MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

Lineární diferenční rovnice prvního řádu a jejich aplikace

Diplomová práce

2009 Anna Voldánová

Děkuji prof. RNDr. Zuzaně Došlé, DSc. z Ústavu matematiky a statistiky Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity za odborné vedení a připomínky při zpracování mé diplomové práce.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci Lineární diferenční rovnice prvního řádu a jejich aplikace vypracovala samostatně s využitím pramenů uvedených v seznamu použité literatury.

Anna Voldánová

Obsah

Úvod

Předmětem této diplomové práce jsou lineární diferenční rovnice prvního řádu a jejich aplikace.

Tato práce má charakter učebního textu. Cílem je probrat teorii diferenčních rovnic prvního řádu a ukázat jejich využití při řešení příkladů. Tato práce může být využita studenty gymnázií s rozšířenou výukou matematiky při probírání učiva Diferenční rovnice. Studenti vysokých škol mohou tento text využít k rozšíření učiva probíraného v kurzu Matematická analýza IV.

Práce je rozdělena do pěti kapitol. Teorie v každé kapitole je doplněna příklady.

První kapitola se zabývá posloupnostmi – způsobem jejich zápisu, posloupností aritmetickou a geometrickou, jsou zde definovány pojmy diference a limita posloupnosti.

Ve druhé kapitole jsou uvedeny základy diferenčního a sumačního počtu, jejichž znalosti využijeme v dalších kapitolách při řešení diferenčních rovnic. Sumační počet je zde použit i při hledání součtu n členů posloupnosti a součtu řad. Některé věty jsou zde uvedeny bez důkazu, je však možno tyto důkazy najít v uvedené literatuře, nebo si je čtenář může zkusit provést sám.

Třetí kapitola je věnována lineárním diferenčním rovnicím prvního řádu. Jsou zde vysvětleny postupy při řešení těchto rovnic a tyto postupy jsou ukázány na příkladech. V této kapitole se zabýváme i tím, jak může řešení diferenční rovnice ovlivnit počáteční podmínka.

Ve čtvrté kapitole si všímáme toho, jak diferenční rovnice souvisí s gama funkcí. Znalost gama funkce využijeme při řešení homogenní rovnice pomocí sumace.

V páté kapitole jsou uvedeny a vyřešeny aplikační úlohy na diferenční rovnice a zabýváme se zde souvislostí mezi diferenčními rovnicemi a řetězovými zlomky.

Práce je vysázena systémem LaTeX.

Použité značení:

$\mathbb{N}$ množina přirozených čísel

$\mathbb{R}$ množina reálných čísel

Kapitola 1

Posloupnosti

S pojmem *posloupnost* se můžeme setkat již na střední škole. Tato kapitola má za cíl zopakovat tento pojem v rozsahu středoškolské látky. V učebnici [7] najdeme tuto definici posloupnosti:

Definice 1. Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel, se nazývá *nekonečná posloupnost*.
Každá funkce, jejíž definiční obor je množina všech přirozených čísel $n \leq n_0$, kde n_0 je pevně dané číslo z $\mathbb{N}$, se nazývá *konečná posloupnost*.

Poznámka 1.1. Někdy je třeba definiční obor posloupnosti rozšířit o nulu, tedy definičním oborem bývá množina $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Tento definiční obor většinou bývá používán v aplikacích.

Označení. Posloupnost můžeme značit různě, nejčastějšími způsoby označení jsou: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jednodušeji $\{a_n\}$ a (a_n). V tomto textu budeme většinou používat značení (a_n). Rovněž *n-tý člen* posloupnosti bývá značen různě, například a_n nebo $a(n)$. V tomto textu budeme používat oba způsoby.

Posloupnost se obvykle zadává nějakým předpisem pro n-tý člen, například $a_n = n^2$ pro $n \in \mathbb{N}$. Někdy lze zadat posloupnost výčtem prvků, většinou několika prvních členů, například $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots)$.

Příklad 1.1. Napište prvních pět členů posloupnosti, jejíž n-tý člen je:

a) $a_n = 2$;

b) $a_n = n^{\frac{1}{2}}$;

c) $a_n = \frac{3n+1}{2n-5}$;

d) $a_n = \frac{1-\cos n\pi}{2}$.

Řešení. a) 2, 2, 2, 2, 2;

b) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$;

c) $-\frac{4}{3}$, -7, 10, $\frac{13}{3}$, $\frac{16}{5}$;

d) 1, 0, 1, 0, 1.

■

Příklad 1.2. Najděte n-tý člen posloupnosti:

a) $(2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, \ldots)$;

b) $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots)$;

c) $(4, -4, 4, -4, 4, -4, 4, \ldots)$;

d) $(1, 3, 9, 27, 81, \ldots)$.

Řešení. a) $a_n = 2^n$;

b) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$;

c) $a_n = (-1)^{n+1}4$;

d) $a_n = 3^{n-1}$.

■

Příklad 1.3. Vypočítejte druhý, třetí a čtvrtý člen posloupnosti (a_n), která je dána takto:

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 \\ a_{n+1} &= -2a_n \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Řešení. $a_2 = -2a_1 = -8$, $\quad a_3 = -2a_2 = 16$, $\quad a_4 = -2a_3 = -32$.

■

V posloupnosti (a_n) je dán první člen a dále je k dispozici vzorec, pomocí něhož můžeme pro každé $n \in \mathbb{N}$ vypočítat člen a_{n+1} na základě znalosti předchozího členu. Takovýto způsob zadání se vyskytuje často. Říkáme, že *posloupnost je určena rekurentně* (z latinského *recurrere*, což znamená *vraceti se, jít zpět*).

Příklad 1.4. Najděte obecný člen posloupnosti dané rekurentně a napište jejích pět prvních členů:

a) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 1$;

b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = -a_n$.

Řešení. a) 2, 3, 4, 5, 6; $a_n = n + 1$;

b) 1, -1, 1, -1, 1; $a_n = (-1)^{n+1}$.

■

Příklad 1.5. Definujte rekurentně posloupnost (tj. vyjádřete člen a_{n+1} pomocí členu a_n):

a) $(1-n)_{n=1}^{\infty}$;

b) $(1+(-1)^n)_{n=1}^{\infty}$.

Řešení. a) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n - 1$;

b) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 2 - a_n$.

■

Pojem *diference* se ve středoškolské učebnici objevuje poprvé v souvislosti s pojmem aritmetická posloupnost:

Definice 2. Posloupnost (a_n) se nazývá *aritmetická*, právě když existuje takové reálné číslo d, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Číslo d se nazývá *diference* aritmetické posloupnosti.

V aritmetické posloupnosti (a_n) tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Tím je vysvětlena volba názvu *diference* pro d.

