Diferenční rovnice

Jiří Fišer

20. prosince 2006

Obsah

1 Motivace

Příklad 1 (Numerická řešení diferenciálních rovnic)**.** Při numerickém řešení (aproximací) diferenciálních rovnic ve skutečnosti používáme příslušnou diferenční rovnici, ať už si to uvědomujeme nebo ne. Ukažme si to na *Eulerově metodě*, jedné z nejjednodušších technik aproximace řešení diferenciální rovnice.

Uvažujme diferenciální rovnici prvního řádu

$$x'(t) = g(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t. \tag{1}$$

Interval $[t_0, b]$ rozdělíme na N stejných podintervalů. Velikost podintervalu nazýváme *velikostí kroku* metody a označujeme ji $h = \frac{b-t_0}{N}$. Velikost tohoto kroku definuje uzly t_0, t_1, t_2,..., t_N, kde $t_j = t_0 + jh$. Eulerova metoda aproximuje $x'(t)$ pomocí $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$.

n	t	(ΔR)-Euler ($h=0,2$) $x(n)$	(ΔR)-Euler ($h=0,1$) $x(n)$	(DR)-přesně $x(t)$
0	0	1	1	1
1	$0,1$		$1,14$	$1,150$
2	$0,2$	$1,28$	$1,301$	$1,328$
3	$0,3$		$1,489$	$1,542$
4	$0,4$	$1,649$	$1,715$	$1,807$
5	$0,5$		$1,991$	$2,150$
6	$0,6$	$2,170$	$2,338$	$2,614$
7	$0,7$		$2,791$	$3,286$
8	$0,8$	$2,969$	$3,406$	$4,361$
9	$0,9$		$4,288$	$6,383$
10	1	$4,343$	$5,645$	$11,681$

Tabulka 1: Eulerovy aproximace pro $h = 0,2$ a $0,1$ společně s přesnými hodnotami.

Dosazením do (1) dostaneme

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = g(x(t)),$$

a tedy

$$x(t+h) = x(t) + hg(x(t)).$$

Pro $t = t_0 + nh$ máme

$$x[t_0 + (n+1)h] = x(t_0 + nh) + hg[x(t_0 + nh)], \tag{2}$$

pro $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Při upraveném označení $x(n) = x(t_0 + nh)$ získáme

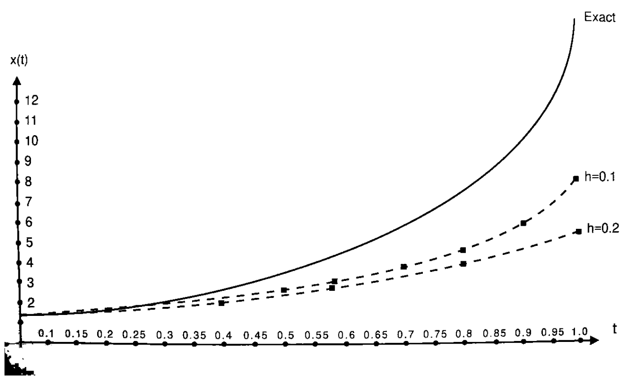
$$x(n+1) = x(n) + hg[x(n)]. \tag{3}$$

Rovnice (3) definuje *Eulerův algoritmus*, který aproximuje řešení diferenciální rovnice (1) v uzlových bodech.

Poznamenejme, že x^* je rovnovážným bodem diferenční rovnice (3) tehdy a jen tehdy když $g(x^*) = 0$. To znamená, že difernciální rovnice (1) a diferenční rovnice (3) mají stejné rovnovážné body.

Nyní aplikujeme Eulerovu metodu na diferenciální rovnici (DR):

$$x'(t) = 0,7x^2(t) + 0,7, \quad x(0) = 1, \quad t \in [0,1]. \tag{DR}$$



Obrázek 1: $(n, x(n))$-diagram.

Přesné řešení (pro kontrolu přesnosti metody) je $x(t) = \tan(0,7t + \frac{\pi}{4})$.

Příslušná diferenční rovnice (Δ R) s použitím Eulerovy metody je

$$x(n+1) = x(n) + 0,7h(x^2(n) + 1), \quad x(0) = 1. \qquad (\Delta R)$$

Tabulka 1 ukazuje Eulerovy aproximace pro $h = 0,2$ a $0,1$ společně s přesnými hodnotami. Obrázek 1 obsahuje $(n, x(n))$-diagram. Všimněte si, že čím menší je krok, tím přesnější jsou aproximace.

2 Dynamika diferenčních rovnic prvního řádu

2.1 Úvod

Diferenční rovnice obvykle popisují vývoj jistého fenoménu s během času. Například, jestliže nějaká populace má diskrétní generace, velikost $(n+1)$. generace $x(n+1)$ je funkcí n-té generace $x(n)$. Tento vztah se vyjadřuje jako *diferenční rovnice*

$$x(n+1) = f(x(n)). \qquad (4)$$

Na tento problém ale můžeme nahlížet i z jiného úhlu pohledu. Řekněmě, že zvolíme počáteční bod x_0 a budeme generovat posloupnost

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \ldots.$$

Pro zjednodušení přijmeme označení

$$f^2 = f(f(x_0)), f^3 = f(f(f(x_0))), \ldots.$$

$f(x_0)$ nazýváme *první iterací* x_0 vzhledem k f; $f^2(x_0)$ nazýváme druhou iterací x_0 vzhledem k f; a obecně, $f^n(x_0)$ je n-tou iterací x_0 vzhledem k f. Množina všech (kladných) iterací $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$ ($f^0(x_0) = x_0$) se nazývá *(kladná) orbita* bodu x_0 a budeme ji označovat $O(x_0)$. Tato iterativní procedura je příkladem *diskrétního dynamického systému*. S nastavením $x(n) = f^n(x_0)$ dostáváme

$$x(n+1) = f^{n+1}(x_0) = f\left[f^n(x_0)\right] = f(x(n)),$$

čímž opět dostáváme (4). Všimněme si, že $x(0) = f^0(x_0) = x_0$. Například, nechť $f(x) = x^2$ a $x_0 = 0,6$. Nyní, například na kalkulačce, počítáme opakovaně druhou mocninu a dostáváme posloupnost

$$0,6,\ 0,36,\ 0,1296,\ 0,01679616,\ \ldots.$$

Ještě pár iterací a každému je jasné, že iterace $f^n(0,6)$ směřují k nule. Dokažte, že stejnou limitu mají iterace pro $x_0 \in (-1;1)$, zatímco pro $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ směřují k nekonečnu. Zřejmě $f^n(0) = 0$ a $f^n(1) = 1$ pro $n = 0,1,2,\ldots$ a $f^n(-1) = 1$ pro $n = 1,2,\ldots$.

Z předchozího textu je zřejmé, že diferenční rovnice a diskrétní dynamické systémy představují dvě strany jedné mince. Když matematici hovoří o diferenčních rovnicích, obvykle mají na mysli analytickou teorii předmětu, zatímco diskrétní dynamické systémy se váží k topologickým a geometrickým aspektům.

