

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

1. [3 body] Uvažte následující čtyři relace nad abecedou $\{a, b\}$:

$u R_1 v \iff$ délka slova u i délka slova v je nejméně 10 (tj. $|u| \geq 10$ a $|v| \geq 10$)

$u R_2 v \iff$ délka slova u a délka slova v se liší nejvýše o 1 (tj. $||u| - |v|| \leq 1$)

$u R_3 v \iff \#_a(u) = \#_a(v)$

$u R_4 v \iff (u = v) \vee (|u| = |v| = 2n \text{ pro nějaké } n \geq 1 \text{ a zároveň } n\text{-tý znak slova } u \text{ se shoduje s } n\text{-tým znakem slova } v).$

- Zjistěte, které z uvedených relací **nejsou reflexivní** a dokažte to o nich.
- Zjistěte, které z uvedených relací **nejsou tranzitivní** a dokažte to o nich.
- Zjistěte, které z uvedených relací **nejsou pravou kongruencí** a dokažte to o nich. U relací, které jsou pravou kongruencí určete jejich index.

Řešení

- Z uvedených relací není reflexivní R_1 . Uvažme například slovo $u = aa$. Neplatí, že $aa R_1 aa$, neboť $|aa| < 10$. Neplatí tedy, že všechna slova nad danou abecedou jsou v relaci R_1 samy se sebou a relace R_1 tak není reflexivní.
- Relace R_2 není tranzitivní. Jako protipříklad uvažme slova $u = aa$, $v = aaa$ a $w = aaaa$. Platí, že $u R_2 v$ a $v R_2 w$, neboť délka u a délka v se liší maximálně o 1, stejně jako délka v a délka w . Už však neplatí, že $u R_2 w$, neboť délka u a w se liší o 2. Relace R_2 tedy není tranzitivní.
- Relace R_1 není reflexivní, není tudíž ekvivalencí, a proto není ani pravou kongruencí. Relace R_2 není tranzitivní, není tudíž ekvivalencí, a proto není ani pravou kongruencí. Relace R_3 je pravou kongruencí s nekonečným indexem. Relace R_4 je ekvivalencí, ale není pravou kongruencí. Uvažme například slova $u = aa$, $v = ab$ a slovo $w = a$. Platí, že $u R_4 v$, neboť $|u| = |v| = 2$ a slova u a v se shodují na první pozici. Neplatí však, že $uw R_4 vw$, neboť $uw \neq vw$ a zároveň $|uw| \neq 2n$ pro žádné n . Relace R_4 tedy není pravou kongruencí.