Věta 1.1. *Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti (a_n), tj. pro $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, platí*

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Dalším druhem posloupnosti je *geometrická posloupnost*:

Definice 3. Posloupnost (a_n) se nazývá *geometrická*, právě když existuje takové reálné číslo q, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_{n+1} = a_n q.$$

Číslo q se nazývá *kvocient* geometrické posloupnosti.
V geometrické posloupnosti (a_n) s kvocientem $q \neq 0$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Věta 1.2. *Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti (a_n) s kvocientem q platí:*

a) je-li $q = 1$, pak

$$s_n = na_1,$$

b) je-li $q \neq 1$, pak

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{1.1}$$

Ústředním tématem, které nás bude u posloupností zajímat, bude otázka, zda a jak rychle se jednotlivé členy posloupnosti mění. V případě funkcí můžeme změny funkčních hodnot pozorovat pomocí derivace funkce. V případě posloupností si stačí všímat, o kolik se liší dva bezprostředně po sobě jdoucí členy posloupnosti. Tím dospíváme k základnímu pojmu, pomocí něhož budeme posloupnosti studovat, k *diferenci posloupnosti*, která je zobecněním pojmu *diference aritmetické posloupnosti* z definice 2:

Definice 4. Nechť a_n, a_{n+1} jsou dva po sobě jdoucí členy posloupnosti (a_n). Rozdíl $a_{n+1} - a_n$ se nazývá *diference posloupnosti* (a_n) *v bodě* n a označuje se Δa_n. Platí tedy

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n. \tag{1.2}$$

Poznámka 1.2. Symbol Δ označuje velké řecké písmeno „delta“.

Příklad 1.6. Stanovte diferenci posloupností:

a) $a_n = C$;

b) $b_n = n$;

c) $c_n = n^2$;

d) $d_n = 3^n$;

e) $e_n = \frac{1}{n}$;

f) $f_n = n.5^n$.

Řešení. Platí $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. Tedy:

a) $\Delta C = C - C = 0$;

b) $\Delta n = (n + 1) - n = 1$;

c) $\Delta n^2 = (n + 1)^2 - n^2 = n^2 - 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$;

d) $\Delta 3^n = 3^{n+1} - 3^n = 3 \cdot 3^n - 3^n = 2 \cdot 3^n$;

e) $\Delta \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{(n+1)n}$;

f) $\Delta(n \cdot 5^n) = (n + 1)5^{n+1} - n \cdot 5^n = 5^n(5n + 5 - n) = 5^n(4n + 5)$.

■

Důležitá vlastnost posloupnosti je pojem *limita*:

Definice 5. Číslo a se nazývá *limita posloupnosti* (a_n), právě když ke každému kladnému číslu ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. V tomto případě říkáme, že (a_n) *konverguje* (je konvergentní). Posloupnosti, které nejsou konvergentní, se nazývají *divergentní.*

Příklad 1.7. Pomocí definice limity posloupnosti se přesvědčte, že platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-2}{n^2-1} = 1.$$

Řešení. Máme tedy za úkol dokázat, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je

$$\left|\frac{n^2+n-2}{n^2-1} - 1\right| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Vyřešíme nerovnici (1.3) s neznámou $n \in \mathbb{N}$. Nejprve upravíme výraz na levé straně nerovnice:

$$\left|\frac{n^2+n-2}{n^2-1} - 1\right| = \left|\frac{n^2+n-2-n^2+1}{n^2-1}\right| = \left|\frac{n-1}{n^2-1}\right| = \frac{n-1}{n^2-1} = \frac{1}{n+1}$$

Od nerovnice (1.3) můžeme tedy přejít k nerovnici

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Její řešení je

$$\begin{aligned} n+1 &> \frac{1}{\varepsilon} \\ n &> \frac{1}{\varepsilon} - 1. \end{aligned}$$

Řešením nerovnice (1.3) jsou všechna přirozená čísla $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, tj. pro všechna tato n platí (1.3). Celkově můžeme říci, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ a $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} + 1$ platí (1.3) pro všechna $n \geq n_0$.

■

Následující příklad je zde uveden jako motivační – při jeho řešení sice sestavíme diferenční rovnici, ale budeme ji řešit spíše intuitivně. Pro označení času použijeme t místo n. Čtenář se k tomuto příkladu může vrátit po prostudování kapitoly 3 a zkusit si jej vyřešit pomocí věty 3.3.

Příklad 1.8. Je pozorováno, že hmotnostní úbytek radioaktivní látky za určitou časovou jednotku je úměrný hmotnosti, která byla dána na začátku časové jednotky. Pokud je poločas rozpadu radia 1600 roků, najděte vzorec pro jeho hmotnost jako funkci času.

Řešení. Nechť $m(t)$ reprezentuje hmotnost radia po t letech. Potom pro hmotnostní úbytek platí

$$m(t+1) - m(t) = -km(t), \qquad t \in \mathbb{N},$$

kde k je kladná konstanta. Úpravou dostáváme

$$m(t+1) = (1-k)m(t) \tag{1.4}$$

pro $t = 0, 1, 2, \ldots$. Vyjádříme-li $m(t)$ pomocí $m(0)$, dostaneme

$$m(t) = m(0)(1-k)^t.$$

Pokud je poločas rozpadu 1600, znamená to, že za 1600 let se rozpadne právě polovina jader a hmotnost rádia se zmenší na poloviční, tedy

$$m(1600) = m(0)(1-k)^{1600} = \frac{1}{2}m(0).$$

Odtud

$$1 - k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1600}},$$

a nakonec dostáváme

$$m(t) = m(0)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}.$$

Tento problém je v učebnicích tradičně řešen sestavením diferenciální rovnice

$$m'(t) = -km(t), \qquad t \geq 0,$$

tj. t je spojitá proměnná. V našem řešení jsme sestavili rekurentní vztah (1.4), kde $t \in \mathbb{N}$ a tato rovnice se nazývá diferenční rovnice 1. řádu. Řešení prezentované zde, při kterém jsme využili diferenční rovnici, je o něco kratší a používá pouze elementární algebru.

■

Kapitola 2

Diference a sumace

V této kapitole uvedeme nejdůležitější základy diferenčního počtu. Pojmu *derivace funkce*, který známe z diferenciálního počtu, odpovídá v diferenčním počtu pojem *diference*. Naučíme se počítat diference základních posloupností. Zavedeme pojem *sumace*, který je inverzní operací k operaci diference. Uvedeme základní pravidla pro počítání sumací a využijeme je k počítání součtu n členů posloupnosti a součtu nekonečných řad.

