

## 9. Analýza rozptylu jednoduchého třídění

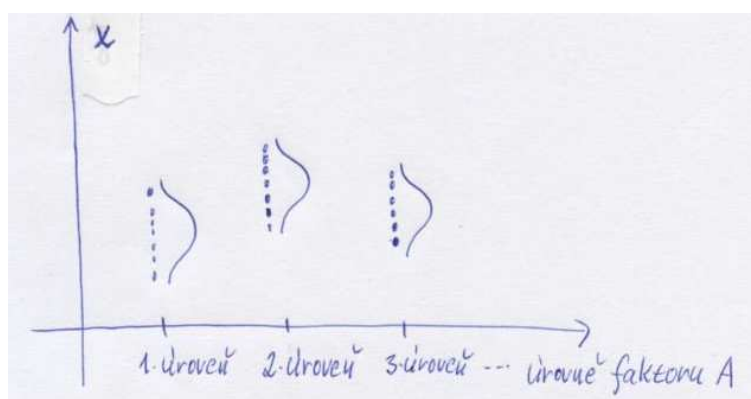
**9.1. Motivace:** Zajímáme se o problém, zda lze určitým faktorem (tj. nominální náhodnou veličinou  $A$ ) vysvětlit variabilitu pozorovaných hodnot náhodné veličiny  $X$ , která je intervalového či poměrového typu. Např. zkoumáme, zda metoda výuky určitého předmětu (faktor  $A$ ) ovlivňuje počet bodů dosažených studenty v závěrečném testu (náhodná veličina  $X$ ).

Předpokládáme, že faktor  $A$  má  $r \geq 3$  úrovní a přitom  $i$ -té úrovni odpovídá  $n_i$  pozorování  $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$ , které tvoří náhodný výběr z rozložení  $N(\mu_i, \sigma^2)$ ,  $i = 1, \dots, r$  a jednotlivé náhodné výběry jsou stochasticky nezávislé, tedy  $X_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$ , kde  $\varepsilon_{ij}$  jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s rozložením  $N(0, \sigma^2)$ ,  $i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, n_i$ .

Výsledky lze zapsat do tabulky

faktor A	výsledky
úroveň 1	$X_{11}, \dots, X_{1n_1}$
úroveň 2	$X_{21}, \dots, X_{2n_2}$
...	...
úroveň r	$X_{r1}, \dots, X_{rn_r}$

Ilustrace:

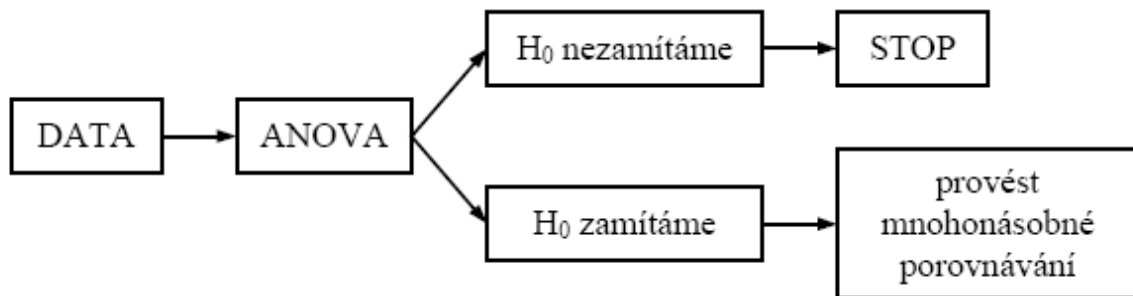


Na hladině významnosti  $\alpha$  testujeme nulovou hypotézu, která tvrdí, že všechny střední hodnoty jsou stejné, tj.  $H_0: \mu_1 = \dots = \mu_r$  proti alternativní hypotéze  $H_1$ , která tvrdí, že aspoň jedna dvojice středních hodnot se liší.

Jedná se tedy o zobecnění dvouvýběrového t-testu a na první pohled se zdá, že stačí utvořit  $\binom{r}{2}$  dvojic náhodných výběrů a na každou dvojici aplikovat dvouvýběrový t-test. Hypotézu o shodě všech středních hodnot bychom pak zamítli, pokud aspoň v jednom případě z  $\binom{r}{2}$  porovnávání se prokáže odlišnost středních hodnot. Odtud je vidět, že k neoprávněnému zamítnutí nulové hypotézy (tj. k chybě 1. druhu) může dojít s pravděpodobností větší než  $\alpha$ . Proto ve 30. le-

tech 20. století vytvořil R. A. Fisher metodu ANOVA (analýza rozptylu, v popsané situaci konkrétně analýza rozptylu jednoduchého třídění), která uvedenou podmínku splňuje.

