

## 9 Povídání o průnikových grafech

Od této lekce teorie grafů se zlehka zaměříme na několik vybraných partií teorie grafů blízkých autorovu srdci. . .

Naším prvním výběrem jsou *průnikové grafy*, což jsou grafy, jejichž vrcholy jsou jisté množiny a hrany spojují pronikající se dvojice. Naši hlavní motivací studia těchto grafů je jejich geometrická názornost a aplikovatelnost v reálných situacích.

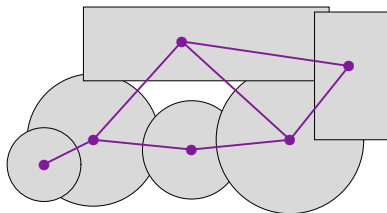


### Stručný přehled lekce

- Co jsou průnikové grafy, příklad intervalových grafů.
- Chordální grafy a jejich vlastnosti.
- Některé další často studované třídy průnikových grafů.
- Reprezentace grafů křivkami a úsečkami.

## 9.1 Průnikové a intervalové grafy

**Definice 9.1. Průnikovým grafem** množinového systému  $\mathcal{M}$  nazveme graf  $I_{\mathcal{M}}$  na vrch.  $V = \mathcal{M}$  s množinou hran  $E = \{\{A, B\} \subset \mathcal{M} : A \cap B \neq \emptyset\}$ .



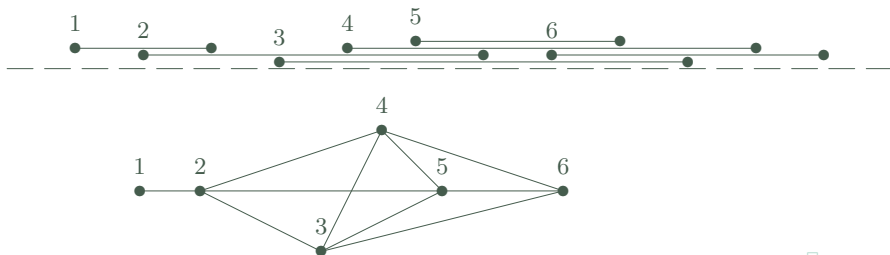
Poznamenáváme také, že nejčastěji studované typy průnikových grafů mají „geometrickou povahu“, tj. jejich množiny jsou definovány jako geometrické objekty.  $\square$

**Fakt:** Třídy průnikových grafů jsou vždy uzavřené na indukované podgrafy.  $\square$

**Tvrzení 9.2.** Každý jednoduchý graf je isomorfní průnikovému grafu nějakého vhodného systému množin.

## Intervalové grafy

Z celého spektra možných typů průnikových grafů se blíže podíváme na průnikové grafy intervalů na přímce – *intervalové grafy* (zkratka *INT*).

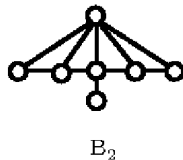
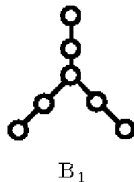
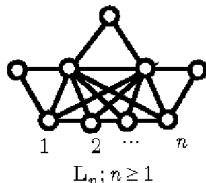
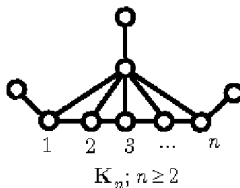
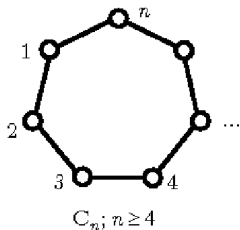


Vzpomeňte si, že s intervalovými grafy jsme se vlastně setkali už v Problému 6.5 řešícím přidělení pracovních úkolů, tj. barvení příslušného intervalového grafu. □

**Lema 9.3.** Každá kružnice délky větší než tři v intervalovém grafu má *chordu*, tj. indukuje hranu spojující nesousední vrcholy kružnice.

