12. Jednoduchá lineární regrese

12.1. Motivace

Cíl regresní analýzy - popsat závislost hodnot veličiny Y na hodnotách veličiny X.

Nutnost vyřešení dvou problémů:

a) jaký typ funkce se použije k popisu dané závislosti;
b) jak se stanoví konkrétní parametry daného typu funkce?

12.2. Specifikace klasického modelu lineární regrese

$Y = m(x;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)+\varepsilon$, kde

$m(x;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)$ - teoretická regresní funkce, která lineárně závisí na neznámých regresních parametrech $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p$ a známých funkcích $f_1(x),\ldots,f_p(x)$, které již neobsahují neznámé parametry, tj. $m(x;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)=\sum_{j=0}^{p}\beta_j f_j(x)$, přičemž $f_0(x)\equiv 1$.

Složka ε - náhodná odchylka .

Veličina Y - závisle proměnná (též vysvětlovaná) veličina.

Veličina X - nezávisle proměnná (též vysvětlující) veličina.

Pořídíme n dvojic pozorování $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$, pro i = 1, ..., n platí:

$y_i = m(x_i;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)+\varepsilon_i$.

O náhodných odchylkách $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ předpokládáme, že

a) $E(\varepsilon_i)=0$ (odchylky nejsou systematické)
b) $D(\varepsilon_i)=\sigma^2>0$ (všechna pozorování jsou prováděna s touž přesností)
c) $C(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$ pro $i\neq j$ (mezi náhodnými odchylkami neexistuje žádný lineární vztah)
d) $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$.

V tomto případě hovoříme o klasickém modelu lineární regrese.

12.3. Označení

$b_0,b_1,\ldots,b_p$ - odhady regresních parametrů $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p$ (nejčastěji je získáme metodou nejmenších čtverců, tj. z podmínky, že výraz

$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\sum_{j=0}^{p}\beta_j f_j(x_i)\right)^2$ nabývá svého minima pro $\beta_j = b_j$, j = 0, 1, …, p)

$\hat{m}(x;b_0,\ldots,b_p)$ - empirická regresní funkce

$\hat{y}_i = \hat{m}(x_i;b_0,\ldots,b_p)=\sum_{j=0}^{p}b_j f_j(x_i)$ - regresní odhad i-té hodnoty veličiny Y (i-tá predikovaná hodnota veličiny Y)

$e_i = y_i - \hat{y}_i$ - i-té reziduum

$S_E = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$ - reziduální součet čtverců

$s^2 = \frac{S_E}{n-p-1}$ - odhad rozptylu σ^2

$S_R = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - m_2)^2$ - regresní součet čtverců ($m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$)

$S_T = \sum_{i=1}^{n} (y_i - m_2)^2$ - celkový součet čtverců ($S_T = S_R + S_E$)

$ID^2 = \frac{S_R}{S_T} = 1 - \frac{S_E}{S_T}$ - index determinace ($0 \le ID^2 \le 1$)

$ID_{adj}{}^2 = ID^2 - \frac{(1-ID^2)p}{n-p-1}$ - adjustovaný index determinace

12.4. Maticový zápis klasického modelu lineární regrese

$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \boldsymbol{\varepsilon}$, kde

$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)'$ - vektor pozorování závisle proměnné veličiny Y,

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & f_1(x_1) & \ldots & f_p(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & f_1(x_n) & \ldots & f_p(x_n) \end{pmatrix}$ - regresní matice

(předpokládáme, že h(**X**) = p+1 < n)

$\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)'$ - vektor regresních parametrů,

$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)'$ - vektor náhodných odchylek.

Podmínky (a) až (d) lze zkráceně zapsat ve tvaru $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$.

Maticově zapsaná metoda nejmenších čtverců vede na rovnice

$\mathbf{X'X\beta} = \mathbf{X'y}$ - systém normálních rovnic

$\mathbf{b} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y}$ – odhad vektoru $\boldsymbol{\beta}$ získaný metodou nejmenších čtverců

$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Xb}$ – vektor regresních odhadů (vektor predikce)

$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ - vektor reziduí

Vlastnosti odhadu **b**:

