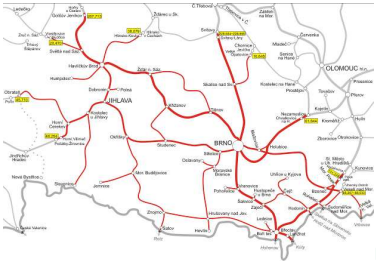
8 Procházení grafu a odvozené úlohy

Nyní se hlouběji podíváme na grafy z programátorské perspektivy: podíváme se na obecné schéma procházení grafu, které je základem mnoha užitečných algoritmů na grafech. Poté se hlouběji zaměříme na dvě specifické grafové úlohy – hledání nejkratší cesty a minimální kostry.



Stručný přehled lekce

* Obecné schéma procházení grafem a jeho varianty.
* Nejkratší cesta v grafu a Dijkstrův algoritmus.
* Minimální kostra grafu a její základní algoritmy.

8.1 Jak obecně projít souvislý graf

Pro vytvoření co nejobecnějšího schématu algoritmu pro procházení grafem vystačíme s následujícími datovými stavy a pomocnou strukturou:

- **Vrchol** grafu: má stavy . . . □
  - iniciační – dostane na začátku,
  - nalezený – implicitní stav poté, co jsme jej přes některou hranu nalezli (a odložili ke zpracování později), □
  - zpracovaný – poté, co jsme už probrali všechny hrany z něj vycházející,
  - (příp. ještě stav „post-zpracovaný“, po dokončení všech následníků).□
- **Úschovna**: je pomocná datová struktura (množina s dodatečnými atributy),
  - udržuje odložené, tj. nalezené a ještě nezpracované vrcholy, spolu s dodatečnou specifickou informací. □
- Způsob, kterým se vybírají vrcholy z úschovny ke zpracování, určuje variantu algoritmu procházení grafu.
- V prohledávaných vrcholech a hranách se provádějí konkrétní programové akce pro prohledání a zpracování našeho grafu.

Algoritmus 8.1. Generické procházení souvislé komponenty G grafu

- Vstup: Souvislý graf G, daný seznamem vrcholů a seznamy vycházejících hran z každého vrcholu, plus případné ohodnocení. □
- Vybereme lib. počátek prohledávání $u \in V(G)$; úschovna $U \leftarrow \{u\}$. □
- Dokud $U \neq \emptyset$, opakujeme:
  - Zvolíme lib. $v \in U$; odebereme $U \leftarrow U \setminus \{v\}$. (!)□
  - Pokud stav(v) = zpracovaný, jdeme zpět na start cyklu. (*)
  - Případně provedeme libovolnou akci ZPRACUJ(v). □
  - Pro všechny hrany $f \in E(G)$ vycházející z v provedeme:
    - Nechť w je druhý konec hrany $f = vw$;
    - pokud stav$(w) \neq$ zpracovaný, odložíme $U \leftarrow U \cup \{w\}$. (**)□
  - stav$(v) \leftarrow$ zpracovaný; na start cyklu. □
- Souvislý G je celý prohledaný a zpracovaný.

Pozor, všimněte se, že v bodě (**) obecně dochází k násobnému ukládání, což v praktické implementaci často obejdeme pouhou změnou „odloženého stavu“.

Některé implementace procházení grafu

Jak je vlastně proveden krok (!); „zvolíme lib. $v \in U$“ ? Právě tato volba je klíčová pro výslednou podobu projití grafu G:

- *Procházení „do šířky“, BFS* – úschovna U je implementovaná jako fronta, neboli je voleno $v \in U$ od prvních vrcholů vložených do úschovny. □
- *Procházení „do hloubky“, DFS* – úschovna U je implementovaná jako zásobník, neboli je voleno $v \in U$ od později vložených do úschovny. (Opakované vložení vrcholu v do U jej posune na vršek zásobníku.) □

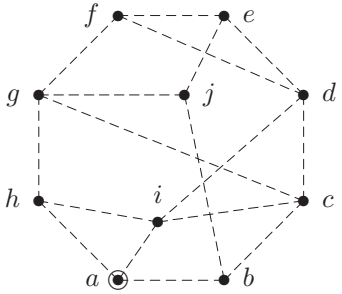
Dále zmíníme i tyto dva konkrétní, staré a dobře známé algoritmy přímo založené na prohledávání grafu:

- *Dijkstrův algoritmus* pro nejkratší cestu – z úschovny vybíráme vždy vrchol nejbližší (dosud určenou celkovou vzáleností) k počátečnímu u. □
- *Jarníkův algoritmus* pro minimální kostru – z úschovny vybíráme vždy vrchol nejbližší (délkou hrany) ke kterémukoliv již zpracovanému vrcholu.