Jestliže funkci f v (4) nahradíme funkcí g dvou proměnných, $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $\mathbb{Z}^+$ je množina všech nezáporných celých čísel a $\mathbb{R}$ je množina reálných čísel, potom dostaneme

$$x(n+1) = g(n, x(n)). \tag{5}$$

Rovnici (5) nazýváme *neautonomní* nebo závislou na čase, zatímco (4) je *autonomní* nebo nezávislá na čase. Studium (5) je mnohem komplikovanější a nepatří úplně do teorie diskrétních dynamických systémů rovnic prvního řádu. Jestliže máme dánu počáteční podmínku $x(n_0) = x_0$, potom pro $n \geq n_0$ existuje *jednoznačné* řešení $x(n) \equiv x(n, n_0, x_0)$ rovnice (5) takové, že $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$. Toto lze snadno ukázat pomocí iterování:

$$\begin{aligned}
x(n_0+1, n_0, x_0) &= g(n_0, x(n_0)) = g(n_0, x_0),\\
x(n_0+2, n_0, x_0) &= g(n_0+1, x(n_0+1)) = g(n_0+1, g(n_0, x_0)),\\
x(n_0+3, n_0, x_0) &= g(n_0+2, x(n_0+2)) = g\left[n_0+2, g(n_0+1, g(n_0, x_0))\right].
\end{aligned}$$

A indukcí dostáváme

$$x(n, n_0, x_0) = g\left[n-1, x(n-1, n_0, x_0)\right].$$

2.2 Lineární diferenční rovnice prvního řádu

Zde budeme studovat lineární rovnice — nejjednodušší speciální případy rovnic (4) a (5). Typická lineární *homogenní* rovnice prvního řádu má tvar

$$x(n+1) = a(n)x(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0 \tag{6}$$

a příslušná *nehomogenní* rovnice je dána předpisem

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad y(n_0) = y_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \tag{7}$$

kde u obou rovnic předpokládáme, že $a(n) \neq 0$ a $a(n)$ a $g(n)$ jsou reálné funkce definované pro $n \geq n_0 \geq 0$.

Řešení homogenní rovnice (6) můžeme opět získat prostým iterováním:

$$\begin{aligned} x(n_0+1) &= a(n_0)x(n_0) = a(n_0)x_0, \\ x(n_0+2) &= a(n_0+1)x(n_0+1) = a(n_0+1)a(n_0)x_0, \\ x(n_0+3) &= a(n_0+2)x(n_0+2) = a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)x_0. \end{aligned}$$

A pomocí indukce snadno nahlédneme, že[1]

$$\begin{aligned} x(n) &= x(n_0+n-n_0) \\ &= a(n-1)a(n-2)\cdots a(n_0)x_0 \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0. \end{aligned} \tag{8}$$

Jednoznačné řešení nehomogenní rovnice (7) může být nalezeno následovně:

$$\begin{aligned} y(n_0+1) &= a(n_0)y_0 + g(n_0), \\ y(n_0+2) &= a(n_0+1)y(n_0+1) + g(n_0+1) \\ &= a(n_0+1)a(n_0)y_0 + a(n_0+1)g(n_0) + g(n_0+1). \end{aligned}$$

Nyní opět pomocí matematické indukce ukážeme, že pro všechna $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r). \tag{9}$$

[1] Připomeňme, že při zkráceném zápisu součinu a součtu prvků ve speciálních případech platí: $\prod_{i=k+1}^{k} a(i) = 1$ a $\sum_{i=k+1}^{k} a(i) = 0$.

Při důkazu matematickou indukcí předpokládáme platnost vztahu (9) pro $n = k$, a tedy:

$$y(k) = \left[\prod_{j=n_0}^{k-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i)\right] g(r).$$

S použitím (7), $y(k+1) = a(k)y(k) + g(k)$, dostáváme:

$$\begin{aligned} y(k+1) &= a(k)\left[\prod_{i=n_0}^{k-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[a(k)\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i)\right] g(r) + g(k) \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right] g(r) + \left[\prod_{i=k+1}^{k} a(i)\right] g(k) \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k} \left[\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right] g(r). \end{aligned}$$

Tudíž vztah (9) platí pro všechna $n \in \mathbb{Z}^+$.

2.2.1 Důležité speciální případy

Existují dva speciální případy rovnice (7), které jsou důležité v mnoha aplikacích. První rovnice je dána vztahem

$$y(n+1) = ay(n) + g(n), \quad y(0) = y_0. \tag{10}$$

S použitím (9) zde dostaneme řešení

$$y(n) = a^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} g(k). \tag{11}$$

Druhé, ještě větší zjednodušení,

$$y(n+1) = ay(n) + b, \quad y(0) = y_0, \tag{12}$$

má řešení (využijeme (11))

$$y(n) = \begin{cases} a^n y_0 + b\left[\frac{a^n-1}{a-1}\right] & \text{if} \quad a \neq 1, \\ y_0 + bn & \text{if} \quad a = 1. \end{cases} \tag{13}$$

Na procvičení předchozích formulí uvedeme několik příkladů.

Příklad 2. Vyřešte rovnici

$$y(n+1) = (n+1)y(n) + 2^n(n+1)!, \quad y(0) = 1, \quad n > 0.$$

Řešení

$$\begin{aligned}
y(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r) \\
&= \left[\prod_{i=0}^{n-1}(i+1)\right] 1 + \sum_{r=0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} (i+1)\right] 2^r(r+1)! \\
&= n! + \sum_{r=0}^{n-1} \left[\frac{n!}{(r+1)!}\right] 2^r(r+1)! \\
&= n! + \sum_{r=0}^{n-1} n!2^r \\
&= 2^n n!,
\end{aligned}$$

neboť

$$n! + \sum_{r=0}^{n-1} n!2^r = n!\left(1 + \sum_{r=0}^{n-1} 2^r\right) = n!\left(1 + 1\frac{1-2^n}{1-2}\right) = n!\left(1 - 1 + 2^n\right) = n!2^n.$$

Příklad 3. Řešte rovnici

$$x(n+1) = 2x(n) + 3^n, \quad x(1) = 0,5.$$

Řešení $a(n) \equiv 2$ a $n_0 = 1$, tudíž

$$\begin{aligned}
x(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r) = \left[\prod_{i=1}^{n-1} a\right] y_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a\right] g(r) \\
&= \left[a^{n-1}\right] y_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \left[a^{n-r-1}\right] g(r) = \left[2^{n-1}\right] 0,5 + \sum_{r=1}^{n-1} 2^{n-r-1} 3^r \\
&= 2^{n-2} + 2^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^r = 2^{n-2} + 2^{n-1}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{3}{2}}\right)\right] \\
&= 2^{n-2} + 2^{n-1}\left[-3\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right)\right] = 2^{n-2} + 2^{n-1}\left[-3 + 3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right] \\
&= 2^{n-2} + 2^{n-1}\left[-3 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n}\right] = 2^{n-2} - 3\cdot 2^{n-1} + 2^n\left(\frac{3}{2}\right)^n \\
&= 2^{n-2} - 6\cdot 2^{n-2} + 3^n = 3^n - 5\cdot 2^{n-2}.
\end{aligned}$$

