IB102 – úkol 9, příklad 2 – řešení **Odevzdání: 26. 11. 2012**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

2. [**2 body**] Mějme následující jazyk:

$$L = \{c^n b^m a^{m+n} c^m b^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

Rozhodněte, zda jazyk L je či není bezkontextový a dokažte:

- Pokud L je bezkontextový, uveďte bezkontextovou gramatiku generující anebo zásobníkový automat akceptující daný jazyk. Gramatiku/automat zapište se všemi formálními náležitostmi.
- Pokud L není bezkontextový, dokažte tuto skutečnost pomocí Lemmatu o vkládání (tzv. Pumping Lemma).

Řešení: Jazyk L není bezkontextový. Dokážeme to pomocí lemmatu o vkládání (Pumping Lemma) pro bezkontextové jazyky.

Nechť n je libovolné přirozené číslo. Zvolíme slovo $z = c^n b^n a^{2n} c^n b^n$. Zřejmě platí $z \in L$ a $|z| \geq n$. Nyní prozkoumáme všechna rozdělení $z = uvwxy$ taková, že $|vwx| \leq n$ a $vx \neq \varepsilon$. Každé takové rozdělení je jednoho z těchto druhů:

- Část v nebo x obsahuje alespoň jedno c. Potom zřejmě ani v ani x neobsahují buď žádné a, anebo b . Zvolíme $i = 2$, pak zřejmě platí jedna z následujících možností: buď počet c v první části slova (tj. před částí se znaky a) je větší nez počet b v druhé části slova, anebo c v druhé části slova je větší než počet b v první části slova (a zároveň je porušena rovnost součtu b a c, který má být roven počtu a).
- Část v nebo x obsahuje alespoň jedno b. Potom zřejmě ani v ani x neobsahují buď žádné a, anebo c . Zvolíme $i = 2$, pak zřejmě platí jedna z následujících možností: buď počet b v první části slova (tj. před částí se znaky a) je větší nez počet c v druhé části slova, anebo b v druhé části slova je větší než počet c v první části slova (a zároveň je porušena rovnost součtu b a c, který má být roven počtu a).
- Část v nebo x obsahuje alespoň jedno a. Potom zřejmě ani v ani x neobsahují buď žádné b, anebo c . Zvolíme $i = 2$, pak zřejmě platí, že součet b a c v první, resp. druhé části slova je menší, než počet a (který má být jejich součtu roven).

Je jasné, že tyto tři body pokrývají všechny možnosti, které mohou nastat. Ukázali jsme tedy, že pro každé rozdělení $z = uvwxy$ je možno najít i takové, že $uv^iwx^iy \notin L$. Podle lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky tedy L není bezkontextový.