

8. Parametrické úlohy o jednom náhodném výběru a dvou nezávislých náhodných výběrech z alternativních rozložení

Opakování:

Alternativní rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v jednom pokusu, přičemž pravděpodobnost úspěchu je ϑ . Píšeme $X \sim A(\vartheta)$.

$$\pi(x) = \begin{cases} 1 - \vartheta & \text{pro } x = 0 \\ \vartheta & \text{pro } x = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{neboli } \pi(x) = \begin{cases} \vartheta^x (1 - \vartheta)^{1-x} & \text{pro } x = 0, 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Binomické rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v posloupnosti n nezávislých opakovaných pokusů, přičemž pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu ϑ . Píšeme $X \sim \text{Bi}(n, \vartheta)$.

$$\pi(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \vartheta^x (1 - \vartheta)^{n-x} & \text{pro } x = 0, \dots, n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$E(X) = n\vartheta, \quad D(X) = n\vartheta(1 - \vartheta)$$

(Alternativní rozložení je speciálním případem binomického rozložení pro $n = 1$.

Jsou-li X_1, \dots, X_n stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim A(\vartheta)$, $i = 1, \dots,$

n , pak $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bi}(n, \vartheta)$.)

Centrální limitní věta:

Jsou-li náhodné veličiny X_1, \dots, X_n stochasticky nezávislé a všechny mají stejné rozložení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 , pak pro velká n ($n \geq 30$) lze rozložení součtu $\sum_{i=1}^n X_i$ aproximovat normálním rozložením $N(n\mu, n\sigma^2)$. Zkráceně

píšeme $\sum_{i=1}^n X_i \approx N(n\mu, n\sigma^2)$. Pokud součet $\sum_{i=1}^n X_i$ standardizujeme, tj. vytvoříme ná-

hodnou veličinu $U_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, pak rozložení této náhodné veličiny lze aproximovat standardizovaným normálním rozložením. Zkráceně píšeme $U_n \approx N(0,1)$

8.1. Věta: Asymptotické rozložení statistiky odvozené z výběrového průměru. Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$ a nechť je splněna podmínka $n\vartheta(1 - \vartheta) > 9$. Pak statistika $U = \frac{M - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1 - \vartheta)}{n}}}$ konverguje v distribuci k náhodné

veličině se standardizovaným normálním rozložením. (Říkáme, že U má asymptoticky rozložení $N(0,1)$ a píšeme $U \approx N(0,1)$.)

Důkaz:

Protože X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$, bude mít statistika $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ (výběrový úhrn) rozložení $Bi(n, \vartheta)$. Y_n má střední hodnotu $E(Y_n) = n\vartheta$ a rozptyl $D(Y_n) = n\vartheta(1-\vartheta)$. Podle centrální limitní věty se standardizovaná statistika $U = \frac{Y_n - n\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}}$ asymptoticky řídí standardizovaným normálním rozložením

$N(0,1)$. Pokud čitatele i jmenovatele podělíme n , dostaneme vyjádření:

$$U = \frac{\frac{Y_n - n\vartheta}{n}}{\sqrt{\frac{n\vartheta(1-\vartheta)}{n^2}}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} = \frac{M - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} \approx N(0,1)$$

8.2. Věta: Vzorec pro meze $100(1-\alpha)\%$ asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ .

Meze $100(1-\alpha)\%$ asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ jsou: $d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}$, $h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}$.

Důkaz:

Pokud rozptyl $D(M) = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}$ nahradíme odhadem $\frac{M(1-M)}{n}$, konvergence náhodné veličiny U k veličině s rozložením $N(0,1)$ se neporuší. Tedy

$$\begin{aligned} \forall \vartheta \in \Xi : 1 - \alpha &\leq P \left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M - \vartheta}{\sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}} < u_{1-\alpha/2} \right) = \\ &= P \left(M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}} u_{1-\alpha/2} < \vartheta < M + \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}} u_{1-\alpha/2} \right) \end{aligned}$$

8.3. Příklad: Náhodně bylo vybráno 100 osob a zjištěno, že 34 z nich používá zubní kartáček zahraniční výroby. Najděte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba používá zubní kartáček zahraniční výroby.