Příklad 4. Pacient užívá lék vždy po čtyřech hodinách. Nechť $D(n)$ je množství účinné látky v krevním systému v n-tém intervalu. Tělo během každého intervalu eliminuje p-tinu účinné látky. Nalezněte $D(n)$ a $\lim_{n\to\infty} D(n)$, jestliže užívaná dávka je D_0.
Řešení Nejprve musíme převést slovní zadání do rovnice, kterou potom vyřešíme. Zřejmě

$$D(n+1) = (1-p)D(n) + D_0.$$

S využitím (13) dostáváme

$$D(n) = \left[D_0 - \frac{D_0}{p}\right](1-p)^n + \frac{D_0}{p},$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} D(n) = \frac{D_0}{p}. \tag{14}$$

Nechť $D_0 = 2\,[cm^3]$ a $p = 0,25$, potom původní rovnice je

$$D(n+1) = 0,75D(n) + 2, \quad D_0 = 2.$$

Tabulka 2 obsahuje hodnoty $D(n)$ pro $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D(n)$	2	3.5	4.62	5.47	6.1	6.58	6.93	7.2	7.4	7.55	7.66

Tabulka 2: Hodnoty $D(n)$

Z (14) zjistíme, že rovnovážným stavem množství účinné látky v těle je $D^* = \lim_{n\to\infty} D(n) = 8\,[cm^3]$.

Příklad 5 (Umořování)**.** Umořování je proces, při kterém je splácen dluh (ne)pravidelnými platbami v pravidelných intervalech. Každá splátka se skládá z úroku za příslušné období a z částky snižující dluh (úmoru).

Nechť do každého období vstupujeme s dluhem $p(n)$, který je v tomto období úročen s úrokovou mírou r, vztaženou k platební periodě. Na konci n-tého období je realizována splátka $g(n)$.

Formulace našeho modelu je založena na faktu, že dluh $p(n+1)$ na počátku $(n+1)$-ho období je roven předchozí hodnotě dluhu $p(n)$, k níž musíme přičíst úrok za poslední období, $rp(n)$ a naopak odečíst splátku $g(n)$. Tedy

$$p(n+1) = p(n) + rp(n) - g(n) = (1+r)p(n) - g(n), \quad p(0) = p_0,$$

kde p_0 značí počáteční hodnotu dluhu. Jde o případ s konstantním koeficientem u $p(n)$, takže můžeme využít (11)

$$p(n) = (1+r)^n p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k-1} g(k).$$

Ve speciálním případu může jít o úlohu s konstantní splátkou ($g(n)$ je konstantní) nebo s konstantním úmorem ($p(n+1)-p(n)$ je konstantní. Úloha na výpočet pevného počtu n konstantních splátek T nás vede k rovnici $p(n) = 0$, konkrétně

$$p(n) = (1+r)^n p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k-1} T = (1+r)^n p_0 + \frac{(1+r)^n - 1}{r} T = 0.$$

Odtud

$$T = p_0 \left[\frac{r}{1-(1+r)^{-n}} \right].$$

Pro $p_0 = 100\,000$, $r = 0,1$ a $n = 5$ dostaneme

$$T = 100\,000 \left[\frac{0,1}{1-(1+0,1)^{-5}} \right] \approx 26\,380.$$

Umořovací plán naleznete v tabulce 3.

k	Dluh $p(k)$	Splátka $g(k)$	Úrok $rp(k)$	Úmor $g(k) - rp(k)$	Nový dluh $p(k+1)$
0	100 000	26 380	10 000	16 380	83 620
1	83 620	26 380	8 362	18 018	65 602
2	65 602	26 380	6 560	19 820	45 782
3	45 782	26 380	4 578	21 802	23 980
4	23 980	26 380	2 398	23 982	0
5	0				

Tabulka 3: Umořovací plán

Cvičení 2.1 a 2.2

1. Nalezněte řešení následujících diferenčních rovnic:

   (a) $x(n+1) - (n+1)x(n) = 0$, $x(0) = c$.

(b) $x(n+1) - 3^n x(n) = 0$, $x(0) = c$.

(c) $x(n+1) - e^{2n} x(n) = 0$, $x(0) = c$.

(d) $x(n+1) - \frac{n}{n+1} x(n) = 0$, $n \geq 1$, $x(1) = c$.

2. Nalezněte obecné řešení následujících diferenčních rovnic:

   (a) $y(n+1) - \frac{1}{2} y(n) = 2$, $y(0) = c$.

   (b) $y(n+1) - \frac{n}{n+1} y(n) = 4$, $y(0) = c$.

3. Nalezněte obecné řešení následujících diferenčních rovnic:

   (a) $y(n+1) - (n+1)y(n) = 2^n (n+1)!$, $y(0) = c$.

   (b) $y(n+1) = y(n) + e^n$, $y(0) = c$.

4. (a) Napište diferenční rovnici popisující počet oblastí vytvořených n přímkami v rovině, jestliže se každé dvě protnou, a to nejvýše dvě v jednom bodu.

   (b) Nalezněte zmíněný počet oblastí vyřešením nalezené diferenční rovnice.

5. Gama funkce je definována jako $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$, $x > 0$.

   (a) Ukažte, že $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(1) = 1$.

   (b) Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $\Gamma(n+1) = n!$.

   (c) Ukažte, že $x^{(n)} = x(x-1)\cdots(x-n+1) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)}$.

6. Prostor (3D) je rozdělen n rovinami, ze kterých žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné čtyři nemají společný bod.

   (a) Napište diferenční rovnici popisující počet vytvořených oblastí.

   (b) Nalezněte počet těchto oblastí.

7. Ověřte (11).

8. Ověřte (13).

9. Dluh \$12.000 má být umořen stejnými splátkami o velikosti \$380 na konci každého měsíce, plus poslední splátkou, která může být menší. Sestavte splátkový kalendář při roční úrokové míře 12% s měsíčním připisováním úroků.

10. Uvažujte půjčku ve výši \$80.000, která má být splacena stejnými měsíčními splátkami. Nalezněte výši této splátky, jestliže roční úroková míra je 10%, připisování úroků je měsíční a doba splácení je 30 let.

11. Uvažujme, že na konci každé periody uložíme sumu Tdo banky, která ji úročí s úrokovou mírou r vztaženou k dané periodě. Nechť $A(n)$ značí naspořenou částku po n periodách.

    (a) Napište diferenční rovnici, která popisuje $A(n)$.

    (b) Tuto diferenční rovnici vyřešte pro $A(0) = 0$, $T = \$200$ a $r = 0,008$.

12. Bylo zjištěno, že teplota tělesa je 110°F. Dále bylo vypozorováno, že vždy po dvou hodinách je změna teploty tělesa dána jako $-0,3$ násobek rozdílu předchozí teploty tělesa a teploty v místnosti, která je stále 70°F.

    (a) Napište diferenční rovnici, která popisuje teplotu $T(n)$ tělesa na konci n-té periody.