Pokud na hladině významnosti  $\alpha$  zamítneme nulovou hypotézu, zajímá nás, které dvojice středních hodnot se od sebe liší. K řešení tohoto problému slouží metody mnohonásobného porovnávání, např. Scheffého nebo Tukeyova metoda.



### 9.2. Označení:

V analýze rozptylu jednoduchého třídění se používá tzv. tečková notace.

$n = \sum_{i=1}^r n_i$  ... celkový rozsah všech  $r$  výběrů

$X_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$  ... součet hodnot v  $i$ -tém výběru

$M_{i.} = \frac{1}{n_i} X_{i.}$  ... výběrový průměr v  $i$ -tém výběru

$X_{..} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$  ... součet hodnot všech výběrů

$M_{..} = \frac{1}{n} X_{..}$  ... celkový průměr všech  $r$  výběrů

### 9.3. Testování hypotézy o shodě středních hodnot

Náhodné veličiny  $X_{ij}$  se řídí modelem

$$M_0: X_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

pro  $i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, n_i$ , přičemž

$\varepsilon_{ij}$  jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s rozložením  $N(0, \sigma^2)$ ,

$\mu$  je společná část střední hodnoty závisle proměnné veličiny,

$\alpha_i$  je efekt faktoru  $A$  na úrovni  $i$ .

Parametry  $\mu, \alpha_i$  neznáme.

Požadujeme, aby platila tzv. **reparametrizační rovnice**:  $\sum_{i=1}^r n_i \alpha_i = 0$ . (Pokud je tří-

dění vyvážené, tj. pokud mají všechny výběry stejný rozsah:  $n_1 = n_2 = \dots = n_r$ ,

pak lze použít zjednodušenou podmínku  $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 0$ .)

Zavedeme součty čtverců

$S_T = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - M_{..})^2$  ... **celkový součet čtverců** (charakterizuje variabilitu jednot-

livých pozorování kolem celkového průměru),

počet stupňů volnosti  $f_T = n - 1$ ,

$S_A = \sum_{i=1}^r n_i (M_{i.} - M_{..})^2$  ... **skupinový součet čtverců** (charakterizuje variabilitu me-

zi jednotlivými náhodnými výběry),

počet stupňů volnosti  $f_A = r - 1$ .

Sčítanec  $(M_{i.} - M_{..})$  představuje bodový odhad efektu  $\alpha_i$ .

$S_E = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - M_{i.})^2$  ... **reziduální součet čtverců** (charakterizuje variabilitu

uvnitř jednotlivých výběrů),

počet stupňů volnosti  $f_E = n - r$ .

Lze dokázat, že  $S_T = S_A + S_E$ .

(Důkaz je proveden např. ve skriptech Budíková, Mikoláš, Osecký: Popisná statistika v poznámce 5.20.)

Kdyby nezáleželo na faktoru A, platila by hypotéza  $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$  a dostali bychom model

$$M1: X_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij}.$$

Během analýzy rozptylu tedy zkoumáme, zda výběrové průměry  $M_1, \dots, M_r$  se od sebe liší pouze v mezích náhodného kolísání kolem celkového průměru  $M$  nebo zda se projevuje vliv faktoru A.

Rozdíl mezi modely M0 a M1 ověřujeme pomocí testové statistiky

$F_A = \frac{S_A/f_A}{S_E/f_E}$ , která se řídí rozložením  $F(r-1, n-r)$ , je-li model M1 správný. Hypoté-

zu o nevýznamnosti faktoru A tedy zamítneme na hladině významnosti  $\alpha$ , když platí:  $F_A \geq F_{1-\alpha}(r-1, n-r)$ .

Výsledky výpočtů zapisujeme do **tabulky analýzy rozptylu jednoduchého třídění**.