2.1 Diference

S pojmem diference jsme se seznámili již v kapitole 1. Následující věta nám udává vzorce pro diferenci součtu a rozdílu, součinu posloupnosti s konstantou, součinu posloupností a podílu posloupností:

Věta 2.1. *Nechť* (a_n) *a* (b_n) *jsou posloupnosti,* $c \in \mathbb{R}$ *konstanta. Potom platí:*

a) $\Delta(a_n \pm b_n) = \Delta a_n \pm \Delta b_n$

b) $\Delta(ca_n) = c\Delta a_n$

c) $\Delta(a_n b_n) = a_{n+1}\Delta b_n + b_n\Delta a_n = a_n\Delta b_n + b_{n+1}\Delta a_n$

d) $\Delta(a_n b_n) = a_n\Delta b_n + b_n\Delta a_n + \Delta a_n\Delta b_n$

e) $\Delta\frac{a_n}{b_n} = \frac{b_n\Delta a_n - a_n\Delta b_n}{b_n b_{n+1}}$

Porovnáme-li uvedená pravidla s odpovídajícími pravidly pro *derivaci* těchto operací, vidíme, že jsou podobné. Všimněme si, že neuvádíme pravidlo, které by bylo analogické diferencování složené funkce. Diskrétní analogie řetězového pravidla totiž neexistuje, což je jedna ze specifických vlastností, která zřetelně odlišuje diferenční počet od diferenciálního.

Poznámka 2.1. Větu 2.1 nebudeme dokazovat, důkaz vzorců z této věty je jednoduché cvičení na počítání s diferencemi. Celý důkaz je možno najít v [5].

V příkladu 1.6 jsme už počítali diference některých základních funkcí. V následující větě si ještě uvedeme pravidla pro diferencování funkcí sin a cos.

Věta 2.2. *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Platí*

a) $\Delta \sin \alpha n = 2\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$,

b) $\Delta \cos \alpha n = -2\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.

Důkaz. a) $\Delta \sin \alpha n = \sin(\alpha(n+1)) - \sin \alpha n = 2\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 2\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$, neboť $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$.

b) $\Delta \cos \alpha n = \cos(\alpha(n+1)) - \cos \alpha n = -2\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$, protože $\cos A - \cos B = = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$.

□

Příklad 2.1. Pomocí věty 2.1 a příkladu 1.6 můžeme stanovit diference následujících posloupností:

a) $\Delta(n^2+n+6) = \Delta n^2 + \Delta n + \Delta 6 = (2n+1)+1+0 = 2n+2$;

b) $\Delta(7\cdot 5^n) = 7\Delta 5^n = 7\cdot 4\cdot 5^n = 28\cdot 5^n$;

c) $\Delta(5^n\cdot n^2) = 5^n\Delta n^2 + n^2\Delta 5^n + \Delta 5^n \Delta n^2 = 5^n(2n+1) + n^2\cdot 4\cdot 5^n + 4\cdot 5^n(2n+1) = = 5^n(4n^2+10n+5)$.

■

Příklad 2.2. Vypočtěte $\Delta[(n+3)\cdot 4^n]$.

Řešení. Vypočítáme tento příklad dvěma způsoby: podle definice a pomocí věty 2.1(c) o diferenci součinu.

a) $\Delta[(n+3)\cdot 4^n] = (n+4)\cdot 4^{n+1} - (n+3)\cdot 4^n = 4^n\cdot[4n+16-n-3] = (3n+13)\cdot 4^n$.

b) $\Delta[(n+3)\cdot 4^n] = 4^n\Delta(n+3) + (n+4)\Delta 4^n = 4^n(\Delta n + \Delta 3) + (n+4)\cdot 3\cdot 4^n = 4^n + (3n+12)\cdot 4^n = (3n+13)\cdot 4^n$.

■

Věta 2.3 (O diferenci základních posloupností). *Nechť C je konstanta, P_k, R_k, resp. Q_{k-1} jsou polynomy k-tého, resp. $k-1$-tého stupně o proměnné n. Pak platí:*

a) $\Delta C = 0$;

b) $\Delta P_k(n) = Q_{k-1}(n)$;

c) $\Delta a^n = (a-1)a^n$;

d) $\Delta a^n P_k(n) = a^n R_k(n) \quad$ *pro* $\quad a \neq 1$.

Diference polynomů

S polynomy pracujeme často. Je proto dobré vědět, jak snadno bez dlouhých výpočtů určit jejich diferenci. Jestliže například máme určit diferenci polynomu

$$n^3 + 4n^2 + 9n - 3,$$

víme podle věty 2.1, že

$$\Delta(n^3 + 4n^2 + 9n - 3) = \Delta n^3 + 4\Delta n^2 + 9\Delta n - \Delta 3.$$

Musíme tedy ještě vypočítat diference Δn^3, Δn^2, atd.

Podle definice 4 na straně 9 vypočítáme diferenci Δn^k takto:

$$\Delta n^k = (n+1)^k - n^k.$$

Nyní využijeme znalost binomické věty:

$$\Delta n^k = \binom{k}{0} n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} + \binom{k}{2} n^{k-2} + \binom{k}{3} n^{k-3} + \cdots + \binom{k}{k-1} n^1 + \binom{k}{k} n^0 - n^k,$$

a protože $\binom{k}{0} n^k = n^k$ a $\binom{k}{k} n^0 = 1$, dostáváme

$$\Delta n^k = \binom{k}{1} n^{k-1} + \binom{k}{2} n^{k-2} + \binom{k}{3} n^{k-3} + \cdots + \binom{k}{k-1} n + 1.$$

Při samotném výpočtu je snazší nepracovat s kombinačními čísly přímo, ale prostřednictvím Pascalova trojúhelníka

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\quad \sim \quad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Koeficienty diference posloupnosti $a_n = n^k$ leží na $(k+1)$-tém řádku, přičemž vynecháváme první koeficient na příslušném řádku (to odpovídá odečtení n^k od $(n+1)^k$). Tedy

$$\begin{aligned}
\Delta n &= 1, \\
\Delta n^2 &= 2n + 1, \\
\Delta n^3 &= 3n^2 + 3n + 1, \\
\Delta n^4 &= 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1, \quad \text{atd.}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Dostáváme tedy $\Delta(n^3+4n^2+9n-3) = 3n^2+3n+1+4(2n+1)+9\cdot 1 = 3n^2+11n+14$.

Příklad 2.3. Použitím věty 2.1 a pomocí vztahů (2.1) vypočtěme diference posloupností:

a) $a_n = 4n^2+2n+7$;

b) $a_n = 7n^4-3n^3+2n-1$.

Řešení. a) $\Delta(4n^2+2n+7) = 4\Delta n^2 + 2\Delta n + 7\Delta 1 = 4(2n+1)+2\cdot 1 = 8n+6$;

b) $\Delta(7n^4-3n^3+2n-1) = 7\Delta n^4 - 3\Delta n^3 + 2\Delta n - \Delta 1 =$
$= 7(4n^3+6n^2+4n+1) - 3(3n^2+3n+1) + 2\cdot 1 = 28n^3+33n^2+19n+6.$

■

V další definici se seznámíme s posloupností, která představuje mocninné pravidlo v diferenčním počtu:

Definice 6. Buď $k \in \mathbb{N}$. *Diskrétní mocninou řádu k (zobecněnou mocninou k-tého řádu)* rozumíme posloupnost (funkci definovanou na množině $\mathbb{N}$)

$$n^{(k)} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

Dále definujeme $n^{(0)} = 1$. Pro $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$n^{(-k)} = \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}.$$

Věta 2.4. *Buď $n, k \in \mathbb{N}$. Platí*

a) $\Delta n^{(k)} = kn^{(k-1)}$

b) $\Delta n^{(-k)} = -kn^{(-k-1)}$

Poznámka 2.2. Ve [3] je místo pojmu *diskrétní mocnina* $n^{(k)}$ zaveden pojem *faktoriálová funkce* $t^{(r)}$. Definici tohoto pojmu si uvedeme později – v kapitole 4. Tyto dvě funkce se liší definicí pro záporná k, resp. r. Například pro $k=-4$ podle naší definice dostáváme

$$n^{(-4)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Faktoriálová mocnina je pro záporná r definována takto:

Jestliže $r = -1, -2, -3, \ldots$, potom $t^{(r)} = \frac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t-r)}$.
Dostáváme tedy

$$t^{(-4)} = \frac{1}{(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)},$$

tedy podobný výraz, který je jen posunutý o 1. Věta 2.4 je platná pro oba pojmy.