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny X_1, \dots, X_{100} , přičemž $X_i = 1$, když i -tá osoba používá zahraniční zubní kartáček a $X_i = 0$ jinak, $i = 1, \dots, 100$. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.

$n = 100$, $m = 34/100$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$.

Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: parametr ϑ neznáme, musíme ho nahradit výběrovým průměrem. Pak $100 \cdot 0,34 \cdot 0,66 = 22,44 > 9$.

$$d = 0,34 - \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100}} \cdot 1,96 = 0,2472, h = 0,34 + \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100}} \cdot 1,96 = 0,4328.$$

S pravděpodobností přibližně 0,95 tedy $0,2472 < \vartheta < 0,4328$.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

a) Přesný způsob

Otevřeme nový datový soubor se dvěma proměnnými a jedním případu.

První proměnnou nazveme d a do jejího Dlouhého jména napíšeme

$$=0,34-\text{sqrt}(0,34*0,66/100)*\text{VNormal}(0,975;0;1)$$

Druhou proměnnou nazveme h a do jejího Dlouhého jména napíšeme

$$=0,34+\text{sqrt}(0,34*0,66/100)*\text{VNormal}(0,975;0;1)$$

Dostaneme výsledek:

	1	2
	d	h
1	0,247155	0,432845

Vidíme, že s pravděpodobností aspoň 0,95 se pravděpodobnost používání zubního kartáčku zahraniční výroby bude pohybovat v mezích 0,2471 až 0,4328.

b) Přibližný způsob, použitelný pro dostatečně velký rozsah výběru

Do nového datového souboru o jedné proměnné X a 100 případech uložíme 34 jedniček (indikují používání zubního kartáčku zahraniční výroby) a 66 nul (indikují používání zubního kartáčku domácí výroby).

Statistika – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – zaškrtneme Meze spolehl. prům. – ponecháme implicitní hodnotu pro Interval 95,00 – Výpočet.

Dostaneme tabulku:

Proměnná	Popisné statistiky (Tabulka3)			
	N platných	Průměr	Int. spolehl. -95,000%	Int. spolehl. 95,000
X	100	0,340000	0,245532	0,434468

Dospěli jsme k výsledku, že s pravděpodobností aspoň 0,95 se pravděpodobnost používání zubního kartáčku zahraniční výroby bude pohybovat v mezích 0,2455 až 0,4345.

8.4. Příklad: Kolik osob musíme vybrat, abychom podíl modrookých osob v populaci odhadli se spolehlivostí 90% a šířka intervalu spolehlivosti byla na nejvýš a) 0,06, b) 0,01?

Řešení:

Šířka $100(1-\alpha)\%$ asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ :

$$h - d = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} - \left(m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} \right) = 2\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}$$

Požadujeme, aby $h - d \leq \Delta$, tedy $2\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} \leq \Delta$. Odtud vyjádříme $n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2}$.

Předpokládejme, že nemáme žádné předběžné informace o podílu modrookých osob v populaci. Musíme tedy zvolit takové m , aby šířka intervalu spolehlivosti byla maximální. Maximalizujeme výraz $m(1-m) = m - m^2$. Derivujeme podle m a položíme rovno 0: $1 - 2m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$. V tomto případě volíme relativní četnost $m = 0,5$.

$$\text{ad a) } n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot u_{0,95}^2}{0,06^2} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,645^2}{0,06^2} = 751,67$$

Uvedenou podmínku tedy splníme, když vybereme aspoň 752 osob.

$$\text{ad b) } n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot u_{0,95}^2}{0,01^2} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,645^2}{0,01^2} = 27060,25$$

Chceme-li dosáhnout podstatně užšího intervalu spolehlivosti, musíme vybrat aspoň 27 061 osob.