Zdroj variability	součet čtverců	stupně volnosti	podíl	$F_A$
skupiny	$S_A$	$f_A = r - 1$	$S_A/f_A$	$\frac{S_A/f_A}{S_E/f_E}$
reziduální	$S_E$	$f_E = n - r$	$S_E/f_E$	-
celkový	$S_T$	$f_T = n - 1$	-	-

Sílu závislosti náhodné veličiny  $X$  na faktoru  $A$  můžeme měřit pomocí **poměru determinace**:  $P^2 = \frac{S_A}{S_T}$ . Nabývá hodnot z intervalu  $\langle 0,1 \rangle$ .

#### 9.4. Testování hypotézy o shodě rozptylů

Před provedením analýzy rozptylu je zapotřebí ověřit předpoklad o shodě rozptylů v daných  $r$  výběrech.

a) **Levenův test**: Položme  $Z_{ij} = |X_{ij} - M_i|$ . Označíme

$$M_{Zi} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij},$$

$$M_Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij},$$

$$S_{ZE} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (Z_{ij} - M_{Zi})^2,$$

$$S_{ZA} = \sum_{i=1}^r n_i (M_{Zi} - M_Z)^2$$

Platí-li hypotéza o shodě rozptylů, pak statistika

$$F_{ZA} = \frac{S_{ZA}/(r-1)}{S_{ZE}/(n-r)} \approx F(r-1, n-r).$$

Hypotézu o shodě rozptylů tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti  $\alpha$ , když  $F_{ZA} \geq F_{1-\alpha}(r-1, n-r)$ .

(Levenův test je vlastně založen na analýze rozptylu absolutních hodnot centrováných pozorování. Vzhledem k tomu, že náhodné veličiny  $X_{ij} - M_i$  nejsou stochasticky nezávislé a absolutní hodnoty těchto veličin nemají normální rozložení, je Levenův test pouze aproximativní.)

Modifikací Levenova testu je **Brownův – Forsytheův test**. Modifikace spočívá v tom, že místo výběrového průměru  $i$ -tého výběru se při výpočtu veličiny  $Z_{ij}$  používá medián  $i$ -tého výběru.

b) **Bartlettův test**: Platí-li hypotéza o shodě rozptylů a rozsahy všech výběrů jsou větší než 6, pak statistika

$$B = \frac{1}{C} \left[ (n-r) \ln S_*^2 - \sum_{i=1}^r (n_i - 1) \ln S_i^2 \right] \approx \chi^2(r-1), \text{ kde } C = 1 + \frac{1}{3(r-1)} \left( \sum_{i=1}^r \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n-r} \right)$$

a  $S_*^2$  je vážený průměr výběrových rozptylů.

$H_0$  zamítáme na asymptotické hladině významnosti  $\alpha$ , když  $B \geq \chi^2_{1-\alpha}(r-1)$ .

(Bartlettův test je poměrně slabý a je citlivý na porušení normality. Nedá se použít pro malé rozsahy výběrů.)

### 9.5. Post – hoc metody mnohonásobného porovnávání

Zamítneme-li na hladině významnosti  $\alpha$  hypotézu o shodě středních hodnot, chceme zjistit, které dvojice středních hodnot se liší na dané hladině významnosti  $\alpha$ , tj. na hladině významnosti  $\alpha$  testujeme  $H_0: \mu_l = \mu_k$  proti  $H_1: \mu_l \neq \mu_k$  pro všechna  $l, k = 1, \dots, r, l \neq k$ .

a) Mají-li všechny výběry týž rozsah  $p$  (říkáme, že třídění je vyvážené), použijeme **Tukeyovu metodu**. Testová statistika má tvar

$\frac{|M_k - M_l|}{\frac{S_*}{\sqrt{p}}}$ . Rovnost střed-

ních hodnot  $\mu_k$  a  $\mu_l$  zamítneme na hladině významnosti  $\alpha$ , když

$\frac{|M_k - M_l|}{\frac{S_*}{\sqrt{p}}} \geq q_{1-\alpha}(r, n-r)$ , kde hodnoty  $q_{1-\alpha}(r, n-r)$  jsou kvantily studentizované-

ho rozpětí a najdeme je ve statistických tabulkách. (Studentizované rozpětí je náhodná veličina  $Q = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{s}$ .)