    (b) Nalezněte $T(n)$.

13. Uvažujete o hypotéce na 30 let při roční úrokové míře 8%. Kolik si můžete dovolit půjčit, jestliže jste schopni splácet \$1.000 měsíčně?

14. Radium se rozpadá v míře $0,04\%$ ročně. Jaký je jeho poločas rozpadu?

15. (Určování stáří uhlíkovou metodou) Je známo, že obsah uhlíku C_{14} v rostlinách a tělech živočichů je v době jejich života stejný jako v atmosféře. Po jejich úmrtí obsah uhlíku C_{14} v jejich tkáních klesá s mírou r.

    (a) Nalezněte r, jestliže poločas rozpadu uhlíku C_{14} je 5.700 let.

    (b) Jak stará je zkoumaná zvířecí kost, jestliže v ní zůstalo 70% původního množství uhlíku C_{14}?

3 Lineární diferenční rovnice vyššího řádu

V této kapitole se budeme věnovat lineárním diferenčním rovnicím vyšších řádů s jednou nezávislou proměnnou. Využití takovýchto rovnic je velmi široké, od populačních dynamik (studium jednoho druhu), přes ekonomii (studium jedné komodity) až k fyzice.

3.1 Diferenční počet

Diferenční počet je diskrétní analogii známého diferenciálního a integrálního počtu. Uvedeme některé základní vlastnosti dvou operátorů, které jsou podstatné při studiu diferenčních rovnic.

Diferenční operátor

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

a *šift operátor*

$$Ex(n) = x(n+1).$$

Zatímco vztah pro $E^k x(n)$ je jasný,

$$E^k x(n) = x(n+k),$$

pro $\Delta^k x(n)$ to již tak zřejmé není. Vypomůžeme si následujícím přepisem našich operátorů,

$$\Delta = E - I, \quad E = \Delta + I,$$

kde I je operátor identity, tj. $Ix = x$.

Nyní, s využitím binomického rozvoje, dostáváme

$$\begin{aligned} \Delta^k x(n) &= (E-I)^k x(n) \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} E^{k-i} x(n) \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x(n+k-i). \end{aligned} \tag{15}$$

Podobně můžeme dostat

$$E^k x(n) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^{k-i} x(n). \tag{16}$$

Operátor Δ je protějškem operátoru derivování D v diferenciálním počtu. Oba operátory, Δ i E, jsou lineární:

$$\Delta\big[ax(n) + by(n)\big] = a\Delta x(n) + b\Delta y(n)$$

a

$$E\big[ax(n) + by(n)\big] = aEx(n) + bEy(n),$$

pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$. Důkaz na vás čeká ve cvičení.

Uveďme si další důležité vlastnosti[2] (jejich důkaz je opět ponechán na cvičení):

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x(k) = x(n) - x(n_0); \tag{17}$$

$$\Delta\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} x(k)\right) = x(n). \tag{18}$$

Nyní si uvedeme třetí vlastnost operátoru Δ. Uvidíme, že ji má opět i operátor D.

Nechť

$$p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k$$

je polynom k-tého stupně. Potom

$$\begin{aligned} \Delta p(n) &= \big[a_0(n+1)^k + a_1(n+1)^{k-1} + \cdots + a_k\big] \\ &\quad -\big[a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k\big] \\ &= a_0 k n^{k-1} + \text{ členy stupně nižšího než } (k-1). \end{aligned}$$

Podobně lze ukázat, že

$$\Delta^2 p(n) = a_0 k(k-1) n^{k-2} + \text{ členy stupně nižšího než } (k-2).$$

Je zřejmé, že tento proces nás dovede ke vztahu

$$\Delta^k p(n) = a_0 k!, \tag{19}$$

a tedy

$$\Delta^{k+i} p(n) = 0, \text{ pro } i \geq 1. \tag{20}$$

[2]Můžeme nahlédnout, že se jedná o analogie vztahů $\int_a^b df(x) = f(b) - f(a)$ a $d\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$ z diferenciálního počtu.

3.2 Obecná teorie lineárních diferenčních rovnic

Normální tvar *nehomogenní lineární diferenční rovnice k-tého řádu* je následující:

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n), \tag{21}$$

kde $p_i(n)$ a $g(n)$ jsou reálné funkce definované pro $n \geq n_0$ a $p_k(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$.

$g(n) \equiv 0$ — homogenní rovnice.

Při $n = 0$ můžeme rovnici (21) přepsat

$$y(k) = -p_1(0)y(k-1) - \cdots - p_k(0)y(0) + g(0).$$

Takto máme vyjádřeno $y(k)$ a pro $n = 1$ dostaneme

$$y(k+1) = -p_1(1)y(k) - \cdots - p_k(1)y(1) + g(1).$$

Opakováním tohoto postupu můžeme vypočíst všechna $y(n)$ pro $n \geq k$. Toto ilustruje následující příklad.

Příklad 6. Uvažujme diferenční rovnici třetího řádu

$$y(n+3) - \frac{n}{n+1}y(n+2) + ny(n+1) - 3y(n) = n, \tag{22}$$

kde $y(1) = 0$, $y(2) = -1$ a $y(3) = 1$. Nalezněme hodnoty $y(4)$, $y(5)$,$y(6)$ a $y(7)$.

Řešení Rovnici přepíšeme do výhodnějšího tvaru

$$y(n+3) = \frac{n}{n+1}y(n+2) - ny(n+1) + 3y(n) + n. \tag{23}$$

Nyní pro $n = 1$ a po dosazení za $y(1)$, $y(2)$ a $y(3)$ dostáváme

$$y(4) = \frac{1}{2}y(3) - 1y(2) + 3y(1) + 1 = \frac{1}{2}1 - 1(-1) + 3 \cdot 0 + 1 = \frac{5}{2}.$$

Podobně pro $n = 2$

$$y(5) = \frac{2}{3}y(4) - 2y(3) + 3y(2) + 2 = -\frac{4}{3}.$$

Pro $n = 3$

$$y(6) = \frac{3}{4}y(5) - 3y(4) + 3y(3) + 3 = -\frac{5}{2}.$$

Pro $n = 4$

$$y(7) = \frac{4}{5}y(6) - 4y(5) + 3y(4) + 4 = \frac{89}{6}.$$

Řekneme, že posloupnost $\{y(n)\}_{n=0}^{\infty}$ nebo jednoduše $y(n)$ je *řešením* (21), jestliže tuto rovnici splňuje (pro všechna $n \geq n_0$).

Příslušná počáteční úloha:

$$\begin{aligned} y(n+k)+p_1(n)y(n+k-1)+\cdots+p_k(n)y(n) &= g(n), & (24)\\ y(n_0)=a_0, y(n_0+1)=a_1,\ldots,y(n_0+k-1) &= a_{k-1}, & (25)\end{aligned}$$

kde a_i jsou reálná čísla.

Věta 1. *Počáteční úloha (24) a (25) má právě jedno řešení* $y(n)$.