**Věta 9.4.** Třidu všech intervalových grafů lze charakterizovat pomocí násl. tvrzení.  $\square$

- Graf je intervalový právě když neobsahuje žádný z následujících *zakázaných indukovaných podgrafů*:

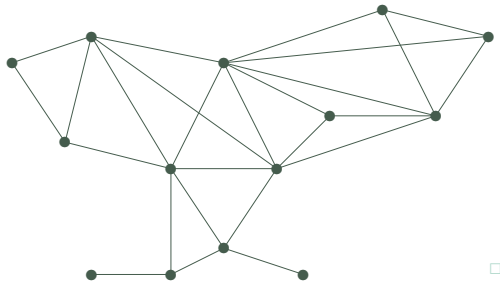


$\square$

- Jednoduchý graf je intervalový, právě když neobsahuje indukovanou kružnici  $C_4$  a jeho doplněk má tranzitivní orientaci.

## 9.2 Chordální grafy

**Definice 9.5.** **Chordální graf** (také zván *triangulovaný*)  $G$  je takový, který neobsahuje indukovanou kružnici delší než tři jako svůj podgraf.

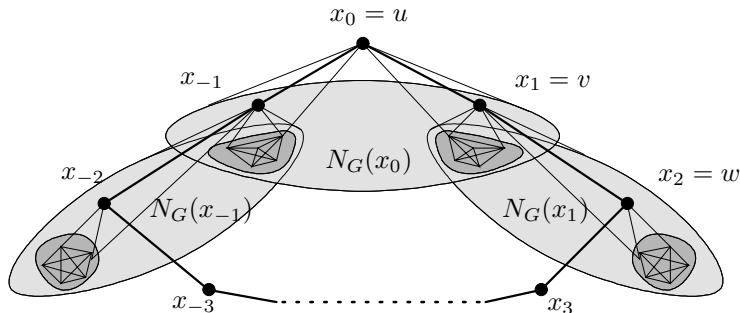


**Věta 9.6.** Každý chordální graf  $G$  obsahuje *simpliciální* vrchol, tj. vrchol  $s$  takový, že všichni sousedé  $s$  tvoří *kliku* v  $G$ . □

**Důkaz:** Dokazujeme posloupnost tří snadných tvrzení o chordálním grafu  $G$ .

Řekneme, že graf  $H$  je **bisimpliciální**, pokud  $H$  je úplný nebo  $H$  obsahuje dva nespojené simpliciální vrcholy.

1. Pro každou kružnici  $C$  a hranu  $e$  v chordálním grafu  $G$  existuje hrana  $f$  taková, že  $E(C) \setminus \{e\} \cup \{f\}$  obsahuje trojúhelník.  $\square$
2. Nechť  $uv$  je hranou  $G$  a  $N_G(v)$ , tj. sousedé  $v$ , tvoří bisimpliciální podgraf v  $G$ . Pokud  $v$  je simpliciální mezi sousedy  $u$ , ale ne v celém  $G$ , pak existuje vrchol  $w$  spojený s  $v$  a nespojený s  $u$  takový, že  $w$  je simpliciální mezi sousedy  $v$ .
3. Tudíž pokud  $G$  není bisimpliciální, ale sousedé každého jeho vrcholu indukují bisimpliciální podgraf, pak  $G$  obsahuje kružnici  $C$  odporující bodu 1.
4. Tudíž  $G$  je bisimpliciální.



$\square$

## Simpliciální dekompozice

Přímým důsledkem Věty 9.6 je existence *simpliciální dekompozice* libovolného chordálního grafu:

**Důsledek 9.7.** *Vrcholy každého chordálního grafu  $G$  lze seřadit do posloupnosti  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tak, že každé  $v_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , je simpliciální v podgrafu  $G$  indukovaném na  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ .  $\square$*

**Fakt:** Simpliciální dekompozici lze využít k efektivnímu rozpoznávání intervalových i chordálních grafů.

## Průniková reprezentace

**Věta 9.8.** *Graf  $G$  je chordální právě když existuje strom  $T$  takový, že  $G$  je průnikovým grafem vhodné kolekce podstromů v  $T$ .  $\square$*

**Důkaz** (náznak): Ve směru doleva pouze stručně konstatujeme, že každý průnikový graf podstromů v nějakém stromě nutně musí být chordální. Naopak provedeme důkaz indukcí podle počtu vrcholů  $G$ , přičemž báze pro jeden vrchol je zřejmá.