- odhad **b** je lineární, neboť je vytvořen lineární kombinací pozorování $y_1, \ldots, y_n$ s maticí vah $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$;
- odhad **b** je nestranný, neboť $E(\mathbf{b}) = \boldsymbol{\beta}$;
- odhad **b** má varianční matici $var\,\mathbf{b} = \sigma^2(\mathbf{X'X})^{-1}$;
- odhad $\mathbf{b} \sim N_{p+1}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 (\mathbf{X'X})^{-1})$ vzhledem k platnosti podmínky (d);
- pro odhad **b** platí Gaussova - Markovova věta: Odhad $\mathbf{b} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y}$ je nejlepší nestranný lineární odhad vektoru $\boldsymbol{\beta}$. (Nejlepší v tom smyslu, že rozdíl varianční matice libovolného jiného nestranného odhadu vektoru $\boldsymbol{\beta}$ a varianční matice odhadu **b** je matice pozitivně semidefinitní.)

12.5. Intervaly spolehlivosti pro regresní parametry

$s_{b_j} = s\sqrt{v_{jj}}$ - směrodatná chyba odhadu b_j, kde v_{jj} je j-tý diagonální prvek matice $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$.

Pro j = 0, 1, ..., p statistika $T_j = \frac{b_j - \beta_j}{s_{b_j}} \sim t(n-p-1)$, tedy 100(1- α)% interval spolehlivosti pro β_j má meze: $b_j \pm t_{1-\alpha/2}(n-p-1)s_{b_j}$.

12.6. Testování významnosti modelu jako celku (celkový F-test)

Na hladině významnosti α testujeme

H_0: $(\beta_1,\ldots,\beta_p)' = (0,\ldots,0)'$ proti H_1: $(\beta_1,\ldots,\beta_p)' \neq (0,\ldots,0)'$.

(Nulová hypotéza říká, že dostačující je model konstanty.)

Testová statistika: $F = \frac{S_R/p}{S_E/(n-p-1)}$ má rozložení F(p, n-p-1), pokud H_0 platí.

Kritický obor: $W = \langle F_{1-\alpha}(p, n-p-1), \infty)$.

$F \in W \Rightarrow H_0$ zamítáme na hladině významnosti α.

Výsledky F-testu zapisujeme do tabulky analýzy rozptylu:

zdroj variability	součet čtverců	stupně volnosti	podíl	statistika F
model	S_R	p	S_R/p	$\frac{S_R/p}{S_E/(n-p-1)}$
reziduální	S_E	n-p-1	$S_E/(n-p-1)$	-
celkový	S_T	n-1	-	-

12.7. Testování významnosti regresních parametrů (dílčí t-testy)

Na hladině významnosti α pro j = 0,1, ..., p testujeme hypotézu

H_0: $\beta_j = 0$ proti H_1: $\beta_j \neq 0$.

Testová statistika: $T_j = \frac{b_j}{s_{b_j}}$ má rozložení t(n-p-1), pokud H_0 platí.

Kritický obor: $W = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-p-1)\rangle \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n-p-1), \infty)$.

$T_j \in W \Rightarrow H_0$ zamítáme na hladině významnosti α.

12.8. Příklad: U šesti obchodníků byla zjišťována poptávka po určitém druhu zboží loni (veličina X - v kusech) a letos (veličina Y - v kusech).

číslo. obchodníka	1	2	3	4	5	6
poptávka loni (X)	20	60	70	100	150	260
poptávka letos (Y)	50	60	60	120	230	320

a) Orientačně ověřte předpoklad, že data pocházejí z dvourozměrného normálního rozložení. Vypočtěte výběrový koeficient korelace mezi X a Y, interpretujte jeho hodnotu a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.

b) Předpokládejte, že závislost letošní poptávky na loňské lze vystihnout regresní přímkou. Sestavte regresní matici, vypočtěte odhady regresních parametrů a napište rovnici regresní přímky. Interpretujte parametry regresní přímky.

c) Najděte odhad rozptylu, vypočtěte index determinace a interpretujte ho.

d) Najděte 95% intervaly spolehlivosti pro regresní parametry.

e) Na hladině významnosti 0,05 proveďte celkový F-test.

f) Na hladině významnosti 0,05 proveďte dílčí t-testy.