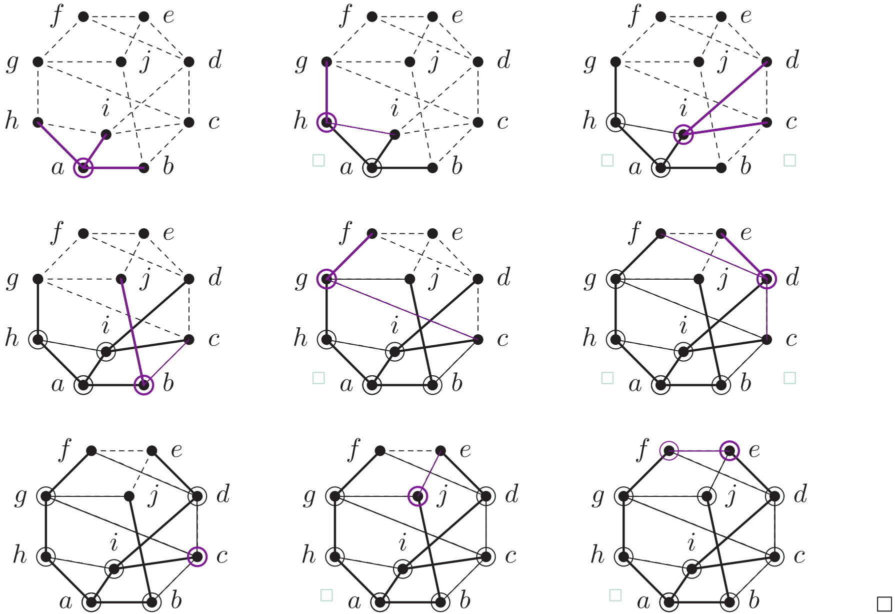
Poznámka: Jarníkův algoritmus se ve světové literatuře se obvykle připisuje Američanu Primovi, který jej však objevil a publikoval až skoro 30 let po Jarníkovi.

Konkrétní ukázky BFS a DFS

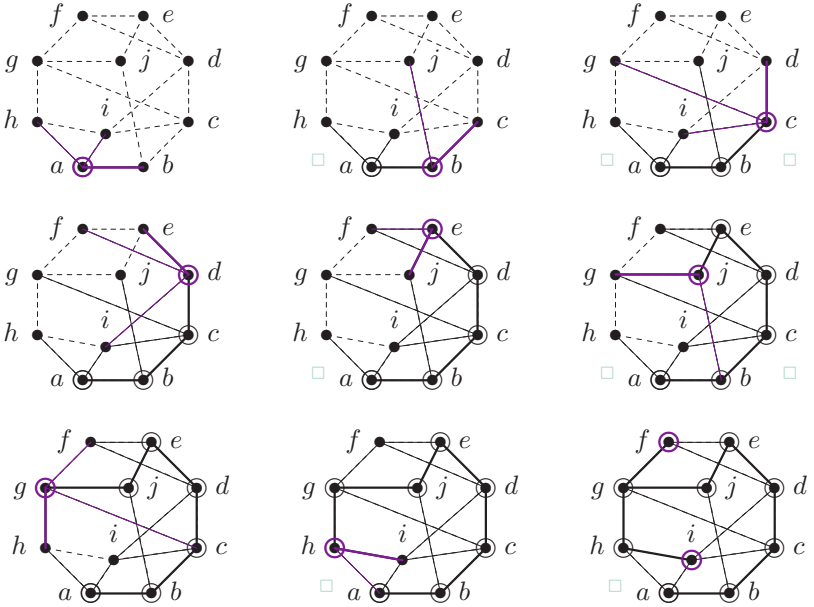
Příklad 8.2. *Ukázka průchodu následujícím grafem do šířky z vrcholu* a.



Značení v prohledávaném grafu: barevně aktuálně zpracovávaný vrchol a jeho hrany objevující nové vrcholy, kroužkem a plnou čarou již zpracované vrcholy a hrany.



Příklad 8.3. *Ukázka průchodu předchozím grafem do hloubky z vrcholu* a.