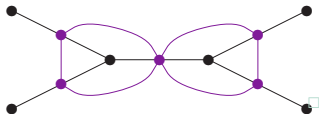
Jinak necht'  $v$  je simplicialní vrchol chordálního grafu  $G$ . Indukcí sestojíme průnikovou reprezentaci také chordálního grafu  $G - v$ . Pak sousedé  $v$  tvoří kliku, tudíž v průnikové reprezentaci grafu  $G - v$  se v některém uzlu stromu všichni překrývají. Na tomto místě přidáme nový list stromu, který bude reprezentovat  $v$  a bude překryt reprezentanty sousedů  $v$ .  $\square$



## 9.3 Další třídy průnikových grafů

**Definice:** Zavedeme následující třídy průnikových grafů:

- *Hranový* graf  $L(G)$  je průnikovým grafem hran  $E(G)$  v běžném grafu  $G$ .



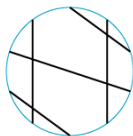
- *Kruhově-intervalové* grafy (CA) jsou průnikovými grafy intervalů na kružnici. □
- *Kružnicové* grafy (CIR) jsou průnikovými grafy tětiv v kružnici.



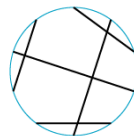
$P_4$



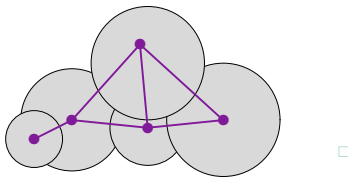
$C_5$



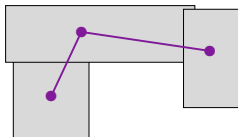
$P_4$



- *Diskové* grafy (DISC) jsou průnikovými grafy kruhů v rovině. Lze uvažovat také jen jednotkové kruhy (unit-DISC).



- *Kvádrové* grafy (BOX) jsou průnikovými grafy kvádrů ve dvou, třech či více dimenzích, se stěnami rovnoběžnými se souřadnicemi.

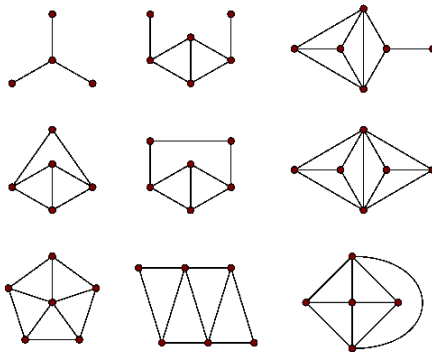


## Složitost rozpoznávání

Častou a důležitou otázkou u (jakýchkoliv) typů reprezentací grafů je, které abstraktní grafy mají reprezentaci daného typu a jak lze takovou reprezentaci algoritmicky sestavit. Problému se říká *rozpoznávání daného typu grafů*. □

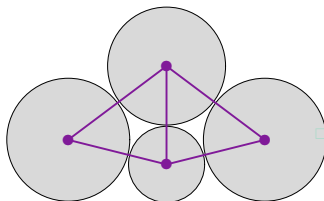
**Věta 9.9.** Hranové, CA a CIR grafy lze rozpoznávat algoritmy v *polynomiálním čase*. Problém, zda daný abstraktní graf je DISC nebo BOX je *NP-úplný*. □

**Věta 9.10.** Daný graf je *hranovým grafem* nějakého jednoduchého grafu, právě když neobsahuje žádný z následujících indukovaných podgrafů:



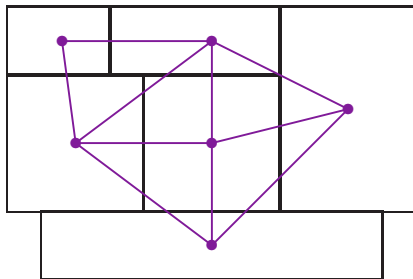
## Jiné druhy reprezentace

- *Dotykové* ... grafy jsou variantou průnikových grafů geometrických objektů, ve které se požaduje, aby vnitřky objektů byly po dvou disjunktní.