Modifikace: Předpokládejme, že v populaci je nanejvýš 30% modrookých osob. Pak relativní četnost $m = 0,3$.

$$\text{ad a) } n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot u_{0,95}^2}{0,06^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 1,645^2}{0,06^2} = 631,41$$

V tomto případě stačí vybrat 632 osob.

Ve srovnání s předešlým případem vidíme, že rozsah výběru skutečně klesl.

ad b)

$$n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot u_{0,95}^2}{0,01^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 1,645^2}{0,01^2} = 22730,61$$

V tomto případě musíme vybrat aspoň 22 731 osob.

8.5. Věta: Testování hypotézy o parametru ϑ .

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$ a necht' je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$. Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu $H_0: \vartheta = c$ proti alternativě $H_1: \vartheta \neq c$ (resp. $H_1: \vartheta < c$ resp. $H_1: \vartheta > c$). Testovým

kritériem je statistika $T_0 = \frac{M - c}{\sqrt{\frac{c(1-c)}{n}}}$, která v případě platnosti nulové hypotézy

má asymptoticky rozložení $N(0,1)$. Kritický obor má tvar

$$W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}, \infty) \quad (\text{resp. } W = (-\infty, -u_{1-\alpha}) \text{ resp. } W = (u_{1-\alpha}, \infty)).$$

(Testování hypotézy o parametru ϑ lze samozřejmě provést i pomocí $100(1-\alpha)\%$ asymptotického intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.)

8.6. Příklad: Podíl zmetků při výrobě určité součástky činí $\vartheta = 0,01$. Bylo náhodně vybráno 1000 výrobků a zjistilo se, že mezi nimi je 16 zmetků. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu $H_0: \vartheta = 0,01$ proti oboustranné alternativě $H_1: \vartheta \neq 0,01$.

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny X_1, \dots, X_{1000} , přičemž $X_i = 1$, když i-tý výrobek byl zmetek a $X_i = 0$ jinak, $i = 1, \dots, 1000$. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.

Testujeme hypotézu $H_0: \vartheta = 0,01$ proti alternativě $H_1: \vartheta \neq 0,01$.

Známe: $n = 1000$, $m = \frac{16}{1000} = 0,016$, $c = 0,01$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$

Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: $1000 \cdot 0,01 \cdot 0,99 = 9,9 > 9$.

a) Testování pomocí kritického oboru:

$$\text{Realizace testového kritéria: } t_0 = \frac{m - c}{\sqrt{\frac{c \cdot (1-c)}{n}}} = \frac{0,016 - 0,01}{\sqrt{\frac{0,01 \cdot 0,99}{1000}}} = 1,907.$$

Kritický obor: $W = (-\infty, -u_{0,975}) \cup (u_{0,975}, \infty) = (-\infty, -1,96) \cup (1,96, \infty)$. Protože $1,907 \notin W$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

b) Testování pomocí intervalu spolehlivosti

$$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} = 0,016 - \sqrt{\frac{0,016 \cdot 0,984}{500}} 1,96 = 0,0082$$

$$h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} = 0,016 + \sqrt{\frac{0,016 \cdot 0,984}{500}} 1,96 = 0,0238$$

Protože číslo $c = 0,01$ leží v intervalu 0,0082 až 0,0238, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

c) Testování pomocí p-hodnoty

Protože testujeme nulovou hypotézu proti oboustranné alternativě, vypočteme p-hodnotu podle vzorce:

$$p = 2 \min \{ \Phi(1,907), 1 - \Phi(1,907) \} = 2 \min \{ 0,97104, 1 - 0,97104 \} = 0,05792.$$

Protože vypočtená p-hodnota je větší než hladina významnosti 0,05, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA (pouze přibližný):

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,016, do políčka N1 napíšeme 1000, do políčka P 2 napíšeme 0,01, do políčka N2 napíšeme 32767 (větší hodnotu systém neumožní) - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,0626, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.