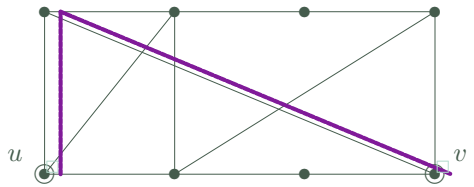


□

8.2 Vzdálenost v grafu

Definice 8.4. Vzdálenost $d_G(u,v)$ dvou vrcholů u, v v grafu G je dána délkou nejkratší cesty mezi u a v v G.
Pokud cesta mezi u, v neexistuje, je vzdálenost definována $d_G(u,v) = \infty$. □

Neformálně řečeno, vzdálenost mezi u, v je rovna *nejmenšímu počtu hran*, které musíme překonat, pokud se chceme dostat z u do v. Speciálně $d_G(u,u) = 0$.



Fakt: V neorientovaném grafu je vzdálenost symetrická, tj. $d_G(u,v) = d_G(v,u)$.

Lema 8.5. *Vzdálenost v grafech splňuje trojúhelníkovou nerovnost:*

$$\forall u, v, w \in V(G) \;:\; d_G(u,v) + d_G(v,w) \geq d_G(u,w)\,.$$

BFS a zjištění vzdálenosti

Jak nejsnadněji určíme vzdálenost v grafu? Stačí si povšimnout hezkých vlastností procházení grafu do šířky.

Věta 8.6. *Algoritmus procházení grafu do šířky lze použít pro výpočet grafové vzdálenosti z daného vrcholu* u. □

- Toto je poměrně jednoduchá aplikace, kdy počátečnímu vrcholu u přiřadíme vzdálenost 0, a pak vždy každému dalšímu nalezenému vrcholu v přiřadíme vzdálenost o 1 větší než byla vzdálenost vrcholu, ze kterého byl nalezen. □

Důkaz se opírá o následující tvrzení:

* Nechť u, v, w jsou vrcholy souvislého grafu G takové, že $d_G(u, v) < d_G(u, w)$. Pak při algoritmu procházení grafu G do šířky z vrcholu u je vrchol v nalezen dříve než vrchol w. □

V důkaze postupujeme indukcí podle vzdálenosti $d_G(u, v)$... □

8.3 Hledání nejkratší cesty

Definice: Vážený graf je graf G spolu s ohodnocením w hran reálnými čísly

$$w : E(G) \to \mathbb{R}\,.$$

Kladně vážený graf (G, w) je takový, že $w(e) > 0$ pro všechny hrany e. □

Definice 8.7. (vážená vzdálenost) Mějme (kladně) vážený graf (G, w). Váženou délkou cesty P je

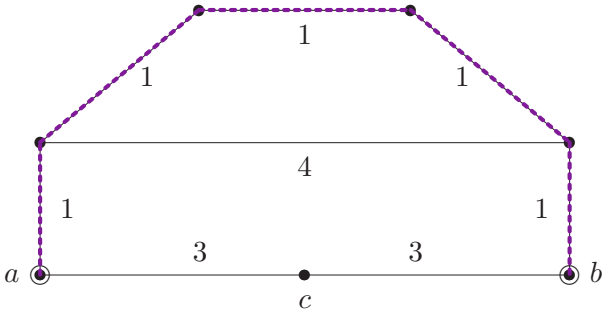
$$d^w_G(P) = \sum\nolimits_{e \in E(P)} w(e)\,.$$

Váženou vzdáleností v (G, w) mezi dvěma vrcholy u, v pak je

$$d^w_G(u, v) = \min\{d^w_G(P) : P \text{ je cesta s konci } u, v\}\,.$$ □

Lema 8.8. *Vážená vzdálenost v nezáporně vážených grafech (i orientovaných grafech) splňuje trojúhelníkovou nerovnost.*

Příklad 8.9. *Podívejme se na následující ohodnocený graf (čísla u hran udávají jejich váhy–délky.)*

