IB102 – úkol 4, příklad 2 – řešení **Odevzdání: 15. 10. 2012**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

1. [1 bod] Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí toto tvrzení:

Existuje abeceda Σ a regulární jazyky L_1, L_2 nad Σ takové, že $\sim_{L_1} \neq \sim_{L_2}$ a zároveň $\sim_{L_1}$ je pravá kongruence taková, že L_2 je sjednocením některých tříd rozkladu Σ^* podle $\sim_{L_1}$.

(*Pozn.:* Pokud bude Vaše odpověď "ano, platí", uveďte zcela konkrétní příklad abecedy Σ, jazyků L_1, L_2 a prefixových ekvivalencí $\sim_{L_1}, \sim_{L_2}$. Pokud bude Vaše odpověď "ne, neplatí", pokuste se zdůvodnit, proč to neplatí pro žádnou abecedu Σ, jazyky L_1, L_2 a prefixové ekvivalence $\sim_{L_1}, \sim_{L_2}$).

Řešení Tvrzení platí.

Důkaz. Nechť

$$\Sigma = \{a\}, L_1 = \left\{w \;\middle|\; |w| = 1 \bmod 4\right\}, L_2 = \left\{w \;\middle|\; |w| = 1 \bmod 2\right\}$$

pak

$$\begin{aligned} u \sim_{L_1} v &\overset{def}{\iff} |u| \bmod 4 = |v| \bmod 4 \\ u \sim_{L_2} v &\overset{def}{\iff} |u| \bmod 2 = |v| \bmod 2 \end{aligned}$$

Třídy rozkladu Σ^* podle $\sim_{L_1}$ jsou:

$$\begin{aligned} X_0 &= \left\{w \;\middle|\; |w| = 0 \bmod 4\right\} \\ X_1 &= \left\{w \;\middle|\; |w| = 1 \bmod 4\right\} = L_1 \\ X_2 &= \left\{w \;\middle|\; |w| = 2 \bmod 4\right\} \\ X_3 &= \left\{w \;\middle|\; |w| = 3 \bmod 4\right\} \end{aligned}$$

Třídy rozkladu Σ^* podle $\sim_{L_2}$ jsou:

$$\begin{aligned} Y_0 &= \left\{w \;\middle|\; |w| = 0 \bmod 2\right\} = X_0 \cup X_2 \\ Y_1 &= \left\{w \;\middle|\; |w| = 1 \bmod 2\right\} = X_1 \cup X_3 = L_2 \end{aligned}$$

Tedy skutečně L_2 je sjednocením některých (X_1, X_3) tříd rozkladu Σ^* podle $\sim_{L_1}$. $\square$

Bonus: [+1 bod] Uvažte zároveň, že platí následující dodatečná podmínka: jazyky L_1 a L_2 jsou nesrovnatelné (tedy $L_1 \nsubseteq L_2 \wedge L_2 \nsubseteq L_1$). Rozhodněte a zdůvodněte i tento případ.

Řešení Tvrzení platí. (Nelze však použít jazyky z první části, protože tam $L_1 \subset L_2$)

Důkaz. Nechť

$$\Sigma = \{a\}, L_1 = \left\{w \mid |w| = 1 \bmod 4\right\}, L_2 = \left\{w \mid |w| = 0 \bmod 2\right\}$$

Pak $\sim_{L_1}, \sim_{L_2}$ jsou definované stejně jako v předchozím příkladě a platí:

$$\begin{aligned} X_1 &= L_1 \\ Y_0 &= X_0 \cup X_2 = L_2 \end{aligned}$$

Tedy skutečně L_2 je sjednocením některých (X_0, X_2) tříd rozkladu Σ^* podle $\sim_{L_1}$ a zároveň $L_1 \not\subseteq L_2 \wedge L_2 \not\subseteq L_1$. $\square$