The screenshot shows the 'Testy rozdílů: r, %, průměry: Tabulka3' dialog box. It has three sections:

- Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty:** r1: 0,00, N1: 10, r2: 0,00, N2: 10, p: 1,0000. Radio buttons for 'Jednostr.' and 'Oboustr.' are present.
- Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení):** Pr1: 0, SmOd1: 1, N1: 10, Pr2: 0, SmOd2: 1, N2: 10, p: 1,0000. Radio buttons for 'Jednostr.' and 'Oboustr.' are present. A checkbox 'Výběrový průměr vs. střední hodnota' is checked.
- Rozdíl mezi dvěma poměry:** P 1: .01600, N1: 1000, P 2: .01000, N2: 32767, p: .0626. Radio buttons for 'Jednostr.' and 'Oboustr.' are present, with 'Oboustr.' selected.

8.7. Příklad: Nový léčebný postup považujeme za úspěšný, pokud po jeho ukončení bude dosaženo zlepšení zdravotního stavu u alespoň 50% zúčastněných pacientů. Nová terapie byla vyzkoušena u 40 pacientů a ke zlepšení došlo u 24 osob. Je možné na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu, že tato terapie nedosahuje úspěšnosti aspoň 50%?

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny X_1, \dots, X_{40} , přičemž $X_i = 1$, když terapie u i -tého pacienta byl úspěšná a $X_i = 0$ jinak, $i = 1, \dots, 40$. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.

Testujeme hypotézu $H_0: \vartheta \leq 0,5$ proti pravostranné alternativě $H_1: \vartheta > 0,5$.

Známe: $n = 40$, $m = \frac{24}{40} = 0,6$, $c = 0,5$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,645$

Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: $40 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 9,6 > 9$.

Realizace testového kritéria: $t_0 = \frac{m-c}{\sqrt{\frac{c \cdot (1-c)}{n}}} = \frac{0,6-0,5}{\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{40}}} = 1,2649$.

Kritický obor: $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty \rangle = \langle u_{0,95}, \infty \rangle = \langle 1,645, \infty \rangle$. Protože $1,2649 \notin W$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vypočtená p-hodnota jednostranného testu je 0,1031, tedy menší než asymptotická hladina významnosti 0,05. H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

8.8. Věta: Asymptotické rozložení statistiky odvozené ze dvou výběrových průměrů.

Nechť X_{11}, \dots, X_{1n_1} je náhodný výběr z alternativního rozložení $A(\vartheta_1)$ a X_{21}, \dots, X_{2n_2} je na něm nezávislý náhodný výběr alternativního rozložení $A(\vartheta_2)$ a necht' jsou splněny podmínky $n_1 \vartheta_1 (1 - \vartheta_1) > 9$ a $n_2 \vartheta_2 (1 - \vartheta_2) > 9$. Označme M_1, M_2 výběrové průměry.

Pak statistika $U = \frac{M_1 - M_2 - (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sqrt{\frac{\vartheta_1(1 - \vartheta_1)}{n_1} + \frac{\vartheta_2(1 - \vartheta_2)}{n_2}}} \approx N(0,1)$.

Důkaz:

Analogicky jako v případě jednoho náhodného výběru z alternativního rozložení.

8.9. Věta: Vzorec pro meze 100(1- α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$.

Meze 100(1- α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro $\vartheta_1 - \vartheta_2$ jsou:

$$d = m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}} u_{1-\alpha/2},$$

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}} u_{1-\alpha/2}$$

Důkaz:

Pokud rozptýlí $D(M_i) = \frac{\vartheta_i(1-\vartheta_i)}{n_i}$ nahradíme odhadem $\frac{M_i(1-M_i)}{n_i}$, $i = 1, 2$, konvergence náhodné veličiny U k veličině s rozložením $N(0,1)$ se neporuší. Tedy

$$\begin{aligned} \forall \vartheta_1 - \vartheta_2 \in \Xi : 1 - \alpha &\leq P \left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M_1 - M_2 - (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}} < u_{1-\alpha/2} \right) = \\ &= P(M_1 - M_2 - \sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}} u_{1-\alpha/2} < \vartheta_1 - \vartheta_2 < \\ &< M_1 - M_2 + \sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}} u_{1-\alpha/2}) \end{aligned}$$