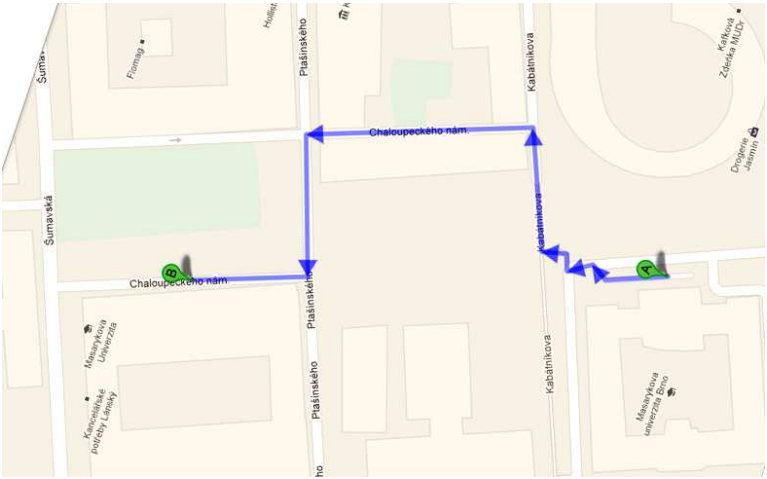


Vzdálenost mezi vrcholy a, c je 3, stejně tak mezi b, c. Co ale mezi a, b? Je jejich vzdálenost 6? Kdepak, vzdálenost a, b je 5, její cesta vede po „horních“ vrcholech, jak je vyznačeno.

Povšimněte si, že tento příklad zároveň ukazuje, že postup prohledáváním do šířky není korektní pro hledání vzdáleností ve váženém grafu. □

Problém nejkratší cesty

Jedná se patrně o nejznámější „grafový“ problém v praktických aplikacích, jenž nalezneme od vyhledávání dopravních spojení, GPS navigací, plánování pohybů robota, až po třeba rozhodovací systémy.



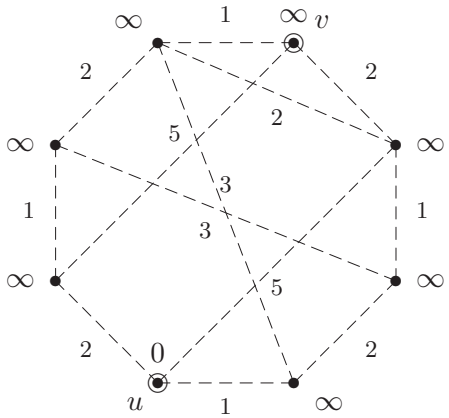
Dijkstrův algoritmus

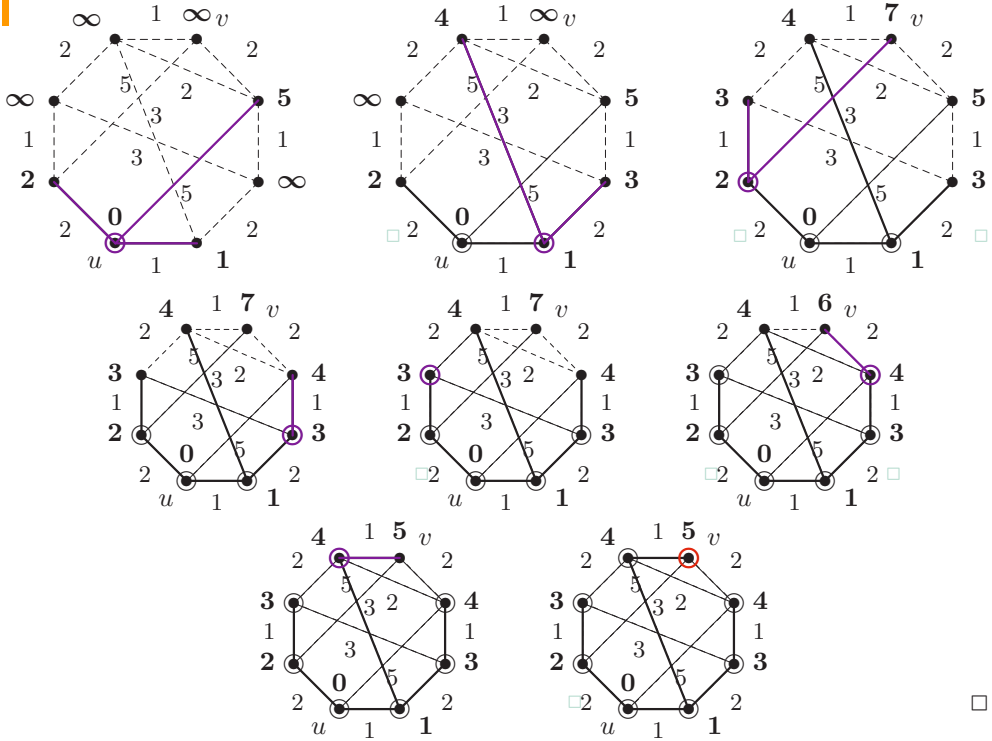
Algoritmus 8.10. Hledání nejkratší cesty mezi u a v v kladně váž. grafu.