Příklad 2.4. Vypočtěte $\Delta n^{(3)}$ a $\Delta n^{(-3)}$.

Řešení. Podle věty 2.4 dostáváme

a) $\Delta n^{(3)} = 3n^{(2)} = 3n(n-1)$,

b) $\Delta n^{(-3)} = -3n^{(-4)} = \frac{-3}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$.

■

2.2 Sumace

Podobně jako *derivaci funkce* odpovídá pojem *diference posloupnosti*, odpovídá *primitivní funkci* pojem *sumace posloupnosti*. Z diferenciálního počtu víme, že platí:

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\int y(t)\,\mathrm{d}t\right) = y(t).$$

Neurčitý integrál není určen jednoznačně, například

$$\int \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t + C,$$

kde C je libovolná konstanta. Neurčitá sumace je rovněž určena jednoznačně až na aditivní konstantu, nazývanou sumační konstanta, jak si později ukážeme.

Nyní si uvedeme definici *neurčité sumace*:

Definice 7. Říkáme, že posloupnost (b_n) je *sumací* posloupnosti (a_n), platí-li

$$\Delta b_n = a_n \quad \text{pro všechna} \quad n = 1, 2, \dots .$$

Sumaci značíme

$$\sum (a_n) \quad \text{nebo} \quad \sum a_n.$$

Z definice 7 plyne, že pro posloupnost (a_n) platí

$$\Delta\left(\sum a_n\right) = a_n.$$

Příklad 2.5. a) Posloupnost (n) je sumací posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$, neboť $\Delta n = 1$. Tato vlastnost platí pro libovolnou posloupnost tvaru $(n + C)$, neboť

$$\Delta(n + C) = \Delta n + \Delta C = 1.$$

Zapisujeme

$$\sum 1 = n + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

b) Podobně, posloupnost (5^n) je sumací posloupnosti $(4 \cdot 5^n)$, neboť $\Delta 5^n = 4 \cdot 5^n$. Platí ovšem, že každá posloupnost $(5^n + C)$ je sumací posloupnosti $(4 \cdot 5^n)$, neboť

$$\Delta(5^n + C) = \Delta 5^n + \Delta C = 4 \cdot 5^n + 0 = 4 \cdot 5^n.$$

Toto zapíšeme

$$\sum 4 \cdot 5^n = 5^n + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Obecně, je-li posloupnost (b_n) je sumací posloupnosti (a_n) a C je konstanta, potom též posloupnost $(b_n + C)$ je sumací posloupnosti (a_n). Jak již bylo zmíněno, konstanta C se nazývá *sumační konstanta.*

Vidíme tedy, že pokud k dané posloupnosti existuje sumace, je sumací nekonečně mnoho. Vyvstává tak otázka, zda k dané posloupnosti mohou existovat sumace, které se neliší o konstantu. Tvrzení věty 2.6 říká, že takové posloupnosti existovat nemohou. Nejprve si však dokážeme lemma, jehož tvrzení použijeme v důkazu věty 2.6.

Lemma 2.5. *Nechť (a_n) je posloupnost. Pak platí:*

$$\Delta a_n = 0 \Leftrightarrow a_n = C,$$

kde C je libovolná konstanta.

Důkaz. „$\Leftarrow$“ Z předpokladu $a_n = C$ plyne $\Delta a_n = \Delta C = 0$.
„$\Rightarrow$“ Podle předpokladu $\Delta a_n = 0$, tedy $a_{n+1} - a_n = 0$ pro všechna přirozená n. Potom $a_{n+1} = a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = c$. $\square$

Věta 2.6. *Nechť posloupnosti (b_n), (d_n) jsou sumacemi posloupnosti (a_n). Potom existuje konstanta C tak, že*

$$d_n = b_n + C, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. Jestliže (b_n) a (d_n) jsou sumacemi posloupnosti (a_n), platí $a_n = \Delta b_n$ a $a_n = \Delta d_n$, tedy i $\Delta b_n = \Delta d_n$. Jednoduchou úpravou dostaneme $\Delta b_n - \Delta d_n = 0$ a podle věty 2.1(a) můžeme psát $\Delta[b_n - d_n] = 0$. Z věty 2.5 plyne, že $b_n - d_n = C$ a tedy $d_n = b_n + C$. $\square$

Nyní si uvedeme větu obsahující pravidla pro sumaci součtu a rozdílu dvou posloupností, pro sumaci posloupnosti vynásobené konstantou a metodu per partes.

Věta 2.7. *Nechť (a_n) a (b_n) jsou posloupnosti, $k \in \mathbb{R}$. Potom*

a) $\sum [a_n \pm b_n] = \sum a_n \pm b_n$,

b) $\sum [ka_n] = k \sum a_n$,

c) $\sum [a_n \Delta b_n] = a_n b_n - \sum [b_{n+1} \Delta a_n]$ *(metoda per partes).*

V následující větě jsou uvedena pravidla pro sumaci některých jednodušších funkcí.

Věta 2.8. *Nechť a, C jsou konstanty, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom*

a) $\sum a = an + C$.

b) $\sum n^{(k)} = \frac{1}{k+1} n^{(k+1)} + C$.

c) $\sum n^{(-k)} = \frac{1}{-k+1} n^{(-k+1)} + C$.

d) $\sum \sin an = -\frac{\cos a\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} + C, \qquad (a \neq 2n\pi)$.

e) $\sum \cos an = \frac{\sin a\left(n-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} + C, \qquad (a \neq 2n\pi)$.

f) $\sum \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1} + C$.

Jak už víme, pojem sumace je analogický pojmu primitivní funkce. Proto jsou analogické i metody stanovení sumací, které plynou ze známých vzorců pro diference posloupností.

Věta 2.9 (Sumace základních posloupností). *Nechť Q_k, resp. P_{k+1} jsou polynomy proměnné n stupně k, resp. $k+1$, C a a jsou konstanty, $a \neq 1$. Pak platí*

a) $\sum Q_k(n) = P_{k+1}(n) + C$,

b) $\sum a^n = \frac{a^n}{a-1} + C$,

c) $\sum (a^n Q_k(n)) = a^n R_k(n) + C$, *kde $R_k(n)$ je polynom stupně k.*

Příklad 2.6. Nalezněte sumaci posloupnosti $a_n = 4 \cdot 5^n$.