8.10. Příklad: Management supermarketu vyhlásil týden slev a sledoval, zda toto vyhlášení má vliv na podíl větších nákupů (nad 500 Kč). Na základě náhodného výběru 200 zákazníků v týdnu bez slev bylo zjištěno 97 velkých nákupů, zatímco v týdnu se slevou z 300 náhodně vybraných zákazníků učinilo velký nákup 162 zákazníků. Sestrojte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro rozdíl pravděpodobností uskutečnění většího nákupu v týdnu bez slevy a v týdnu se slevou.

Řešení:

Zavedeme náhodnou veličinu X_{1i} , která bude nabývat hodnoty 1, když v týdnu bez slevy i -tý náhodně vybraný zákazník uskuteční větší nákup a hodnoty 0 jinak, $i = 1, \dots, 200$. Náhodné veličiny $X_{1,1}, \dots, X_{1,200}$ tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta_1)$. Dále zavedeme náhodnou veličinu X_{2i} , která bude nabývat hodnoty 1, když v týdnu se slevou i -tý náhodně vybraný zákazník uskuteční větší nákup a hodnoty 0 jinak, $i = 1, \dots, 300$. Náhodné veličiny $X_{2,1}, \dots, X_{2,300}$ tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta_2)$.

$$n_1 = 200, n_2 = 300, m_1 = 97/200 = 0,485, m_2 = 162/300 = 0,54.$$

Ověření podmínek $n_1 \vartheta_1 (1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2 \vartheta_2 (1-\vartheta_2) > 9$: Parametry ϑ_1 a ϑ_2 neznáme, nahradíme je odhady m_1 a m_2 . $97 \cdot (1-97/200) = 49,955 > 9$, $162 \cdot (1-162/300) = 74,52 > 9$.

Meze $100(1-\alpha)\%$ asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$ jsou:

$$d = m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}} u_{1-\alpha/2} =$$

$$= \frac{97}{200} - \frac{162}{300} - \sqrt{\frac{\frac{97}{200}(1-\frac{97}{200})}{200} + \frac{\frac{162}{300}(1-\frac{162}{300})}{300}} 1,96 = -0,1443$$

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}} u_{1-\alpha/2} =$$

$$= \frac{97}{200} - \frac{162}{300} + \sqrt{\frac{\frac{97}{200}(1-\frac{97}{200})}{200} + \frac{\frac{162}{300}(1-\frac{162}{300})}{300}} 1,96 = 0,0343$$

Zjistili jsme tedy, že s pravděpodobností přibližně 0,95: $-0,1443 < \vartheta_1 - \vartheta_2 < 0,0343$.

8.11. Věta:

Testování hypotézy o parametrické funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$

Nechť X_{11}, \dots, X_{1n_1} je náhodný výběr z alternativního rozložení $A(\vartheta_1)$ a X_{21}, \dots, X_{2n_2} je na něm nezávislý náhodný výběr alternativního rozložení $A(\vartheta_2)$ a necht' jsou splněny podmínky $n_1 \vartheta_1 (1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2 \vartheta_2 (1-\vartheta_2) > 9$. Na asymptotické hladině významnosti α testujeme nulovou hypotézu $H_0: \vartheta_1 - \vartheta_2 = c$ proti alternativě $H_1: \vartheta_1 - \vartheta_2 \neq c$ (resp. $H_1: \vartheta_1 - \vartheta_2 < c$ resp. $H_1: \vartheta_1 - \vartheta_2 > c$). Testovým kritériem je statistika

$$T_0 = \frac{M_1 - M_2 - c}{\sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}}, \text{ která v případě platnosti nulové hypotézy má}$$

asymptoticky rozložení $N(0,1)$. Kritický obor má tvar

$$W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}, \infty)$$

(resp. $W = (-\infty, -u_{1-\alpha})$ resp. $W = (u_{1-\alpha}, \infty)$).