Existuje modifikace Tukeyovy metody pro nestejně rozsahy výběrů, nazývá se Tukeyova HSD metoda. V tomto případě má testová statistika tvar

$\frac{|M_k - M_l|}{S_* \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_l} \right)}}$ . Rovnost středních hodnot  $\mu_k$  a  $\mu_l$  zamítneme na hladině vý-

znamnosti  $\alpha$ , když  $\frac{|M_k - M_l|}{S_* \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_l} \right)}} \geq q_{1-\alpha}(r, n-r)$ .

b) Nemají-li všechny výběry stejný rozsah, použijeme **Scheffého metodu**: rovnost středních hodnot  $\mu_k$  a  $\mu_l$  zamítneme na hladině významnosti  $\alpha$ , když

$|M_k - M_l| \geq S_* \sqrt{(r-1) \left( \frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_l} \right) F_{1-\alpha}(r-1, n-r)}$ .

Výhodou Scheffého testu je, že k jeho provedení nepotřebujeme speciální statistické tabulky s hodnotami kvantilů studentizovaného rozpětí, ale stačí běžné statistické tabulky s kvantila Fisherova – Snedecorova rozložení.

V případě vyváženého třídění, kdy lze aplikovat Tukeyovu i Scheffého metodu, použijeme tu, která je citlivější. Tukeyova metoda tedy bude výhodnější, když  $q_{1-\alpha}^2(r, n-r) < 2(r-1)F_{1-\alpha}(r-1, n-r)$ .

Metody mnohonásobného porovnávání mají obecně menší sílu než ANOVA.

Může nastat situace, kdy při zamítnutí  $H_0$  nenajdeme metodami mnohonásobného porovnávání významný rozdíl u žádné dvojice středních hodnot. K tomu dochází zvláště tehdy, když p-hodnota pro ANOVU je jen o málo nižší než zvolená hladina významnosti. Pak slabší test patřící do skupiny metod mnohonásobného porovnávání nemusí odhalit žádný rozdíl.

### 9.6. Plánované porovnávání - testování významnosti kontrastů

Plánované porovnávání je navrženo před prováděním ANOVY. Provádí se pomocí kontrastů, tj. pomocí lineárních kombinací středních hodnot. **Kontrast**  $q = \sum_{i=1}^r c_i \mu_i$ , kde  $\sum_{i=1}^r c_i = 0$  a  $\sum_{i=1}^r c_i^2 > 0$ . Odhadem kontrastu je veličina  $\hat{q} = \sum_{i=1}^r c_i M_i$ . Testování  $H_0: q = 0$  proti  $H_1: q \neq 0$  je založeno na statistice  $F_q = \frac{\hat{q}^2}{S_*^2 \sum_{i=1}^r \frac{c_i^2}{n_i}}$ , která se

v případě platnosti  $H_0$  řídí rozložením  $F(1, n-r)$ . Nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti  $\alpha$ , když platí  $F_q \geq F_{1-\alpha}(1, n-r)$ .

### 9.7. Porovnávání s kontrolou

V tomto případě neporovnáváme jednotlivé skupiny mezi sebou, ale každou skupinu porovnáme s kontrolní skupinou. Na hladině významnosti  $\alpha$  testujeme  $H_0: \mu_i = \mu_{\text{kontrola}}$  proti  $H_1: \mu_i \neq \mu_{\text{kontrola}}$ . Provedeme tedy celkem  $r-1$  porovnání. Používá se **Dunettův test**, jehož testové kritérium je  $\frac{|M_i - M_{\text{kontrola}}|}{S_*}$ . Nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti  $\alpha$ , když  $\frac{|M_i - M_{\text{kontrola}}|}{S_*} \geq q_{1-\alpha}(r, n-r)$ .

**9.8. Příklad:** U čtyř odrůd brambor (označených symboly A, B, C, D) se zjišťovala celková hmotnost brambor vyrostlých vždy z jednoho trsu. Výsledky (v kg):

odrůda	hmotnost
A	0,9 0,8 0,6 0,9
B	1,3 1,0 1,3
C	1,3 1,5 1,6 1,1 1,5
D	1,1 1,2 1,0

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že střední hodnota hmotnosti trsu brambor nezávisí na odrůdě. Zamítnete-li nulovou hypotézu, zjistěte, které dvojice odrůd se liší na hladině významnosti 0,05.

**Řešení:**

Data považujeme za realizace čtyř nezávislých náhodných výběrů ze čtyř normálních rozložení se stejným rozptylem. Testujeme hypotézu, že všechny čtyři střední hodnoty jsou stejné.