- Vstup: Souvislý graf G, daný seznamem vrcholů a seznamy vycházejících hran z každého vrcholu, plus váhy w hran. Počáteční vrchol u a koncový v. □
- Úschovna $U \leftarrow \{(u,\, d(u) = 0)\}$. □
- Dokud $U \neq \emptyset$, opakujeme:
  - Zvolíme $(x,\, d(x)) \in U$ takové, že $d(x)$ je *minimální*.
    Odebereme $U \leftarrow U \setminus \{(x,\, d(x))\}$. □
  - Pokud $x = v$, algoritmus může skončit. □
  - Pro všechny hrany $f \in E(G)$ vycházející z x provedeme:
    - Nechť y je druhý konec hrany $f = xy$;
      a nechť $d'(y) = d(x) + w(f)$ (nová cesta do y přes x).
    - Pokud $(y,\, d(y)) \notin U$, nebo $(y,\, d(y)) \in U$ pro $d(y) > d'(y)$,
      odložíme $U \leftarrow \big(U \setminus (y, d(y))\big) \cup \{(y,\, d'(y))\}$
      (nová, lepší dočasná vzdálenost do y). □
- Výstup: $d(v)$ udává váženou vzdálenost z u do v.

Klíčem k pochopení činnosti Dijkstrova algoritmu je „uvidět“, že v každé jeho fázi jsou správně nalezeny všechny nejkratší cesty z u vedoucí po zpracovaných vrcholech. Postupem prohledávání grafu se tak jednou dostaneme až k určení správné vzdálenosti cíle v. □

Příklad 8.11. *Ukázka běhu Dijkstrova Algoritmu 8.10 pro nalezení nejkratší cesty mezi vrcholy u, v v následujícím váženém grafu.*




∞ 1 ∞ v
2 2
5
2
∞ 5
3
1 1
3
2 ∞
5
2 0 2
u 1 1
4 1 ∞ v
2 2
5
2
∞ 5
3
1 1
3
2 3
5
2 0 2
u 1 1
4 1 7 v
2 2
5
2
3 5
3
1 1
3
2 3
5
2 0 2
u 1 1
4 1 7 v
2 2
5
3 2
3 4
1 1
3
2 3
0
5
2 2
u 1 1
4 1 7 v
2 2
5
3 2
3 4
1 1
3
2 3
0
5
2 2
u 1 1
4 1 6 v
2 2
5
3 2
3 4
1 1
3
2 3
0
5
2 2
u 1 1
4 1 5 v
2 2
5
3 2
3 4
1 1
3
2 3
0
5
2 2
u 1 1
4 1 5 v
2 2
5
3 2
3 4
1 1
3
2 3
0
5
2 2
u 1 1

Důkaz správnosti

Věta 8.12. *Dijkstrův Algoritmus 8.10 pro kladně vážený graf (G, w) vždy správně najde nejkratší cestu mezi danými vrcholy u, v.* □

Důkaz vede přes následující zesílené tvrzení indukcí:

- V každé iteraci Algoritmu 8.10 hodnota $d(x)$ udává nejkratší vzdálenost z vrcholu u do x při cestě pouze po už zpracovaných vnitřních vrcholech.

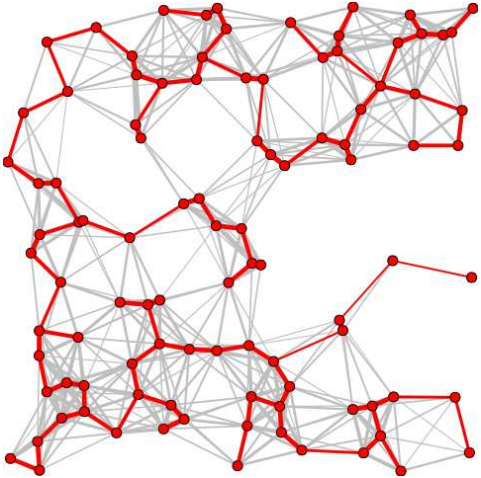
V bázi indukce dovolujeme pouze cesty používající u a x, tj. jen hrany vycházející z u. Ty jsou v první iteraci algoritmu probrány a jejich délky uloženy do U. □

V každém dalším kroku je vybrán jako vrchol x ke zpracování ten, který má ze všech nezpracovaných vrcholů nejkratší nalezenou vzdálenost od počátku u. V tom okamžiku je $d(x)$ platnou vzdáleností do x, neboť jakákoliv cesta přes jiný nezpracovaný vrchol nemůže být kratší díky nezápornosti vah w.