**Věta 9.11.** *Graf je rovinný právě když je dotykovým grafem kruhů v rovině.*

- *Obdélníkové „duály“* – to jsou průnikové dotykové reprezentace grafu pomocí nepřekrývajících se obdélníků se stranami rovnoběžnými osám.



- V této reprezentaci není dovoleno setkání čtyř obdélníků v jednom rohu. □
- Ve striktním podání musí obdélníky reprezentace vyplnit plochu „bez děr“. □

**Fakt:** Pouze rovinné grafy mohou mít obdélníkový duál, avšak ne všechny rovinné grafy je mají. □

Navíc striktní obdélníkové duály vždy reprezentují **kvazitriangulace** (všechny stěny až na vnější jsou trojúhelníky).

## 9.4 Průnikové grafy křivek a úseček

**Definice:** *Nitovými grafy* nazveme průnikové grafy (obyčejných) křivek v rovině.

**Tvrzení 9.12.** *Každý rovinný graf je nitový.* □

**Tvrzení 9.13.** *Existují grafy, které jsou nitové, ale každá jejich taková reprezentace obsahuje dvojici křivek majících exponenciálně mnoho vzájemných průsečíků.* □

Co se týče algoritmické složitosti, je poznání nitových grafů velmi algoritmicky náročné. Vzhledem k Tvrzení 9.13 je mnohem obtížnější dokázat příslušnost problému do třídy  $\mathcal{NP}$ , než jeho těžkost, [Kratochvíl / Pelsmajer, Schaeffer, Štefankovič].

**Věta 9.14.** *Problém rozpoznat, zda daný graf je nitový, je  $\mathcal{NP}$ -úplný.* □

Velmi podobně je definována třída *úsečkových grafů*, což jsou průnikové grafy úseček v rovině. Opět je dokázáno, že jejich rozpoznávání je  $\mathcal{NP}$ -těžké [Kratochvíl], ale příslušnost problému do třídy  $\mathcal{NP}$  zůstává otevřená kvůli následujícímu.

**Tvrzení 9.15.** *Existují grafy, které jsou úsečkové, ale každá jejich taková reprezentace obsahuje úsečku, k zápisu jejíž souřadnic je třeba exponenciálně mnoho bitů.* □

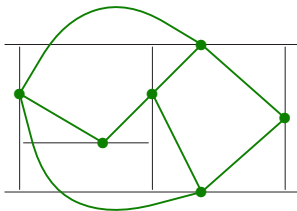
**Hypotéza 9.16.** Je každý rovinný graf úsečkovým grafem?

## „Zápalkové“ grafy

Výše jsem zmínili obecný pojem geometrických dotykových grafů, nyní se z tohoto úhlu pohledu podíváme na *dotykové grafy úseček* v rovině:

Tímto pojmem nazýváme ty průnikové grafy úseček v rovině, u nichž je dodatečnou podmínkou, že žádné dvě úsečky se neprotínají ve svých vnitřních bodech.

(Jakoby „zápalkové“ reprezentace v rovině.)



□

**Věta 9.17.** *Graf je dotykovým grafem disjunktních horizontálních a disjunktních vertikálních úseček, právě když se jedná o rovinný bipartitní graf.* □

Opět se jedná o výpočetně obtížnou třídu grafů, neboť již:

**Věta 9.18.** *Problém rozpoznat dotykový graf úseček je  $\mathcal{NP}$ -úplný.* □