Řešení. Při hledání sumace využijeme větu 2.7(b) a větu 2.9(b):

$$\sum 4 \cdot 5^n = 4 \sum 5^n = 4 \frac{5^n}{5-1} + C = 5^n + C.$$

Vidíme, že jsme dostali stejný výsledek jako v příkladě 2.5(a).

■

Sumace polynomů budeme řešit tzv. *metodou neurčitých koeficientů*, kterou si vysvětlíme na následujícím příkladě.

Příklad 2.7. Nalezněte sumaci posloupnosti $a_n = 3n^2 + n + 2$.

Řešení. Posloupnost (a_n) je polynom druhého stupně, sumací proto musí být polynom třetího stupně. Je tedy

$$\sum \left(3n^2 + n + 2\right) = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Neznámé koeficienty a, b, c stanovíme pomocí ekvivalentního vzorce

$$3n^2 + n + 2 = \Delta(an^3 + bn^2 + cn + d).$$

Platí

$$\Delta(an^3 + bn^2 + cn + d) = a\Delta n^3 + b\Delta n^2 + c\Delta n + d\Delta 1.$$

Podle vztahů (2.1) víme, že $\Delta n^3 = 3n^2 + 2n + 1$, $\Delta n^2 = 2n + 1$ a $\Delta n = 1$, takže dostáváme

$$\Delta(an^3 + bn^2 + cn + d) = a(3n^2 + 3n + 1) + b(2n + 1) + c = 3an^2 + (3a + 2b)n + a + b + c.$$

Výsledný polynom se má rovnat polynomu $a_n = 3n^2 + n + 2$ pro všechna n. Toto bude platit, jestliže se koeficienty u odpovídajících mocnin obou polynomů budou rovnat. Platí

$$\begin{aligned} 3a &= 3 \\ 3a + 2b &= 1 \\ a + b + c &= 2. \end{aligned}$$

Odtud vypočteme $a = 1$, $b = -1$ a $c = 2$. Proto

$$\sum \left(3n^2 + n + 2\right) = n^3 - n^2 + 2n + C,$$

kde C je libovolná konstanta.

$\blacksquare$

2.3 Součet n členů posloupnosti

Pojmu sumace se dá využít při stanovení součtu s_n prvních n členů $a_1, a_2, \dots, a_n$ posloupnosti (a_n). Pro posloupnost částečných součtů platí vztah

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Proto $s_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}$ a $\Delta s_n = s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$, tj.

$$s_n = \sum a_{n+1}. \tag{2.2}$$

Příklad 2.8. Určete součet n členů geometrické posloupnosti.

Řešení. Podle vztahu (2.2) dostáváme

$$s_n = \sum a_{n+1} = \sum a_1 q^n = a_1 \sum q^n,$$

kde podle věty 2.9 (b) je $\sum q^n = \frac{q^n}{q-1}$, tedy

$$s_n = a_1 \frac{q^n}{q-1} + C.$$

Konstantu C dostaneme po dosazení počáteční podmínky $s_1 = a_1$:

$$s_1 = a_1 = a_1 \frac{q}{q-1} + C,$$

odkud

$$C = a_1 \left(1 - \frac{q}{q-1}\right) = \frac{-a_1}{q-1}.$$

Po dosazení dostáváme vztah

$$s_n = a_1 \frac{q^n}{q-1} - \frac{a_1}{q-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1},$$

který souhlasí se vztahem (1.1) pro $q \neq 1$, který jsme uvedli v kapitole 1 na straně 9.

■

Příklad 2.9. Nalezněte vzorec pro výpočet součtu s_n prvních n členů posloupnosti

$$a_n = n^3.$$

Řešení. Podle vztahu (2.2) platí

$$s_n = \sum a_{n+1} = \sum (n+1)^3 = \sum \big(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\big).$$

Postupujme jako v příkladě 2.7. Položme

$$\sum (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e.$$

Ke stanovení koeficientů a, b, c, d a e použijeme ekvivalentního vztahu

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = \Delta(an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e).$$

Podle věty 2.1 (a) a vztahů (2.1) platí

$$\begin{aligned} \Delta(an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e) &= a\Delta n^4 + b\Delta n^3 + c\Delta n^2 + d\Delta n + e\Delta 1 = \\ &= a(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) + b(3n^2 + 3n + 1) + c(2n + 1) + d = \\ &= 4an^3 + (6a + 3b)n^2 + (4a + 3b + 2c)n + a + b + c + d. \end{aligned}$$

Koeficienty a, b, c a d zjistíme srovnáním s koeficienty u stejných mocnin n. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} 4a &= 1 \\ 6a + 3b &= 3 \\ 4a + 3b + 2c &= 3 \\ a + b + c + d &= 1. \end{aligned}$$

Po vyřešení této soustavy máme $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$ a $d = 0$. Proto

$$s_n = \sum (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + e.$$

Konstantu e určíme dosazením za $n = 1$ do předpisu posloupnosti a s_n: $s_1 = 1^3 = 1$.

$$1 = s_1 = \frac{1}{4}1^4 + \frac{1}{2}1^3 + \frac{1}{4}1^2 + e = 1 + e.$$

Tedy $e = 0$ a hledaný součet můžeme zapsat ve tvaru

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2}{4}\left(n^2 + 2n + 1\right) = \frac{n^2}{4}\left(n+1\right)^2,$$

po úpravě

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

■

Příklad 2.10. Nalezněte vzorec pro výpočet součtu s_n prvních n členů posloupnosti

$$a_n = n^2.$$

Řešení. Tento příklad budeme řešit stejným postupem jako příklad 2.9. Platí

$$s_n = \sum a_{n+1} = \sum \left((n+1)^2\right) = \sum \left(n^2 + 2n + 1\right),$$

tedy

$$s_n = \sum (n^2 + 2n + 1) = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Abychom nalezli koeficienty a, b, c a d, tento vztah upravíme:

$$n^2 + 2n + 1 = \Delta(an^3 + bn^2 + cn + d) =$$

$$= a(3n^2 + 3n + 1) + b(2n + 1) + c = 3an^2 + (3a + 2b)n + a + b + c.$$

Pro koeficiety a, b a c tedy dostáváme hodnoty $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$ a $c = \frac{1}{6}$. Tedy

$$s_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + d.$$

Potřebujeme vypočítat ještě konstantu d: $s_1 = 1^2 = 1$,

$$1 = s_1 = \frac{1}{3}1^3 + \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{6}1 + d = 1 + d,$$

proto $d = 0$. Hledaný součet má tedy tvar

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

■

Poznámka 2.3. Na střední škole bývá obvykle vztah

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

pouze uveden a je dokazován pomocí matematické indukce.