Vypočítáme výběrové průměry v jednotlivých výběrech:

$$M_1 = 0,8, M_2 = 1,2, M_3 = 1,4, M_4 = 1,1,$$

$$\text{celkový průměr } M_{..} = 1,14,$$

výběrové rozptyly:

$$S_1^2 = 0,02, S_2^2 = 0,03, S_3^2 = 0,04, S_4^2 = 0,01,$$

vážený průměr výběrových rozptylů:

$$S_*^2 = \frac{\sum_{i=1}^r (n_i - 1) S_i^2}{n - r} = \frac{3 \cdot 0,02 + 2 \cdot 0,03 + 4 \cdot 0,04 + 2 \cdot 0,01}{11} = \frac{3}{110} = 0,027,$$

$$\text{reziduální součet čtverců: } S_E = (n - r) S_*^2 = 11 \cdot \frac{3}{110} = 0,3,$$

skupinový součet čtverců:

$$S_A = \sum_{i=1}^r n_i (M_i - M_{..})^2 =$$

$$= 4 \cdot (0,8 - 1,14)^2 + 3 \cdot (1,2 - 1,14)^2 + 5 \cdot (1,4 - 1,14)^2 + 3 \cdot (1,1 - 1,14)^2 = 0,816$$

$$\text{celkový součet čtverců: } S_T = S_A + S_E = 0,816 + 0,3 = 1,116,$$

$$\text{testová statistika } F_A = \frac{S_A / f_A}{S_E / f_E} = \frac{0,816 / 3}{0,3 / 11} = 9,97,$$

Kritický obor  $W = \langle F_{0,95}(3,11), \infty \rangle = \langle 3,59, \infty \rangle$ . Protože testová statistika se realizuje v kritickém oboru,  $H_0$  zamítáme na hladině významnosti 0,05.

$$\text{Vypočteme poměr determinace: } P^2 = \frac{S_A}{S_T} = \frac{0,816}{1,116} = 0,7312$$

Výsledky zapíšeme do tabulky ANOVA:

Zdroj variability	Součet čtverců	Stupně volnosti	podíl	$F_A$
skupiny	$S_A = 0,816$	3	$S_A/3 = 0,272$	$\frac{S_A/(r-1)}{S_E/(n-r)} = 9,97$
reziduální	$S_E = 0,3$	11	$S_E/11 = 0,02727$	-
celkový	$S_T = 1,116$	14	-	-

Nyní pomocí Scheffého metody zjistíme, které dvojice odrůd se liší na hladině významnosti 0,05.

Srovnávané odrůdy	Rozdíly $ M_k - M_l $	Pravá strana vzorce
A, B	0,4	0,41
A, C	0,67	0,36
A, D	0,3	0,41

B, C	0,2	0,40
B, D	0,1	0,44
C, D	0,3	0,40

Na hladině významnosti 0,05 se liší odrůdy A a C.

### Řešení pomocí systému STATISTICA

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných X a odrůda a 15 případech. Do proměnné X zapíšeme zjištěné hmotnosti, do proměnné odrůda kódy pro dané odrůdy (1 pro A, 2 pro B, 3 pro C a 4 pro D).

	1 X	2 odrůda
1	0,9	A
2	0,8	A
3	0,6	A
4	0,9	A
5	1,3	B
6	1	B
7	1,3	B
8	1,3	C
9	1,5	C
10	1,6	C
11	1,1	C
12	1,5	C
13	1,1	D
14	1,2	D
15	1	D

Vypočteme výběrové průměry a výběrové rozptyly:

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Rozklad & jednofakt. ANOVA – OK  
– Proměnné – Závislé – X, Grupovací - odrůda – OK – Skupiny tabulek - zaškrtneme Rozptyly - Výpočet.

odrůda	X průměr	X N	X Sm.odch.	X Rozptyl
A	0,800000	4	0,141421	0,020000
B	1,200000	3	0,173205	0,030000
C	1,400000	5	0,200000	0,040000
D	1,100000	3	0,100000	0,010000
Vš.skup.	1,140000	15	0,282337	0,079714

Nyní ověříme předpoklad shody rozptylů.

Na záložce Skupiny tabulek zaškrtneme Levenův test – Výpočet.