(Testování hypotézy o parametrické funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$ lze provést též pomocí $100(1-\alpha)\%$ asymptotického intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.)

8.12. Poznámka:

Postup při testování hypotézy $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$

Je-li $c = 0$, pak označme $M_* = \frac{n_1 M_1 + n_2 M_2}{n_1 + n_2}$ vážený průměr výběrových průměrů.

Jako testová statistika slouží $T_0 = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{M_*(1-M_*) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$, která v případě platnosti

nulové hypotézy má asymptoticky rozložení $N(0,1)$. Kritický obor má tvar $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}, \infty)$ (resp. $W = (-\infty, -u_{1-\alpha})$ resp. $W = (u_{1-\alpha}, \infty)$). Testová statistika T_0 vznikne standardizací statistiky $M_1 - M_2$, kde neznámé parametry ϑ_1, ϑ_2 nahradíme společným odhadem M_* .

8.13. Příklad: Pro údaje z příkladu 8.10. testujte na asymptotické hladině významnosti 0,05 hypotézu, že týden se slevami nezvýší pravděpodobnost uskutečnění většího nákupu.

Řešení:

Testujeme hypotézu $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$ proti levostranné alternativě $H_1: \vartheta_1 - \vartheta_2 < 0$ na asymptotické hladině významnosti 0,05.

$n_1 = 200, n_2 = 300, m_1 = 97/200, m_2 = 162/300, m_* = (97 + 162)/500 = 0,518$.

Podmínky dobré aproximace byly ověřeny v příkladu 8.10.

Testování pomocí intervalu spolehlivosti:

Pro levostrannou alternativu používáme pravostranný interval spolehlivosti:

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}} u_{1-\alpha} =$$

$$= \frac{97}{200} - \frac{162}{300} + \sqrt{\frac{97}{200} \left(1 - \frac{97}{200}\right) + \frac{162}{300} \left(1 - \frac{162}{300}\right)} 1,645 = 0,02$$

Protože číslo $c = 0$ je obsaženo v intervalu $(-\infty; 0,02)$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Testování pomocí kritického oboru:

Realizace testového kritéria:

$$t_0 = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{m_*(1-m_*) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{\frac{97}{200} - \frac{162}{300}}{\sqrt{0,518(1-0,518) \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{300}\right)}} = -1,2058.$$

Kritický obor je $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}) = (-\infty, -u_{0,95}) = (-\infty, -1,645)$. Protože testové kritérium nepatří do kritického oboru, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Testování pomocí p-hodnoty:

Pro levostrannou alternativu se p-hodnota počítá podle vzorce $p = P(T_0 \leq t_0)$:

$$p = P(T_0 \leq -1,2058) = \Phi(-1,2058) = 1 - \Phi(1,2058) = 1 - 0,8861 = 0,1139$$

Protože p-hodnota je větší než 0,05, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,485, do políčka N1 napíšeme 200, do políčka P 2 napíšeme 0,54, do políčka N2 napíšeme 300 – zaškrtneme Jednostr. - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,1142, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.

Testy rozdílů: r, %, průměry: tram_bus

Poslat/tisknout výsledky každ. výpočtu do okna protokolu Storno

Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty

r1: 0,00 N1: 10 p: 1,0000 Jednostr. Výpočet
r2: 0,00 N2: 10 Oboustr.

Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení)

Pr1: 0, SmOd1: 1, N1: 10 p: 1,0000 Výpočet
Pr2: 0, SmOd2: 1, N2: 10 Jednostr.
 Oboustr.
 Výběrový průměr vs. střední hodnota

Rozdíl mezi dvěma poměry

P 1: ,48500 N1: 200 p: ,1142 Jednostr. Výpočet
P 2: ,54000 N2: 300 Oboustr.