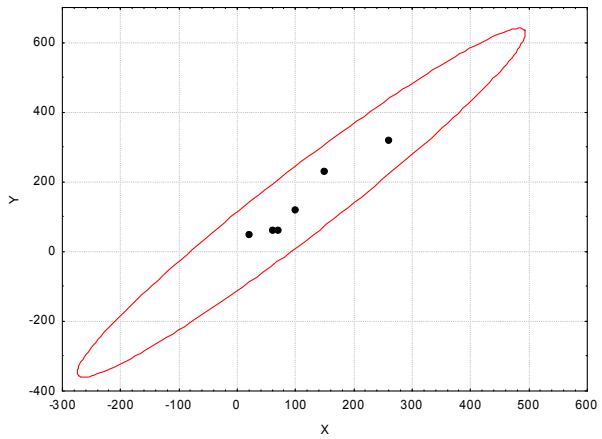
g) Vypočtěte regresní odhad letošní poptávky při loňské poptávce 110 kusů.

h) Nakreslete dvourozměrný tečkový diagram s proloženou regresní přímkou.

Řešení:

ad a) Orientačně ověřte předpoklad, že data pocházejí z dvourozměrného normálního rozložení.

Vytvoříme dvourozměrný tečkový diagram s proloženou 95% elipsou konstantní hustoty pravděpodobnosti:



Ze vzhledu diagramu je patrné, že předpoklad dvourozměrné normality je oprávněný a že mezi loňskou a letošní poptávkou existuje vcelku silná přímá lineární závislost.

Vypočtěte výběrový koeficient korelace mezi X a Y, interpretujte jeho hodnotu a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.
Výpočtem zjistíme: $r_{12} = 0{,}972$, tedy mezi poptávkou loni a letos existuje velmi silná přímá lineární závislost.

Realizace testové statistiky: $t = \frac{r_{12}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{12}^{\ 2}}} = \frac{0{,}972\sqrt{6-2}}{\sqrt{1-0{,}972^2}} = 8{,}2695$.

Kritický obor:

$$W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-2)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n-2), \infty\right) = \left(-\infty, -t_{0{,}975}(4)\right\rangle \cup \left\langle t_{0{,}975}(4), \infty\right) =$$
$$= \left(-\infty, -2{,}7764\right\rangle \cup \left\langle 2{,}7764, \infty\right)$$

Testová statistika se realizuje v kritickém oboru, hypotézu o nezávislosti veličin X a Y tedy zamítáme na hladině významnosti 0,05.

ad b) Sestavíme regresní matici.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & f_1(x_1) & \dots & f_p(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & f_1(x_n) & \dots & f_p(x_n) \end{pmatrix}, \text{ tedy } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 60 \\ 1 & 70 \\ 1 & 100 \\ 1 & 150 \\ 1 & 260 \end{pmatrix}.$$

Podle vzorce $\mathbf{b} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ získáme odhady regresních parametrů.
Nejprve vypočítáme matici

$$\mathbf{X'X} = \begin{pmatrix} 6 & 660 \\ 660 & 109000 \end{pmatrix}$$

a k ní inverzní matici

$$(\mathbf{X'X})^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}499084 & -0{,}003022 \\ -0{,}003022 & 0{,}000027 \end{pmatrix}.$$

Dále získáme součin

$$\mathbf{X'y} = \begin{pmatrix} 840 \\ 138500 \end{pmatrix}$$

a nakonec vektor odhadů regresních parametrů:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0{,}499084 & -0{,}003022 \\ -0{,}003022 & 0{,}000027 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 840 \\ 138500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6868 \\ 1{,}2665 \end{pmatrix}.$$

Regresní přímka má tedy rovnici

$y = 0{,}6868 + 1{,}2665\ x.$

Znamená to, že při nulové loňské poptávce by letošní poptávka činila 0,6868 kusů a při zvýšení loňské poptávky o 10 kusů by se letošní poptávka zvedla o 12,665 kusů.

ad c) Nyní vypočteme vektor regresních odhadů proměnné Y (vektor predikce):

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Xb} = \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 60 \\ 1 & 70 \\ 1 & 100 \\ 1 & 150 \\ 1 & 260 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6868 \\ 1{,}2665 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26{,}02 \\ 76{,}68 \\ 89{,}34 \\ 127{,}34 \\ 190{,}66 \\ 329{,}97 \end{pmatrix}.$$

Stanovíme vektor reziduí:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 60 \\ 120 \\ 230 \\ 320 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 26{,}02 \\ 76{,}68 \\ 89{,}34 \\ 127{,}34 \\ 190{,}66 \\ 329{,}97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23{,}98 \\ -16{,}68 \\ -29{,}34 \\ -7{,}34 \\ 39{,}34 \\ -9{,}97 \end{pmatrix}.$$