2.4 Součet řady

Součet n členů posloupnosti umožňuje výpočet součtu nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots .$$

Součet s této řady je definován jako limita posloupnosti částečných součtů $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, tj. součet s nekonečné řady je

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n. \tag{2.3}$$

Příklad 2.11. Vypočítejte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}. \tag{2.4}$$

Řešení. Nejdříve určíme vztah pro s_n. Víme, že platí

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{2^{n+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(n+2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}n+1\right).$$

Pro s_n platí

$$s_n = \sum a_{n+1} = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}n+1\right).$$

V tomto případě nejde o polynom. Podle věty 2.9 (c) bude řešení ve tvaru součinu $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ a nějakého polynomu prvního stupně, tedy

$$s_n = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}n+1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}(an+b)+C.$$

Platí $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{4}$ a $a_3 = \frac{1}{2}$, odkud

$$\begin{aligned}
s_1 = 1 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{1}(a\cdot 1+b)+C = \left(\frac{1}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2}\right)b + C,\\
s_1 = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2}(a\cdot 2+b)+C = \left(\frac{1}{2}\right)a + \left(\frac{1}{4}\right)b + C,\\
s_2 = \frac{7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{3}(a\cdot 3+b)+C = \left(\frac{3}{8}\right)a + \left(\frac{1}{8}\right)b + C.
\end{aligned}$$

Po vyřešení této soustavy dostáváme $a = -1$, $b = -3$ a $C = 3$ a proto

$$s_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}(-n-3)+3.$$

Podle (2.3) je

$$s = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n (-n-3) + 3 \right] = \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{n+3}{2^n} + 3 \right] = 3.$$

Tedy součet řady (5.11) je $s = 3$.

$\blacksquare$

Kapitola 3

Lineární diferenční rovnice 1. řádu

V této kapitole se budeme zabývat studiem *diferenčních rovnic*. V diferenciálním počtu studujeme tzv. diferenciální rovnice, tj. rovnice obsahující neznámou funkci a její derivace, zatímco v diferenčním počtu diferenční rovnice představují rovnice o neznámé posloupnosti a jejích diferencích.

V této kapitole budeme probírat speciální třídu diferenčních rovnic, takzvané lineární rovnice. Používání pojmů *lineární* a *nelineární* je zde zcela analogické k jejich používání v teorii diferenciálních rovnic. Přitom se omezíme ve všech našich diskuzích na rovnice, které obsahují jedinou nezávislou a jedinou závislou proměnnou.

Definice 8. Nechť $p(n)$ a $r(n)$ jsou posloupnosti, přičemž $p(n) \neq 0$ pro všechna n. *Lineární diferenční rovnice prvního řádu* je tvaru

$$y(n+1) - p(n)y(n) = r(n). \tag{3.1}$$

Je-li $r(n) \equiv 0$, nazývá se rovnice *homogenní*, jinak *nehomogenní*.

Poznámka 3.1. Rovnice (3.1) se nazývá prvního řádu, protože obsahuje hodnotu y pouze v n a $n+1$. Rovnice (3.1) je definována pro $n \in \mathbb{N}$ nebo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Řešením diferenční rovnice (3.1) rozumíme posloupnost $y = a(n)$ takovou, že

$$a(n+1) - p(n)a(n) = r(n).$$

Obecným řešením rovnice (3.1) rozumíme posloupnost, která je řešením dané diferenční rovnice a závisí na konstantě C. Při dosazení za konstantu C, nebo pomocí konkrétně zvolených počátečních podmínek vzniká *partikulární řešení* rovnice (3.1).

Poznámka 3.2. Obecné řešení je tedy vzorcem popisujícím množinu všech partikulárních řešení.

3.1 Homogenní rovnice

Homogenní lineární diferenční rovnice 1. řádu je tvaru

$$u(n+1) - p(n)u(n) = 0. \tag{3.2}$$

Nyní si uvedeme věty obsahující základní vlastnosti řešení rovnice (3.2) a definici lineární závislosti dvou posloupností.

Věta 3.1. *Nechť posloupnost $y = a(n)$ je řešením rovnice* (3.2)*, pak také posloupnost $y = Ca(n)$ je řešením rovnice* (3.2)*.*

Důkaz. Nechť je posloupnost $y = a(n)$ řešením rovnice (3.2), tj. platí

$$a(n+1) - p(n)a(n) = 0.$$

Pokud místo $y = a(n)$ dosadíme $y = Ca(n)$, dostáváme

$$Ca(n+1) - p(n)Ca(n) = C\,[a(n+1) - p(n)a(n)] = C \cdot 0 = 0,$$

tedy posloupnost $y = Ca(n)$ je řešením rovnice (3.2). □

Definice 9. Řekneme, že posloupnosti $a(n)$ a $b(n)$ jsou *lineárně závislé v* $\mathbb{N}$, jestliže existují nenulové konstanty C_1 a C_2 takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je splněna rovnice

$$C_1\, a(n) + C_2\, b(n) = 0.$$

V opačném případě řekneme, že posloupnosti $a(n)$ a $b(n)$ jsou *lineárně nezávislé v* $\mathbb{N}$.

Věta 3.2. *Jsou-li $a(n)$ a $b(n)$ lineárně nezávislá řešení rovnice* (3.2)*, pak posloupnost $u = u(n)$,*

$$u(n) = C_1 a(n) + C_2 b(n),$$

je rovněž řešením rovnice (3.2)*.*

Označení. Nechť $a < b$, $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom

$$\prod_{k=a}^{b} p(k) = p(a)p(a+1)\cdots p(b).$$

V následující větě si popíšeme řešení homogenní diferenční rovnice (3.2):

Věta 3.3. *Nechť $p(n) \neq 0$. Je-li $n \geq 0$, pak řešení rovnice* (3.2) *je posloupnost*

$$u(n) = u(0) \prod_{k=0}^{n-1} p(k). \tag{3.3}$$

Je-li $n \geq 1$, pak řešení rovnice (3.2) *je posloupnost*

$$u(n) = u(1) \prod_{k=1}^{n-1} p(k). \tag{3.4}$$

Důkaz. Důkaz provedeme pro $n \geq 1$. Pro $n \geq 0$ by se provedl obdobně.

Homogenní rovnici (3.2) je vhodné přepsat do tvaru

$$u(n+1) = p(n)u(n), \tag{3.5}$$

odkud pomocí iterace dostaneme:

$$\begin{aligned}
u(1) &\quad \text{libovolné}, \\
u(2) &= p(1)u(1), \\
u(3) &= p(2)p(1)u(1) \\
&\vdots \\
u(n) &= p(n-1)\dots p(2)p(1)u(1) \\
u(n) &= u(1) \prod_{k=1}^{n-1} p(k).
\end{aligned}$$

$\square$

Poznámka 3.3. Rovnice (3.3) pro $n \geq 0$ bývá většinou využívána v aplikacích, v nichž je počáteční podmínka ve tvaru $y(0) = K$, kde K je konstanta.