Důkaz. Důkaz vychází z postupného výpočtu jako v příkladu 6. Postupně pro $n = n_0, n_0+1, \ldots$ dostaneme posloupnost $\{y(n)\}_{n=n_0+k}^{\infty}$, což nám ve spojení s počátečními podmínkami (25) dává celé řešení $\{y(n)\}_{n=n_0}^{\infty}$. Z postupu vyplývá i jednoznačnost. □

Iterativně tedy řešení počáteční úlohy můžeme získat vždy, se ziskem explicitního tvaru řešení (např. $y(n) = 2ny(n_0)$) je to obecně mnohem složitější. Proto se později omezíme na úlohy s konstantními koeficienty p_i.

V dalším podrobně prostudujeme homogenní část lineární diferenční rovnice k-tého řádu, tedy

$$y(n+k)+p_1(n)y(n+k-1)+\cdots+p_k(n)y(n)=0. \tag{26}$$

Uvedeme tři důležité definice.

Definice 1. Řekneme, že funkce $f_1(n), f_2(n), \ldots, f_r(n)$ jsou *lineárně závislé* pro $n \geq n_0$, jestliže existují konstanty $a_1, a_2, \ldots, a_r$ ne všechny nulové a takové, že

$$a_1f_1(n)+a_2f_2(n)+\cdots+a_rf_r(n)=0, \quad n \geq n_0.$$

Jestliže například $a_j \neq 0$, potom vydělením předchozí rovnosti zjistíme, že $f_j(x)$ se dá vyjádřit jako lineární kombinace ostatních funkcí,

$$f_j(n) \;=\; -\sum_{i\neq j}\frac{a_i}{a_j}f_i(n). \tag{27}$$

Pro dvojici funkcí ($r=2$) to znamená, že jedna je násobkem druhé, $f_1(n) = af_2(n)$, $a \neq 0$.

Opakem lineární závislodsti je *lineární nezávislost*:

$$\big(a_1f_1(n)+a_2f_2(n)+\cdots+a_rf_r(n)=0,\ n\geq n_0\big) \Longrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_r=0.$$

Příklad 7. Ukažte, že funkce 3^n, $n3^n$, a $n^2 3^n$ jsou lineárně nezávislé pro $n \geq 0$.

Řešení Rovnici

$$a_1 3^n + a_2 n 3^n + a_3 n^2 3^n = 0, \quad n \geq 0$$

podělíme 3^n a dostaneme

$$a_1 + a_2 n + a_3 n^2 = 0, \quad n \geq 0,$$

a tedy $a_1 = 0$. Rovnici

$$a_2 n + a_3 n^2 = 0, \quad n \geq 0$$

podělíme n a dostaneme

$$a_2 + a_3 n = 0, \quad n \geq 0,$$

a tedy již vidíme, že nutně také $a_2 = a_3 = 0$.

Definice 2. Množinu k lineárně nezávislých řešení (26) nazýváme *fundamentální množina* řešení.

V předchozím příkladu jsme si mohli uvědomit, že ověření lineární nezávislosti jen podle definice nemusí být vždy snadné. Naštěstí existuje jednodušší metoda založená na tzv. casoratiánu[3]:

Definice 3. Casoratián $W(n)$ řešení $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_r(n)$ je dán předpisem

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \cdots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \cdots & x_r(n+1) \\ \vdots & & & \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \cdots & x_r(n+r-1) \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Příklad 8. Uvažujte diferenční rovnici

$$x(n+3) - 7x(n+1) + 6x(n) = 0.$$

(a) Ukažte, že posloupnosti 1, $(-3)^n$ a 2^n jsou její řešení.

(b) Nalezněte casoratián posloupností z bodu (a).

Řešení

[3]Diskrétní obdoba wronskiánu u diferenciálních rovnic.

ad (a) Stačí dosadit.

ad (b)

$$
\begin{aligned}
W(n) &= \det\begin{pmatrix} 1 & (-3)^n & 2^n \\ 1 & (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \end{pmatrix} \\
&= 1\begin{vmatrix} (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \end{vmatrix} - (-3)^n \begin{vmatrix} 1 & 2^{n+1} \\ 1 & 2^{n+2} \end{vmatrix} + 2^n \begin{vmatrix} 1 & (-3)^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} \end{vmatrix} \\
&\vdots \\
&= -20 \cdot 2^n \cdot (-3)^n.
\end{aligned}
$$

Dá se ukázat, že množina k řešení je fundamentální (tj. lineárně nezávislá), jestliže její casoratián $W(n)$ není nikdy nulový ($n \geq n_0$). To znamená, že v předchozím příkladu, kde $W(n) = -20 \cdot 2^n \cdot (-3)^n$, o fundamentální množinu jde. Obecně ale nemusí být snadné vypočíst a vyhodnotit casoratián pro každé $n \geq n_0$. Naštěstí lze vyjádřit $W(n)$ jako součin pomocí $W(n_0)$, což nás vede k následujícímu závěru:

Důsledek 1. *Předpokládejme, že $p_k(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$. Potom je casoratián $W(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$ právě když $W(n_0) \neq 0$.*

Věta 2. *Množina řešení $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ rovnice (26) je fundamentální tehdy a jen tehdy, jestliže pro nějaké $n_0 \geq 0$ platí $W(n_0) \neq 0$.*

Příklad 9. Ověřte, že $\{n, 2^n\}$ je fundamentální množinou řešení rovnice

$$x(n+2) - \frac{3n-2}{n-1}x(n+1) + \frac{2n}{n-1}x(n) = 0.$$

Řešení Nejprve je samozřejmě třeba dosadit ověřovaná řešení do rovnice.

Casoratián:

$$W(n) = \det\begin{pmatrix} n & 2^n \\ n+1 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Podle věty 2 stačí nalézt jednu hodnotu n_0, pro kterou $W(n_0) \neq 0$. Nejjednodušší bude vzít $n_0 = 0$, a tedy

$$W(0) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Podle věty 2 jsou řešení $n, 2^n$ lineárně nezávislá, a tak tvoří fundamentální množinu řešení.

Příklad 10. Uvažujte diferenční rovnici třetího řádu

$$x(n+3) + 3x(n+2) - 4x(n+1) - 12x(n) = 0.$$

Ukažte, že funkce 2^n, $(-2)^n$ a $(-3)^n$ tvoří její fundamentální množinu řešení.

Věta 3 (O existenci fundamentální množiny řešení homogenní úlohy)**.** *Jestliže $p_k(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$, potom (26) má fundamentální množinu řešení pro $n \geq n_0$.*

Ukažte, že lineární kombinace řešení homogenní úlohy (26) je také řešením (26). Tento fakt nás vede k následující definici obecného řešení.

Definice 4 (Obecné řešení homogenní úlohy)**.** Nechť $\{x_1(n), x_2/n), \ldots, x_k(n)\}$ je fundamentální množina řešení (26).

Potom *obecné řešení* (26) je dáno vztahem

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n), \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Každé řešení (26) lze získat z obecného řešení vhodnou volbou parametrů a_i.