Pomocí vektoru reziduí vypočteme reziduální součet čtverců:

$$S_E = \mathbf{e'e} = (23{,}98 \;\; -16{,}68 \;\; -29{,}34 \;\; -7{,}34 \;\; 39{,}34 \;\; -9{,}97). \begin{pmatrix} 23{,}98 \\ -16{,}68 \\ -29{,}34 \\ -7{,}34 \\ 39{,}34 \\ -9{,}97 \end{pmatrix} = 3451{,}11.$$

Odhad rozptylu: $s^2 = \frac{S_E}{n-p-1} = \frac{3415{,}11}{6-1-1} = 853{,}78$.

Dále potřebujeme celkový součet čtverců
$S_T = (\mathbf{y} - \mathbf{m}_2)'(\mathbf{y} - \mathbf{m}_2)$,
kde $\mathbf{m}_2$ je sloupcový vektor typu nx1 složený z průměru m_2 závisle proměnné veličiny Y. V našem případě je $m_2 = 140$. Po dosazení do vzorce pro celkový součet čtverců tedy dostaneme

$$S_T = (50\text{-}140,\ 60\text{-}140,\ 60\text{-}140,\ 120\text{-}140,\ 230\text{-}140,\ 320\text{-}140) \begin{pmatrix} 50-140 \\ 60-140 \\ 60-140 \\ 120-140 \\ 230-140 \\ 320-140 \end{pmatrix} = 61800.$$

(Celkový součet čtverců lze získat také tak, že výběrový rozptyl veličiny Y vynásobíme n-1: $S_T = 5.12360 = 61800$.) Regresní součet čtverců pak je:
$S_R = S_T - S_E = 61800 - 3451{,}11 = 58348{,}89$.

Index determinace: $ID^2 = \frac{S_R}{S_T} = \frac{58348{,}89}{61800} = 0{,}9442$.

Znamená to, že variabilita hodnot závisle proměnné veličiny je z 94,42% vysvětlena regresní přímkou.
(V případě regresní přímky platí $ID^2 = r_{12}^2$. V našem případě bylo zjištěno, že $r_{12} = 0,972$, tedy $ID^2 = 0,9447$.)

ad d) Vypočteme směrodatné chyby odhadů regresních parametrů b_0 a b_1 podle vzorce $s_{b_j} = s\sqrt{v_{jj}}$, j = 0, 1, kde v_{jj} je j-tý diagonální prvek matice $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} 0,499084 & -0,003022 \\ -0,003022 & 0,000027 \end{pmatrix}$$

Přitom si uvědomíme, že $v_{00} = 0,499084$, $v_{11} = 0,000027$

$$s_{b_0} = s\sqrt{v_{00}} = \sqrt{853,78} \cdot \sqrt{0,499084} = 20,6424,$$

$$s_{b_1} = s\sqrt{v_{11}} = \sqrt{853,78} \cdot \sqrt{0,000027} = 0,1532.$$

Stanovíme meze 95% intervalů spolehlivosti pro regresní parametry β_0 a β_1.
K tomu slouží vzorec $b_j \pm t_{1-\alpha/2}(n-p-1)s_{b_j}$, j = 0, 1.

95% interval spolehlivosti pro β_0:

$$d = b_0 - t_{0,975}(4)s_{b_0} = 0,6868 - 2,7764 \cdot 20,6424 = -56,63$$

$$h = b_0 + t_{0,975}(4)s_{b_0} = 0,6868 + 2,7764 \cdot 20,6424 = 58$$

Znamená to, že $-56,63 < \beta_0 < 58$ s pravděpodobností aspoň 0,95.
95% interval spolehlivosti pro β_1:

$$d = b_1 - t_{0,975}(4)s_{b_1} = 1,2665 - 2,7764 \cdot 0,1532 = 0,841$$

$$h = b_1 + t_{0,975}(4)s_{b_1} = 1,2665 + 2,7764 \cdot 0,1532 = 1,692$$

Znamená to, že $0,841 < \beta_1 < 1,692$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad e) Provedení celkového F-testu: na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ testujeme H_0: $\beta_1 = 0$ proti H_1: $\beta_1 \neq 0$.