Příklad 3.1. a) Najděte obecné řešení rovnice $u(n+1) - 4u(n) = 0$.

b) Najděte řešení rovnice $u(n+1) - nu(n) = 0$, je-li $u(1) = 1$.

Řešení. a) V tomto případě si rovnici přepíšeme do tvaru $u(n+1) = 4u(n)$. Podle věty 3.3 je řešením této rovnice

$$u(n) = u(1) \prod_{k=1}^{n-1} 4 = u(1)4^{n-1}, \qquad (n \geq 1),$$

respektive

$$u(n) = u(0) \prod_{k=0}^{n-1} 4 = u(0)4^{n}, \qquad (n \geq 0).$$

Protože jsme neměli zadánu počáteční podmínku, můžeme $u(1)$, resp. $u(0)$ označit jako C a obecné řešení je ve tvaru

$$u(n) = C4^{n-1},$$

respektive

$$u(n) = C4^{n}.$$

b) Máme tedy základní rovnici ve tvaru $u(n+1) = nu(n)$. Řešením této rovnice je

$$u(n) = u(1)\prod_{k=1}^{n-1} s = u(1)(n-1)!.$$

Protože $u(1) = 1$, dostáváme

$$u(n) = (n-1)!.$$

■

3.2 Nehomogenní rovnice

Nejprve řešme rovnici (3.1), kde $p(n) \equiv 1$, tj.

$$y(n+1) - y(n) = r(n).$$

Použijeme operátor diference (viz definice 4 v kapitole 1) $\Delta y(n) = y(n+1) - y(n)$. Rovnice (3.1) je tedy tvaru

$$\Delta y(n) = r(n).$$

Podle kapitoly 2 je obecné řešení ve tvaru

$$y(n) = \sum r(n) + C,$$

kde C je konstanta.

Příklad 3.2. Řešte diferenční rovnici $\Delta y(n) = n^2 + 1$.

Řešení. Budeme tedy řešit rovnici $y(n) = \sum (n^2 + 1)$. Podobné příklady jsme řešili ve druhé kapitole. Víme už tedy, že

$$\sum (n^2 + 1) = an^3 + bn^2 + cn + d,$$

a stejným postupem jako v příkladě 2.7 vypočítáme, že $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$ a $c = \frac{7}{6}$. Dostáváme tedy výsledek

$$y_n = n\left(\frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{6}\right) + C.$$

■

Nyní budeme hledat obecné řešení nehomogenní rovnice

$$y(n+1) - p(n)y(n) = r(n). \tag{3.1}$$

Rovnici (3.1) budeme řešit pomocí dosazení substituce $y(n) = u(n)v(n)$ do rovnice (3.1). Součin $u(n)v(n)$ je partikulárním řešením rovnice (3.1). Obecné řešení rovnice (3.1) je potom ve tvaru součtu obecného řešení homogenní rovnice (3.5), jejímž řešením je (3.3), a partikulárního řešení nehomogenní rovnice (3.1).

Dosazením substituce vypočítáme $v(n)$:

$$u(n+1)v(n+1) - p(n)u(n)v(n) = r(n)$$

$$p(n)u(n)v(n+1) - p(n)u(n)v(n) = r(n)$$

$$p(n)u(n)\Delta v(n) = r(n)$$

$$\Delta v(n) = \frac{r(n)}{p(n)u(n)} = \frac{r(n)}{u(n+1)},$$

odkud

$$v(n) = \sum \frac{r(n)}{u(n+1)} + C, \tag{3.6}$$

tedy

$$y(n) = u(n)\left[\sum \frac{r(n)}{u(n+1)} + C\right].$$

Poslední rovnice s libovolnou kostantou C nám dává vyjádření všech řešení rovnice (3.1), pokud $u(n)$ je nějaké netriviální (tj. nenulové) řešení homogenní rovnice (3.5). Při určení $u(n)$ použijeme rovnici (3.3), respektive rovnici (3.4) s počáteční podmínkou $u(0) = 1$, respektive $u(0) = 1$.

Věta 3.4. *Nechť $p(n) \neq 0$. Potom všechna řešení rovnice* (3.1) *jsou dána*

$$y(n) = u(n)\left[\sum \frac{r(n)}{u(n+1)} + C\right], \tag{3.7}$$

kde C je konstanta a $u(n)$ je libovolná nenulová funkce tvaru (3.3), *respektive* (3.4).

Metoda, kterou jsme použili k řešení rovnice (3.1), se nazývá metoda *variace konstant.*

Poznámka 3.4. Nechť $a(n)$ je posloupnost. Označme

$$\sum_{k=1}^{n-1} a(n) = a(1) + a(2) + \cdots + a(n-2) + a(n-1) \qquad \text{(určitá sumace).}$$

Pak rovnici (3.7) lze psát ve tvaru

$$y(n) = u(n)\left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{r(k)}{u(k+1)} + C\right].$$

Příklad 3.3. Řešte diferenční rovnici

$$y(n+1) - 2y(n) = n3^n.$$

Řešení. Nejprve vyřešíme příslušnou homogenní rovnici $u(n+1) - 2u(n) = 0$.
Podle věty 3.3 je jedním řešením této rovnice

$$u(n) = 2^n.$$

Nyní budeme řešit nehomogenní rovnici $y(n+1) - 2y(n) = n3^n$. Abychom našli patikulární řešení, vypočítáme nejprve $v(n)$:

$$v(n) = \sum \frac{r(n)}{u(n+1)} + C,$$

po dosazení (prozatím budeme počítat bez konstanty C)

$$v(n) = \sum \frac{n.3^n}{2^{n+1}} = \sum \frac{1}{2} n \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Víme, že hledané řešení bude mít tvar $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n(an+b)$, potřebujeme tedy zjistit hodnoty konstant a a b. Proto

$$\frac{1}{2} n \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\Delta\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n (an+b)\right] = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \Delta(an+b) + (an+b)\Delta\left(\frac{3}{2}\right)^n =$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} a + (an+b)\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}an + \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b\right).$$

Porovnáním koeficientů získáme $a = 2$ a $b = -6$, tedy

$$v(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n (2n-6) = \left(\frac{3}{2}\right)^n (n-3).$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice je ve tvaru

$$u(n)v(n) = 2^n \left(\frac{3}{2}\right)^n (n-3) = 3^n(n-3).$$

Konečně dostáváme obecné řešení rovnice:

$$y(n) = C2^n + 3^n(n-3).$$

■

Příklad 3.4. Řešte diferenční rovnici

$$2y(n+1) = -3y(n) + \frac{n+1}{2^n}.$$

Řešení. Tuto diferenční rovnici si nejprve upravíme:

$$\begin{aligned} 2y(n+1) + 3y(n) &= \frac{n+1}{2^n} \\ y(n+1) + \frac{3}{2}y(n) &= \frac{n+1}{2^{n+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(n+1) \end{aligned}$$