Cvičení 3.2

1. Najděte casoratián následujících funkcí a zjistěte, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

   (a) $5^n, 3 \cdot 5^{n+2}, e^n$.

   (b) $5^n, n \cdot 5^n, n^2 \cdot 5^n$.

   (c) $(-2)^n, 2^n, 3$.

   (d) $0, 3^n, 7^n$.

2. Pro následující diferenční rovnice a jejich řešení

   (i) určete, zda jsou řešení lineárně nezávislá a

   (ii) nalezněte, pokud to půjde (použijte pouze daná řešení), obecná řešení.

   (a) $x(n+3) - 3x(n+2) + 3x(n+1) - x(n) = 0$; $1, n, n^2$.

   (b) $x(n+2) + x(n) = 0$; $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

   (c) $x(n+3) + x(n+2) - 8x(n+1) - 12x(n) = 0$; $3^n, (-2)^n, (-2)^{n+3}$.

   (d) $x(n+4) - 16x(n) = 0$; $2^n, n2^n, n^2 2^n$.

3.3 Lineární homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujeme diferenční rovnici k-tého řádu s konstantními koeficienty:

$$x(n+k) + p_1 x(n+k-1) + p_2 x(n+k-2) + \cdots + p_k x(n) = 0, \tag{29}$$

kde p_i jsou konstanty a $p_k \neq 0$. Chceme pro ni nalézt fundamentální množinu řešení a potažmo i obecné řešení.

Postup bude poměrně jednoduchý. Budeme předpokládat, že řešení (29) mají tvar λ^n, kde λ je komplexní číslo. Dosadíme do (29) a dostaneme tzv. *charakteristickou rovnici*

$$\lambda^k + \lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \cdots + p_k = 0. \tag{30}$$

Její kořeny nazýváme *charakteristické kořeny*. Poznamenejme, že zřejmě žádný z nich není nulový, neboť $p_k \neq 0$.

Mohou nastat dva základní případy:

(a) *Charakteristické kořeny $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou různé.* Dokážeme, že v tomto případě funkce $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n$ tvoří fundamentální množinu řešení (29). Postačí ukázat, že $W(0) \neq 0$.

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Tento determinant se nazývá Vandermodův a dá se ukázat (pokuste se), že

$$W(0) = \prod_{1 \leq j \leq k} (\lambda_j - \lambda_k),$$

takže $W(0) \neq 0$ a $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ je opravdu fundamentální množinou řešení (29).

Obecné řešení (29) má tedy tvar

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^n, \quad a_i \in \mathbb{R}. \tag{32}$$

(b) *Násobné charakteristické kořeny $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$* s odpovídajícími násobnostmi $m_1, m_2, \ldots, m_r$. V tomto případě můžeme (29) zapsat jako

$$(E - \lambda_1)^{m_1} (E - \lambda_2)^{m_2} \cdots (E - \lambda_r)^{m_r} x(n) = 0, \tag{29'}$$

Zde je důležité, že řešení $\psi_1(n), \psi_2(n), \ldots, \psi_{m_i}(n)$ rovnice

$$(E - \lambda_i)^{m_i} x(n) = 0$$

jsou zároveň řešeními rovnice (29').

Lemma 1. *Množina*

$$G_i = \left\{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, n^2\lambda_i^n, \ldots, n^{m_i-1}\lambda_i^n\right\}$$

je fundamentální množinou řešení rovnice $(E - \lambda_i)^{m_i} x(n) = 0.$

Důsledek 2. *Množina*

$$G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i$$

je fundamentální množinou řešení (29').

Důsledek 3. *Obecné řešení (29') je dáno vztahem*

$$x(n) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n \big(a_{i0} + a_{i1}n + a_{i2}n^2 + \cdots + a_{im_i-1}n^{m_i-1}\big).$$

Příklad 11. Řešte rovnici

$$x(n+3) - 7x(n+2) + 16x(n+1) - 12x(n) = 0,$$
$$x(0) = 0, x(1) = 1, x(2) = 1.$$

Řešení Charakteristická rovnice:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0.$$

Charakteristické kořeny:

$$\lambda_1 = 2 = \lambda_2, \lambda_3 = 3,$$

tedy násobné.

Obecné řešení:

$$x(n) = a_0 2^n + a_1 n 2^n + b_1 3^n.$$

Po dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$a_0 = 3, a_1 = 2, b_1 = -3,$$

a tedy řešením počáteční úlohy je

$$x(n) = 3 \cdot 2^n + 2n2^n - 3^{n+1}.$$

Příklad 12 (Komplexní charakteristické kořeny)**.** Předpokládejme, že rovnice

$$x(n+2) + p_1 x(n+1) + p_2 x(n) = 0$$

má komplexní charakteristické kořeny

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

Její obecné řešení by tedy mělo tvar

$$x(n) = c_1(\alpha + i\beta)^n + c_2(\alpha - i\beta)^n.$$

Zopakujme si, že bod (α, β) v komplexní rovině odpovídá komplexnímu bodu $\alpha + i\beta$. V polárních souřadnicích:

$$\alpha = r\cos\theta, \quad \beta = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Dá se ukázat, že

$$x_1(n) = r^n \cos(n\theta) \quad \text{a} \quad x_2(n) = r^n \sin(n\theta)$$

jsou dvě lineárně nezávislá řešení.

Například rovnice

$$(E^2 + 1)x(n) = 0 \tag{33}$$

má dva komplexně sdružené charakteristické kořeny

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i.$$

Tudíž

$$\alpha = 0, \beta = \pm 1, r = 1, \theta = \pm\frac{\pi}{2}$$

a tedy budeme ověřovat, že

$$x_1(n) = 1^n \cos(n\frac{\pi}{2}) \quad \text{a} \quad x_2(n) = 1^n \sin(n\frac{\pi}{2})$$

jsou dvě lineárně nezávislá řešení rovnice 33.

Řešení: $(E^2+1)x_1(n) = x_1(n+2) + x_1(n) = \cos\big((n+2)\frac{\pi}{2}\big) + \cos(n\frac{\pi}{2}) = \cos\big(n\frac{\pi}{2} + \pi\big) + \cos(n\frac{\pi}{2}) = -\cos(n\frac{\pi}{2}) + \cos(n\frac{\pi}{2}) = 0$. Obdobně i pro $x_2(n) = \sin(n\frac{\pi}{2})$.