Levenův test homogenity rozptylů (příklad8301)								
Označ. efekty jsou význ. na hlad. $p < ,05000$								
Proměnná	SČ efekt	SV efekt	PČ efekt	SČ chyba	SV chyba	PČ chyba	F	p
X	0,018667	3	0,006222	0,065333	11	0,005939	1,047619	0,410027

Vidíme, že p-hodnota Levenova testu je 0,41, tedy větší než hladina významnosti 0,05. Hypotézu o shodě rozptylů nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

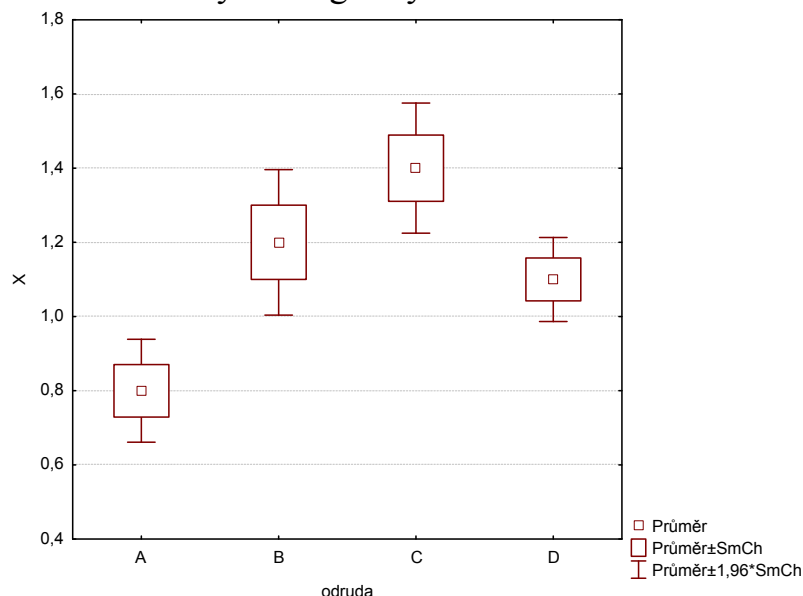
Přistoupíme k testu hypotézy o shodě středních hodnot.

Na záložce Skupiny tabulek zaškrtneme Analýza rozptylu – Výpočet.

Analýza rozptylu (příklad8301)								
Označ. efekty jsou význ. na hlad. $p < ,05000$								
Proměnná	SČ efekt	SV efekt	PČ efekt	SČ chyba	SV chyba	PČ chyba	F	p
X	0,816000	3	0,272000	0,300000	11	0,027273	9,973333	0,001805

Jelikož p-hodnota = 0,001805 je menší než hladina významnosti 0,05, hypotézu o shodě středních hodnot zamítáme na hladině významnosti 0,05.

Výpočet doplníme krabicovými diagramy:



Nyní aplikujeme Scheffého metodu mnohonásobného porovnávání, abychom zjistili, které dvojice odrůd se liší na hladině významnosti 0,05. Na záložce Post – hoc zvolíme Scheffův test.

Scheffeho test; proměn.:X (příklad8301)				
Označ. rozdíly jsou významné na hlad. $p < ,05000$				
odruda	{1}	{2}	{3}	{4}
	M=,80000	M=1,2000	M=1,4000	M=1,1000
A {1}		0,059165	<b>0,001950</b>	0,190463
B {2}	0,059165		0,464537	0,905502
C {3}	<b>0,001950</b>	0,464537		0,163499
D {4}	0,190463	0,905502	0,163499	

Tabulka obsahuje p-hodnoty pro vzájemné porovnání středních hodnot hmotnosti všech čtyř odrůd. Vidíme, že na hladině významnosti 0,05 se liší odrůdy A, C.

### 9.9. Význam předpokladů v analýze rozptylu

- Nezávislost jednotlivých náhodných výběrů** – velmi důležitý předpoklad, musí být splněn, jinak dostaneme nesmyslné výsledky.
- Normalita** – ANOVA není příliš citlivá na porušení normality, zvláště pokud mají všechny výběry rozsah nad 20 (důsledek centrální limitní věty). Při výraznějším porušení normality se doporučuje Kruskalův – Wallisův test.
- Shoda rozptylů** – mírné porušení nevadí, při větším se doporučuje Kruskalův – Wallisův test. Test shody rozptylů má smysl provádět až po ověření předpokladu normality.