Testová statistika $F = \dfrac{S_R / p}{S_E / (n-p-1)} = \dfrac{58348,89/1}{3415,11/(6-1-1)} = 68,384$,

kritický obor: $W = \langle F_{1-\alpha}(p, n-p-1), \infty) = \langle F_{0,95}(1,4), \infty) = \langle 7,7086, \infty)$.

Protože se testová statistika realizuje v kritickém oboru, hypotézu o nevýznamnosti regresního parametru β_1 (tj. směrnice regresní přímky) zamítáme na hladině významnosti 0,05. Výsledky testování významnosti modelu jako celku zapíšeme do tabulky ANOVA:

zdroj variab.	součet čtverců	stupně volnosti	podíl	statistika F
model	S_R = 58348,89	p = 1	S_R/p=58348,89	68,384
reziduální	S_E = 3415,11	n-p-1 = 4	$S_E/(n-p-1)$=853,78	-
celkový	S_T = 61800	n-1 = 5	-	-

ad f) Provedení dílčích t-testů:
Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ testujeme H_0: $\beta_0 = 0$ proti H_1: $\beta_0 \neq 0$.

Testová statistika: $t_0 = \frac{b_0}{s_{b_0}} = \frac{0,6868}{20,6424} = 0,3327$,

kritický obor:

$$W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-p-1)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n-p-1), \infty\right) = \left(-\infty, -t_{0,975}(4)\right\rangle \cup \left\langle t_{0,975}(4), \infty\right) =$$
$$= \left(-\infty, -2,7764\right\rangle \cup \left\langle 2,7764, \infty\right)$$

Protože se testová statistika nerealizuje v kritickém oboru, hypotézu o nevýznamnosti regresního parametru β_0 (tj. posunutí regresní přímky) nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
Ke stejnému výsledku dospějeme, podíváme-li se na 95% interval spolehlivosti pro β_0. Vypočítali jsme, že $-56,63 < \beta_0 < 58$ s pravděpodobností aspoň 0,95. Protože tento interval obsahuje 0, hypotézu H_0: $\beta_0 = 0$ nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ testujeme H_0: $\beta_1 = 0$ proti H_1: $\beta_1 \neq 0$.

Testová statistika: $t_1 = \frac{b_1}{s_{b_1}} = \frac{1,2665}{0,1532} = 8,27$,

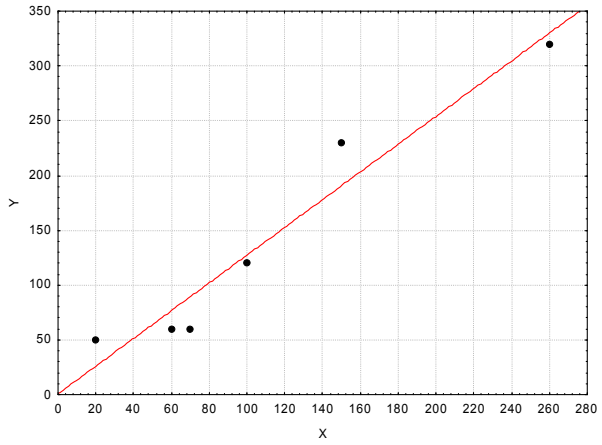
kritický obor:

$$W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-p-1)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n-p-1), \infty\right) = \left(-\infty, -t_{0,975}(4)\right\rangle \cup \left\langle t_{0,975}(4), \infty\right) =$$
$$= \left(-\infty, -2,7764\right\rangle \cup \left\langle 2,7764, \infty\right)$$

Protože se testová statistika realizuje v kritickém oboru, hypotézu o nevýznamnosti regresního parametru β_1 (tj. směrnice regresní přímky) zamítáme na hladině významnosti 0,05.
Ke stejnému výsledku dospějeme, podíváme-li se na 95% interval spolehlivosti pro β_1. Vypočítali jsme, že $0,841 < \beta_1 < 1,692$ s pravděpodobností aspoň 0,95. Protože tento interval neobsahuje 0, hypotézu H_0: $\beta_1 = 0$ zamítáme na hladině významnosti 0,05.
V případě modelu regresní přímky je dílčí t-test pro parametr β_1 ekvivalentní s celkovým F-testem.

ad g) Regresní odhad pro x = 110 dostaneme pouhým dosazením do rovnice regresní přímky: $\hat{y} = 0,6868 + 1,2665 \cdot 110 = 140$.

ad h)



Výpočet pomocí systému STATISTICA

Vytvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými X a Y a 6 případy:

	1 X	2 Y
1	20	50
2	60	60
3	70	60
4	100	120
5	150	230
6	260	320

a) Orientačně ověřte předpoklad, že data pocházejí z dvourozměrného normálního rozložení. Vypočtěte výběrový koeficient korelace mezi X a Y, interpretujte jeho hodnotu a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.