Nezávislost: casoratián pro $n = 0$

$$W(0) = \det\begin{pmatrix} \cos(n\frac{\pi}{2}) & \sin(n\frac{\pi}{2}) \\ \cos((n+1)\frac{\pi}{2}) & \sin((n+1)\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \cdots = 1 \neq 0.$$

Příklad 13 (Fibonacciho posloupnost (Králičí problém))**.** Králíci se množí, každý pár vrhne na konci každého měsíce (kromě prvního) svého života další pár. Množství párů králíků na konci n-tého měsíce označíme $F(n)$. Rozdělme si tyto páry na nedospělé (na konci následujícího měsíce ještě nevrhnou, ale stanou se dospělými) a dospělé:

$$F(n) = F_0(n) + F_1(n).$$

Na konci následujícího měsíce tedy $F_1(n)$ párů vrhne další pár a $F_0(n)$ párů dospěje (žádný králík neumírá ani neztrácí plodnost), což můžeme zapsat následovně:

$$\begin{aligned} F_0(n+1) &= F_1(n), \\ F_1(n+1) &= F_1(n) + F_0(n) = F(n), \\ F(n+1) &= F_0(n+1) + F_1(n+1) = F_1(n) + F(n). \end{aligned}$$

Podobně i v následujícím měsíci:

$$\begin{aligned} F_0(n+2) &= F_1(n+1) = F(n), \\ F_1(n+2) &= F_1(n+1) + F_0(n+1) = F(n+1), \\ F(n+2) &= F_0(n+2) + F_1(n+2) = F(n) + F(n+1). \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy (Fibonacciho) diferenční rovnici druhého řádu

$$F(n+2) = F(n) + F(n+1).$$

Její chrakteristická rovnice

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

má dva kořeny

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{a} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Obecné řešení:

$$F(n) = a_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Uvažujme množení od jediného páru, který je sám vržen na konci prvního měsíce. Tomu odpovídají počáteční hodnoty $F(1) = 1$ a $F(2) = 1$. Po dosazení dostaneme

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Následně:

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^n - \beta^n \right). \qquad (34)$$

Zajímavé je, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \equiv 1,618,$$

což je tzv. *zlatý poměr.*

Cvičení 3.3

V následujících cvičeních najděte obecné řešení uvedených diferenčních rovnic.

Připomeňme, že E je tzv. šift-operátor: $Ex(n) = x(n+1)$, $E^k x(n) = x(n+k)$. Zápis $(E-2)^2 x(n) = (E^2-4E+4)x(n) = x(n+2)-4x(n+1)+4x(n)$ nám umožňuje zapsat diferenční rovnici způsobem, který připomíná zápis polynomu ve tvaru součinu kořenových činitelů, takže okamžitě vidíme, jaké má diferenční rovnice charakteristické kořeny (zde $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$).

1. $x(n+2) - 16x(n) = 0$.
2. $x(n+2) + 16x(n) = 0$.
3. $(E-3)^2(E^2+4)x(n) = 0$ ($\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2i$, $\lambda_4 = -2i$).
4. $\Delta^3 x(n) = 0$.
5. $(E^2+2)^2 x(n)$.
6. $x(n+2) - 6x(n+1) + 14x(n) = 0$.

3.4 Lineární nehomogenní rovnice: metoda neurčitých koeficientů

V posledních dvou oddílech jsme se věnovali teorii lineárních homogenních diferenčních rovnic. V případě rovnic s konstantními koeficienty umíme najít jejich řešení. Zde se vrátíme k nehomogenním lineárním diferenčním rovnicím k-tého řádu,

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n), \tag{35}$$

kde $p_i(n)$ a $g(n)$ jsou reálné funkce definované pro $n \geq n_0$ a $p_k(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$.

Na tuto rovnici můžeme pohlížet tak, že levá strana popisuje nějaký fyzikální systém a $g(n)$ se bere jako vnější činitel, přičemž studujeme, jakým způsobem $y(n)$ (výstup) reaguje na $g(n)$ (vstup).

Než přejdeme k obecným výsledkům, položme si otázku, zda množina řešení nehomogenní úlohy tvoří vektorový prostor. Jinými slovy, je lineární kombinace dvou řešení opět řešením? Odpovíme si pomocí následujícího příkladu.

Příklad 14. Uvažujme rovnici

$$y(n+2) - y(n+1) - 6y(n) = 5 \cdot 3^n.$$

(a) Ukažte, že $y_1 = n \cdot 3^{n-1}$ a $y_2 = (1+n)3^{n-1}$ jsou řešeními naší rovnice.

(b) Ukažte, že $y(n) = y_2(n) - y_1(n)$ není řešením.

(c) Ukažte, že $\varphi(n) = cn3^{n-1}$, $c \in \mathbb{R}$, není řešením.

Řešení

ad (a) Proveďte sami.

ad (b) $y(n) = y_2(n) - y_1(n) = n \cdot 3^{n-1} - (1+n)3^{n-1} = 3^{n-1}$. Dosazením do rovnice obdržíme

$$3^{n+1} - 3^n - 6 \cdot 3^{n-1} = 3^n[3 - 1 - 2] = 0 \neq 5 \cdot 3^n.$$

ad (c) Zde opět pomocí dosazení zjistíme, že $\varphi(n)$ není řešením.

Závěr

(i) Z příkladu je zřejmé, že řešení nehomogenní (na rozdíl od homogenní) úlohy netvoří vektorový prostor. Ani součet, ani násobek řešení není dalším řešením.

(ii) Bod (b) poukazuje na obecnou vlastnost řešení nehomogenní úlohy, jmenovitě je rozdíl dvou řešení řešením homogenní úlohy. Tento závěr je formulován v následující větě.

Věta 4. *Jestliže $y_1(n)$ a $y_2(n)$ jsou řešeními nehomogenní úlohy (35), potom jejich rozdíl, $x(n) = y_1(n) - y_2(n)$, je řešením odpovídající homogenní úlohy*

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = 0. \tag{36}$$

Důkaz. Proveďte sami. □

V dalším budeme používat následující označení. Obecné řešení homogenní úlohy budeme nazývat *komplementární* a značit $y_c(n)$, zatímco řešení nehomogenní úlohy budeme nazývat *partikulární* a značit $y_p(n)$. Následující výsledek ukazuje, jakým způsobem můžeme najít všechna řešení nehomogenní úlohy při znalosti jednoho partikulárního řešení.

Věta 5. *Libovolné řešení $y(n)$ nehomogenní úlohy (35) lze zapsat jako*

$$y(n) = y_p(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n),$$

kde $\{x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)\}$ je fundamentální množina řešení homogenní úlohy (36).

Důkaz. Z věty 4 víme, že rozdíl dvou partikulárních řešení je řešením homogenní úlohy, a tedy musí platit, že

$$y(n) - y_p(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n),$$

pro nějaké konstanty a_i. □

Nyní tedy víme, že obecné řešení nehomogenní úlohy lze zapsat jako

$$y(n) = y_p(n) + y_c(n). \tag{37}$$

Nyní obrátíme pozornost na hledání partikulárního řešení nehomogenní úlohy s konstantními koeficienty,

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = g(n). \tag{38}$$

Použijeme metodu *neurčitých koeficientů*. Tato metoda je postavena na inteligentním odhadu tvaru partikulárního řešení. Tento (trochu neurčitý) tvar dosadíme do rovnice a dohledáme (zatím neurčité) koeficienty. Pro úplně obecné $g(n)$ tato metoda není efektivní, ale ukážeme, že lze definovat pravidla postupu ve speciálním případě, kdy $g(n)$ je lineární kombinací členů

$$a^n, \quad \sin(bn), \quad \cos(bn) \quad \text{a} \quad n^k, \tag{39}$$

nebo jejich součinů, jako jsou například

$$a^n \sin(bn), \quad a^n n^k, \quad a^n n^k \cos(bn), \ldots. \tag{40}$$

K formulaci neurčitého tvaru partikulárního řešení využijeme tabulku 4

$g(n)$	$y_p(n)$
a^n	ca^n
n^k	$c_0 + c_1 n + \cdots + c_k n^k$
$n^k a^n$	$c_0 a^n + c_1 n a^n + \cdots + c_k n^k a^n$
$\sin(bn), \cos(bn)$	$c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn)$
$a^n \sin(bn), a^n \cos(bn)$	$\big(c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn)\big) a^n$
$a^n n^k \sin(bn), a^n n^k \cos(bn)$	$(c_0 + c_1 n + \cdots + c_k n^k) a^n \sin(bn)$
	$+(d_0 + d_1 n + \cdots + d_k n^k) a^n \cos(bn)$

Tabulka 4: Partikulární řešení $y_p(n)$.