Z toho pak vyplývá, že zpracování vrcholu x správně upraví dočasné vzdálenosti odložené do U. Důkaz indukcí je hotov. □

8.4 Problém minimální kostry

V tomto případě nebudeme hledat nejkratší spojení mezi dvojicí vrcholů, ale mezi všemi vrcholy najednou – této úloze se říká minimální kostra neboli MST („minimum spanning tree“).



V návaznosti na Oddíl 7.4 definujeme toto:

Definice: Podgraf $T \subseteq G$ souvislého grafu G se nazývá *kostrou*, pokud

* T je stromem a
* $V(T) = V(G)$, neboli T propojuje všechny vrcholy G. □

Váhou (délkou) kostry $T \subseteq G$ váženého souvislého grafu (G, w) rozumíme

$$d_G^w(T) = \sum\nolimits_{e \in E(T)} w(e)\,. \square$$

Definice 8.13. Problém minimální kostry (MST) ve váž. grafu (G, w) hledá kostru $T \subseteq G$ s nejmenší možnou vahou (přes všechny kostry grafu G). □

Problém minimální kostry je ve skutečnosti historicky úzce svázán s jižní Moravou a Brnem, konkrétně s elektrifikací jihomoravských vesnic ve dvacátých letech! Právě na základě tohoto praktického optimalizačního problému brněnský matematik Otakar Borůvka jako první podal řešení problému minimální kostry v roce 1928.

Hladové řešení minimální kostry

Metoda 8.14. Hladový postup pro minimální kostru grafu (G, w).
Mějme dán souvislý vážený graf G s ohodnocením hran w.

- Seřadíme všechny hrany G jako $E(G) = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ tak, že $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$. □
- Inicializujeme prázdnou kostru $T = (V(G), \emptyset)$.
- Po řadě pro $i = 1, 2, \ldots, m$ provedeme následující:
  - Pokud $T + e_i$ nevytváří kružnici, tak $E(T) \leftarrow E(T) \cup \{e_i\}$.
    (Neboli pokud e_i spojuje různé komponenty souvislosti dosavadního T.)
- Na konci T obsahuje minimální kostru grafu G.

Věta 8.15. *Hladový postup korektně spočítá minimální kostru grafu (G, w).* □

Důkaz (náznak): Pro spor předpokládejme, že T_1 je kostra spočítaná Metodou 8.14 a T_2 nějaká minimální kostra „blízká“ T_1, kde $d_G^w(T_2) < d_G^w(T_1)$. Nyní najdeme jinou min. kostru T_3 „bližší“ T_1, což je spor s volbou T_2. □

Jarníkův (Primův) algoritmus

Algoritmus 8.16. Hledání minimální kostry ve váž. grafu (G, w).
Níže uvedená specifická implementace procházení grafu využívá úschovnu rozšířeným způsobem, kdy ukládá i příchozí hranu do vrcholu.

- Vstup: Souvislý graf G, daný seznamem vrcholů a seznamy vycházejících hran z každého vrcholu, plus váhy w hran.□
- Úschovna $U \leftarrow \{(u, \emptyset)\}$. Kostra $T = (V(G), \emptyset)$. □
- Dokud $U \neq \emptyset$, opakujeme:
  - Zvolíme $(x, e) \in U$ takové, že $w(e)$ je minimální (kde $w(\emptyset) = 0$). Odebereme $U \leftarrow U \setminus \{(x, e)\}$. □
  - Přidáme $E(T) \leftarrow E(T) \cup \{e\}$ (nová hrana do budoucí kostry). □
  - Pro všechny hrany $f \in E(G)$ vycházející z x provedeme:
    - Nechť y je druhý konec hrany $f = xy$.
    - Pokud $(y, f') \notin U$, nebo $(y, f') \in U$ pro nějaké $w(f') > w(f)$, odložíme $U \leftarrow \big(U \setminus \{(y, f')\}\big) \cup \{(y, f)\}$ □
- Výstup: T udává výslednou minimální kostru.