Zobrazíme dvourozměrný tečkový diagram s proloženou elipsou 95% konstantní hustoty pravděpodobnosti, s jehož pomocí posoudíme dvourozměrnou normalitu dat: Grafy – Bodové grafy – vypneme Typ proložení – Proměnné X, Y - OK . Na záložce Detaily vybereme Elipsa Normální – OK. Ve vzniklém dvourozměrném tečkovém diagramu změníme rozsah zobrazených hodnot na vodorovné a svislé ose, abychom viděli celou elipsu – viz obrázek výše. Testování hypotézy o nezávislosti: Statistika – Základní statistiky /Tabulky - Korelační matice – OK – 2 seznamy proměnných X, Y, OK. Na záložce Možnosti zaškrtneme Zobrazit detailní tabulku výsledků – Souhrn.

Prom. X & prom. Y	Korelace (Tabulka1) Označ. korelace jsou významné na hlad. p < ,05000 (Celé případy vynechány u ChD) Průměr	Sm.Odch.	r(X,Y)	r2	t	p	N	Konst. záv.: Y	Směr. záv: Y	Konst. záv.: X	Směrnic záv.: X
X	110,0000	85,3229									
Y	140,0000	111,1755	0,971977	0,944739	8,269474	0,001167	6	0,686813	1,266484	5,566343	0,745955

Ve výstupní tabulce najdeme hodnotu výběrového korelačního koeficientu R_{12} (r = 0,971977, tzn. že mezi X a Y existuje velmi silná přímá lineární závislost), realizaci testové statistiky t = 8,269474 a p-hodnotu pro test hypotézy o nezávislosti (p = 0,001167, H_0 tedy zamítáme na hladině významnosti 0,05).

b) Předpokládejte, že závislost letošní poptávky na loňské lze vystihnout regresní přímkou. Vypočtěte odhady regresních parametrů a napište rovnici regresní přímky. Interpretujte parametry regresní přímky.

Statistiky – Vícerozměrná regrese – Závisle proměnná Y, nezávisle proměnná X - OK – OK – Výpočet: Výsledky regrese.

N=6	Výsledky regrese se závislou proměnnou : Y (Tabulka1) R= ,97197702 R2= ,94473932 Upravené R2= ,93092415 F(1,4)=68,384 p<,00117 Směrod. chyba odhadu : 29,219					
	Beta	Sm.chyba beta	B	Sm.chyba B	t(4)	Úroveň p
Abs.člen			0,686813	20,64236	0,033272	0,975052
X	0,971977	0,117538	1,266484	0,15315	8,269474	0,001167

Ve výstupní tabulce najdeme koeficient b_0 ve sloupci B na řádku označeném Abs. člen, koeficient b_1 ve sloupci B na řádku označeném X. Rovnice regresní přímky:
y = 0,686813 + 1,266484 x.
Znamená to, že při nulové loňské poptávce by letošní poptávka činila 0,6868 kusů a při zvýšení loňské poptávky o 10 kusů by se letošní poptávka zvedla o 12,665 kusů.

c) Najděte odhad rozptylu, vypočtěte index determinace a interpretujte ho.

Vrátíme se do Výsledky – vícenásobná regrese – Detailní výsledky – ANOVA.

Efekt	Analýza rozptylu (Tabulka1)				
	Součet čtverců	sv	Průměr čtverců	F	Úroveň p
Regres.	58384,89	1	58384,89	68,38420	0,001167
Rezid.	3415,11	4	853,78		
Celk.	61800,00				

Odhad rozptylu najdeme na řádku Rezid., ve sloupci Průměr čtverců, tedy s^2 = 853,78.
Index determinace je uveden v záhlaví původní výstupní tabulky pod označením R2. V našem případě ID^2 = 0,9447, tedy variabilita letošní poptávky je z 94,5% vysvětlena regresní přímkou.

d) Najděte 95% intervaly spolehlivosti pro regresní parametry.