Při známém tvaru obecného řešení homogenní úlohy musíme uvažovat dva oddělené případy:

1. V neurčitém tvaru partikulárního řešení se nevyskytují funkce fundamentální množiny řešení homogenní úlohy. V tomto případě $y_p(n)$ z tabulky 4 dosadíme zpět do (38) a najdeme hodnoty koeficientů.

2. Pokud se v neurčitém tvaru partikulárního řešení vyskytuje funkce fundamentální množiny řešení homogenní úlohy, potom ji násobíme dostatečně vysokou mocninou n a opět dosadíme zpět do (38) a najdeme hodnoty koeficientů.

y_c	y_p z tabulky	y_p upravené
3^n	3^n	$n3^n$
$3^n + n3^n$	$n^2 3^n$	
$a^n \cos(bn)$	$\big(c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn)\big) a^n$	$n\big(c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn)\big) a^n$
a^n	$\big(c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn)\big) a^n$	$\big(c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn)\big) a^n$

Příklad 15. Řešte diferenční rovnici

$$y(n+2) + y(n+1) - 12y(n) = n2^n. \tag{41}$$

Řešení Charakteristické kořeny homogenní rovnice jsou $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -4$, a tedy obecné řešení homogenní úlohy je

$$y_c(n) = c_1 3^n + c_2(-4)^n.$$

Podle tabulky bude mít partikulární řešení tvar

$$y_p(n) = a_1 2^n + a_2 n 2^n,$$

Neobsahuje prvky fundamentální množiny řešení homogenní úlohy, takže můžeme přímo dosadit zpět do (41) a dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 2^{n+2} + a_2(n+2)2^{n+2} + a_1 2^{n+1} + a_2(n+1)2^{n+1} - 12a_1 2^n - 12a_2 n 2^n &= n2^n, \\ (10a_2 - 6a_1)2^n - 6a_2 n 2^n &= n2^n. \end{aligned}$$

Tudíž

$$10a_2 - 6a_1 = 0, \quad \text{a} \quad 6a_2 = 1,$$

tedy

$$a_1 = \frac{-5}{18}, \quad a_2 = \frac{-1}{6}.$$

Partikulární řešení

$$y_p(n) = \frac{-5}{18} 2^n - \frac{1}{6} n 2^n,$$

a obecné řešení

$$y(n) = y_p(n) + y_c(n) = \frac{-5}{18} 2^n - \frac{1}{6} n 2^n + c_1 3^n + c_2(-4)^n.$$

Příklad 16. Řešte diferenční rovnici

$$(E-3)(E+2)y(n) = 5 \cdot 3^n. \tag{42}$$

Řešení Obecné řešení homogenní rovnice $(E-3)(E+2)y(n) = 0$ je

$$y_c(n) = c_1 3^n + c_2(-2)^n.$$

Tabulkový tvar partikulárního řešení

$$y_p(n) = c3^n$$

obsahuje prvek (3^n) fundamentální množiny řešení homogenní úlohy, takže upravíme na

$$y_p(n) = cn3^n.$$

Dosadíme do původní rovnice (42) a dostaneme

$$c(n+2)3^{n+2} - c(n+1)3^{n+1} + 6cn3^n = 5 \cdot 3^n,$$

a tedy

$$c = \frac{1}{3},$$

čímž $y_p(n) = n3^{n-1}$ a obecné řešení (42) je

$$y(n) = n3^{n-1} + c_1 3^n + c_2(-2)^n$$

Příklad 17. Řešte diferenční rovnici

$$y(n+2) + 4y(n) = 8(2^n)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right). \tag{43}$$

Řešení Charakteristická rovnice a kořeny homogenní úlohy:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 2i,\ \lambda_2 = -2i.$$

Po převodu na polární souřadnice, $r = 2$, $\theta = \pi/2$, podle příkladu 12 dostaneme

$$y_c(n) = 2^n\left(c_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$$

Všimněte si, že člen $2^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ se objevuje v $y_c(n)$, takže základní tvar $y_p(n)$ z tabulky 4 pro $g(n) = 8(2^n)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ rozšíříme o n:

$$y_p(n) = 2^n\left(an\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + bn\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right). \tag{44}$$

Dosadíme z (44) do (43) a dostaneme

$$2^{n+2}\left[a(n+2)\cos\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + b(n+2)\sin\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right)\right]$$
$$+4 \cdot 2^n\left[an\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + bn\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = 8 \cdot 2^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Odtud s úpravami $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ a $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ dostaneme

$$4 \cdot 2^n\left[-a(n+2)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - b(n+2)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$+4 \cdot 2^n \left[an \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + bn \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = 8 \cdot 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

což vede k

$$8 \cdot 2^n \left[-a \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - b \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = 8 \cdot 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

a tedy porovnáním koeficientů u cos a sin zjistíme, že $a = -1$ a $b = 0$. Dosadíme zpět do (44):

$$y_p(n) = -2^n n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Celkové obecné řešení nehomogenní úlohy (43):

$$y(n) = 2^n \left(c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$$

Cvičení 3.4

Pro úlohy 1–6 nalezněte partikulární řešení.

1. $y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 1 + n$.
2. $y(n+2) + 8y(n+1) + 12y(n) = e^n$.
3. $y(n+2) - 5y(n+1) + 4y(n) = 4^n - n^2$.
4. $y(n+2) + 8y(n+1) + 7y(n) = ne^n$.
5. $y(n+2) - y(n) = n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.
6. $(E^2 + 9)^2 y(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

Pro úlohy 7–9 nalezněte řešení diferenční rovnice.

7. $\Delta^2 y(n) = 16$, $y(0) = 2$, $y(1) = 3$.
8. $\Delta^2 y(n) + 7y(n) = 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.
9. $(E - 3)(E^2 + 1)y(n) = 3^n$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 3$.

Pro úlohy 10 a 11 nalezněte obecné řešení diferenční rovnice.

10. $y(n+2) - y(n) = n2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.
11. $y(n+2) + 8y(n+1) + 7y(n) = n2^n$.

Reference

[1] S. N. Elaydi. *An Introduction to Difference Equations.* Springer, New York, 1999.