

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

2. [2 body] Uvažme operaci *double*, která je pro jazyk L nad abecedou Σ definována následovně:

$$\text{double}(L) = \{ww \mid w \in L\}.$$

Dále uvažme operaci *codoco*, která je pro jazyk L nad abecedou Σ definována takto:

$$\text{codoco}(L) = \text{co}-(\text{double}(\text{co}-L)).$$

- a) **Rozhodněte a zdůvodněte**, zda třída všech **co-konečných jazyků** (*co-konečné jazyky* jsou ty, jejichž komplement je konečný) je uzavřená na operaci *codoco*.
- b) **Rozhodněte a zdůvodněte**, zda třída všech **regulárních jazyků** je uzavřená na operaci *codoco*.

Řešení

- a) **Tvrzení platí**, třída *co-konečných jazyků* je uzavřená na operaci *codoco*.

Důkaz: Nechť L je libovolný *co-konečný jazyk*. Potom jeho doplněk ($\text{co}-L$) musí být konečný. Operace *double* nemění počet slov v jazyce, pouze zřetězuje stejná slova z jazyka za sebe, tedy výsledkem $\text{double}(\text{co}-L)$ je také konečný jazyk. Doplněk tohoto jazyka je tedy *co-konečný jazyk* $\text{co}-(\text{double}(\text{co}-L))$, který je výsledkem $\text{codoco}(L)$. Z toho plyne, že třída *co-konečných jazyků* je uzavřená na operaci *codoco*.

- b) **Tvrzení neplatí**, třída *regulárních jazyků* není uzavřená na operaci *codoco*.

Důkaz: K tomu, abychom dokázali, že tvrzení neplatí, stačí najít libovolný *regulární jazyk* L , takový, že $\text{codoco}(L)$ není *regulární*.

Příkladem takového jazyka je:

$$L = \text{co}-\{a^n b \mid n \geq 0\}$$

Komplementem k tomuto jazyku je jazyk:

$$\text{co}-L = \{a^n b \mid n \geq 0\}$$

Po aplikování operace *double* dostáváme:

$$\text{double}(\text{co}-L) = \{a^n b a^n b \mid n \geq 0\}$$

Tento jazyk je ovšem *neregulární* (lze snadno dokázat pomocí Pumping lemmatu, resp. Myhill-Nerodovy věty). Komplement k *neregulárnímu jazyku* je opět *neregulární* (jak bylo dokázáno na cvičeních), tedy výsledek $\text{codoco}(L)$ je *neregulární*, z čehož plyne, že třída *regulárních jazyků* není uzavřená na operaci *codoco*.