Ve výstupní tabulce výsledků regrese přidáme za proměnnou Úroveň p dvě nové proměnné dm (pro dolní meze 95% intervalů spolehlivosti pro regresní parametry) a hm (pro horní meze 95% intervalů spolehlivosti pro regresní parametry). Do Dlouhého jména proměnné dm resp. hm napíšeme: =v3-v4*VStudent(0,975;4) resp. =v3+v4*VStudent(0,975;4)

N=6	Výsledky regrese se závislou proměnnou : Y (Tabulka1) R= ,97197702 R2= ,94473932 Upravené R2= ,93092415 F(1,4)=68,384 p<,00117 Směrod. chyba odhadu : 29,219							
	Beta	Sm.chyba beta	B	Sm.chyba B	t(4)	Úroveň p	dm =v3-v4*V	hm =v3+v4*
Abs.člen			0,686813	20,64236	0,033272	0,975052	-56,6256	57,99918
X	0,971977	0,117538	1,266484	0,15315	8,269474	0,001167	0,841266	1,691701

Vidíme, že $-56{,}63 < \beta_0 < 58$ s pravděpodobností aspoň 0,95 a $0{,}841 < \beta_1 < 1{,}692$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

e) Na hladině významnosti 0,05 proveďte celkový F-test.

Testovou statistiku F-testu a odpovídající p-hodnotu najdeme v záhlaví výstupní tabulky regrese. Zde F = 68,384, p-hodnota < 0,00117, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nevýznamnosti modelu jako celku. (Výsledky F-testu jsou rovněž uvedeny v tabulce ANOVA.)

f) Na hladině významnosti 0,05 proveďte dílčí t-testy.

Výsledky dílčích t-testů jsou uvedeny ve výstupní tabulce regrese. Testová statistika pro test hypotézy H_0: $\beta_0 = 0$ je 0,033272, p-hodnota je 0,975052. Hypotézu o nevýznamnosti úseku regresní přímky tedy nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Testová statistika pro test hypotézy H_0: $\beta_1 = 0$ je 8,269474, p-hodnota je 0,001167. Hypotézu o nevýznamnosti směrnice regresní přímky tedy zamítáme na hladině významnosti 0,05.

g) Vypočtěte regresní odhad letošní poptávky při loňské poptávce 110 kusů.

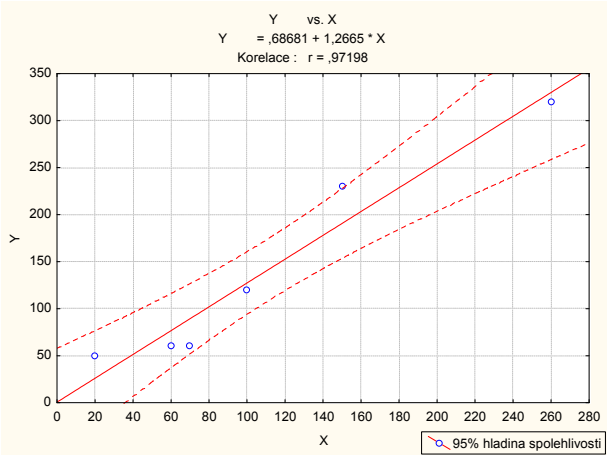
Pro výpočet predikované hodnoty zvolíme Rezidua/předpoklady/předpovědi Předpovědi závisle proměnné X: 110 OK. Ve výstupní tabulce je hledaná hodnota označena jako Předpověď.

Proměnná	Předpovězené hodnoty (Tabulka1 proměnné: Y		
	B-váž.	Hodnota	B-váž. * Hodnot
X	1,266484	110,0000	139,3132
Abs. člen			0,6868
Předpověď			140,0000
-95,0%LS			106,8803
+95,0%LS			173,1197

Při loňské poptávce 110 kusů je predikovaná hodnota letošní poptávky 140 kusů.

h) Nakreslete dvourozměrný tečkový diagram s proloženou regresní přímkou.

Nakreslení regresní přímky: Návrat do Výsledky: Vícenásobná regrese – Rezidua/předpoklady/předpovědi - Reziduální analýza – Bodové grafy – Korelace dvou proměnných – X, Y – OK.



Jiný způsob: Do dvourozměrného tečkového diagramu nakreslíme regresní přímku tak, že
v tabulce 2D Bodové grafy zvolíme Typ proložení: Lineární, OK.