je největší společný dělitel těchto dvou čísel, nutně d dělí c a závěr platí. □

Relativně rychlé odmocnění

Na závěr oddílu si ukážeme jeden netradiční krátký algoritmus a jeho analýzu a důkaz ponecháme zde otevřené. Dokážete popsat, na čem je algoritmus založen?

Algoritmus 11.13. Celočíselná odmocnina.
Pro dané přir. číslo x vypočteme dolní celou část jeho odmocniny $r = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

```
p ← x;   r ← 0;
while  p > 0  do
    while  (r + p)^2 ≤ x  do r ← r+p;
    p ← ⌊p/2⌋;
done
výsledek r;
```

11.4 Dynamický algoritmus

Klíčovou myšlenkou dynamických algoritmů je rozklad problému na podproblémy, jejichž řešení jsou postupně ukládána pro další možné použití. Metoda je obzvláště vhodná v případech, kdy rozložené podúlohy si jsou podobné a mohou se opakovat.

Metoda 11.14. Dynamický výpočet všech nejkratších cest *mezi vrcholy v grafu G na množině vrcholů $V(G) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}\}$.*

- Na počátku nechť `d[i,j]` udává 1 (případně *váhu–délku hrany* $\{v_i, v_j\}$), nebo ∞ pokud hrana mezi i, j není. □
- Po kroku $t \geq 0$ nechť platí, že `d[i,j]` udává délku nejkratší cesty mezi v_i, v_j, který užívá pouze vnitřní vrcholy z množiny $\{v_0, v_1, \ldots, v_{t-1}\}$.□
- Při přechodu z kroku t na následující krok $t + 1$ upravujeme vzdálenost pro každou dvojici vrcholů v_i, v_j – jsou vždy pouhé dvě možnosti:
  - ∗ Buď je cesta délky `d[i,j]` z předchozího kroku t stále nejlepší (tj. nově povolený vrchol v_t nám nepomůže),
  - ∗ nebo cestu vylepšíme spojením přes nově povolený vrchol v_t, čímž získáme menší vzdálenost `d[i,t]+d[t,j]` $\rightarrow$ `d[i,j]`.
- Po N krocích úprav je výpočet hotov.

Výpočet nejkratších cest

Alternativně si zapíšeme postup této metody až překvapivě krátkým symbolickým algoritmem:

Algoritmus 11.15. Výpočet všech nejkratších cest; Floyd–Warshall

input ’*Pole* `d[,]` *délek hran (nebo* ∞*) grafu* G’;

```
for (t=0; t<N; t++) {
    for (i=0; i<N; i++) for (j=0; j<N; j++)
        d[i,j] = min(d[i,j], d[i,t]+d[t,j]);
}
```

výstup ’*Matice vzdáleností dvojic* `d[,]`’; □

Poznámka: V implementaci pro symbol ∞ použijeme velkou konst., třeba `MAX_INT/2`.

```
for (t=0; t<N; t++) {
    for (i=0; i<N; i++) for (j=0; j<N; j++)
        d[i,j] = min(d[i,j], d[i,t]+d[t,j]);
}
```

Věta 11.16. *Algoritmus 11.15 v poli* `d[i,j]` *správně vypočte vzdálenost mezi každou dvojicí vrcholů* v_i, v_j*.*

Důkaz povedeme matematickou indukcí podle řídící proměnné t cyklu. Báze je snadná – na počátku kroku $t = 0$ udává `d[i,j]` vzdálenost mezi i a j po cestách, které nemají vnitřní vrcholy (tj. pouze případně existující hranu).

Přejdeme-li na krok $t+1$, musíme určit nejkratší cestu P mezi i a j takovou, že P používá (mimo v_i, v_j) pouze vrcholy $\{v_0, v_1, \ldots, v_t\}$. Tuto nejkratší cestu P si hypoteticky představme: Pokud $v_t \notin V(P)$, pak `d[i,j]` již udává správnou vzdálenost. Jinak $v_t \in V(P)$ a označíme P_1 podcestu v P od počátku v_i do v_t a obdobně P_2 podcestu od v_t do konce v_j. Podle indukčního předpokladu je pak délka P rovna `d[i,t]+d[t,j]`.

Po provedení kroku $t = N - 1$ jsme hotovi se všemi vrcholy. □