Nyní již můžeme řešit příslušnou homogenní rovnici

$$u(n+1) + \frac{3}{2}u(n) = 0.$$

Jejím jedním řešením je

$$u(n) = \left(-\frac{3}{2}\right)^n.$$

Najdeme partikulární řešení nehomogenní rovnice. Dosazením do (3.6) dostáváme

$$v(n) = \sum \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(n+1)}{-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}} = \sum \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}(n+1).$$

Tuto sumaci budeme opět řešit metodou neurčitých koeficientů, tedy řešení předpokládáme ve tvaru $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}(an+b)$. Potřebujeme tedy vypočítat

$$\Delta\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}(an+b)\right] = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+2}a + (an+b)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\left(-\frac{4}{3}an - \frac{1}{3}a - \frac{4}{3}b\right).$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin n získáme $a = -\frac{3}{4}$ a $b = -\frac{9}{16}$. Proto

$$v(n) = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\left(-\frac{3}{4}n - \frac{9}{16}\right).$$

Partikulární řešení $y(n) = u(n)v(n)$ je rovno:

$$y(n) = u(n)v(n) = \left(-\frac{3}{2}\right)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\left(-\frac{3}{4}n - \frac{9}{16}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{4}n + \frac{3}{16}\right).$$

Obecné řešení této diferenční rovnice je:

$$y(n) = C\left(-\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{4}n + \frac{3}{16}\right).$$

■

Příklad 3.5. Řešte diferenční rovnici

$$y(n+1) - ny(n) = (n+1)!, \qquad y(1) = 5. \tag{3.8}$$

Řešení. Nejprve vyřešíme příslušnou homogenní rovnici

$$u(n+1) = nu(n).$$

Podle věty 3.3 je jejím řešením

$$u(n) = \prod_{k=1}^{n-1} n = (n-1)!.$$

Nyní najdeme partikulární řešení rovnice (3.8):

$$v(n) = \sum \frac{(n+1)!}{n!} = \sum (n+1).$$

Použijeme opět metodu neurčitých koeficientů, tedy budeme předpokládat, že řešením je polynom $an^2 + bn + c$, tj.

$$\sum (n+1) = an^2 + bn + c,$$

odkud

$$n + 1 = \Delta(an^2 + bn + c) = a(2n+1) + b = 2an + a + b.$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin n dostaneme, že $a = \frac{1}{2}$ a $b = \frac{1}{2}$, tedy

$$v(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + c.$$

Partikulární řešení je ve tvaru

$$u(n)v(n) = (n-1)!\frac{1}{2}(n^2 + n).$$

Obecným řešením rovnice (3.8) je

$$y(n) = (n-1)!\frac{1}{2}(n^2 + n + 1 + C) = (n-1)!\frac{1}{2}(n^2 + n + D) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{2}n(n+1) + D(n-1)! = \frac{(n+1)!}{2} + D(n-1)!.$$

K vyčíslení D položme $n = 1$:

$$5 = y(1) = \frac{2!}{2} + D.0!,$$

tedy $D = 4$. Obecné řešení rovnice (3.8) je

$$y(n) = \frac{(n+1)!}{2} + 4(n-1)^2.$$

Můžeme provést zkoušku:

$$\begin{aligned} y(n+1) - ny(n) &= \frac{(n+2)!}{2} + 4n! - n\frac{(n+1)!}{2} - 4n! \\ &= \frac{(n+1)!}{2}\,[n+2-n] = (n+1)!. \end{aligned}$$

■

Poznámka 3.5. K řešení tohoto příkladu lze využít Bernoulliho polynomy – viz [3].

3.3 Závislost řešení na počáteční podmínce

Uvažujme počáteční úlohu

$$y(n+1) - ny(n) = 1, \quad y(1) = C. \tag{3.9}$$

Tuto úlohu je možné vypočítat přímo krok za krokem ze samotné diferenční rovnice, tj. $y(2) = y(1) + 1 = C + 1$, adt. V případě, že C je iracionální číslo a hodnoty budeme zaokrouhlovat, může představovat chyba při zaokrouhlení závažný problém.

Nejprve vyřešíme rovnici (3.9) pro $C \in \mathbb{R}$. Řešením homogenní rovnice

$$u(n+1) - nu(n) = 0$$

je

$$u(n) = u(1)\prod_{k=1}^{n-1} k = C(n-1)!.$$

Obecné řešení je podle (3.7) tvaru:

$$y(n) = (n-1)!\left[\sum \frac{1}{n!} + C\right], \tag{3.10}$$

podle poznámky 3.4 na straně 28 toto řešení přepišme na tvar

$$y(n) = (n-1)!\left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} + C\right].$$

Řešme nyní tuto počáteční úlohu pro konkrétní hodnotu C. Dokažme, že speciálně počáteční úloha

$$y(n+1) - ny(n) = 1, \qquad y(1) = 1 - e = -1,718281\dots \tag{3.11}$$

má záporné řešení.

Nejprve ukažme, že platí
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e - 1.$$
Rozepišme e^x pomocí Taylorova rozvoje:
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Zvolme si $x = 1$:
$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \cdots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$
a odtud již plyne
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e - 1.$$
Potom ale
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} < e - 1$$
a
$$y(n) < (n-1)!(1 - e + e - 1) = 0.$$
Proto má rovnice (3.11) řešení $y(n) < 0$ pro všechna n.

Nyní řešme rovnici (3.11) přímo se zaokrouhlenou hodnotou $y(1)$:
$$\begin{aligned}
y(1) &= -1,718,\\
y(2) &= y(1) + 1 = -0,718,\\
y(3) &= 2y(2) + 1 = -0,436,\\
y(4) &= 3y(3) + 1 = -0,308,\\
y(5) &= 4y(4) + 1 = -0,232,\\
y(6) &= 5y(5) + 1 = -0,16,\\
y(7) &= 6y(6) + 1 = 0,04,\\
y(8) &= 7y(7) + 1 = 1,28.
\end{aligned}$$

Vidíme, že při tomto postupu dostáváme $y(n) > 0$ pro $n \geq 7$. Přitom výpočty jsou přesné, jediná chyba se vyskytla v počáteční aproximaci.

Kapitola 4

Speciální funkce a diferenční rovnice

4.1 Gama funkce

Gama funkce $\Gamma(x)$ patří mezi vyšší transcendentní funkce a je definována jako

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t, \qquad x > 0.$$

Integrací per partes dostáváme

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x}\,\mathrm{d}t \\ &= [-e^{-t}t^x]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-t}) x t^{x-1}\,\mathrm{d}t \\ &= x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

takže Γ vyhovuje diferenční rovnici 1. řádu

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{4.1}$$

Poznamenejme zde, že nezávislá proměnná není omezena pouze na diskrétní hodnoty. Pokud je hodnota $\Gamma(x)$ známa pro nějaké reálné x, můžeme vypočítat $\Gamma(x+1), \Gamma(x+2), \ldots$ rekurzivně z (4.1). Navíc, pokud napíšeme diferenční rovnici ve tvaru

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \tag{4.2}$$

$\Gamma(x)$ může mít smysl pro všechna x kromě $x = 0, -1, -2, \ldots$.

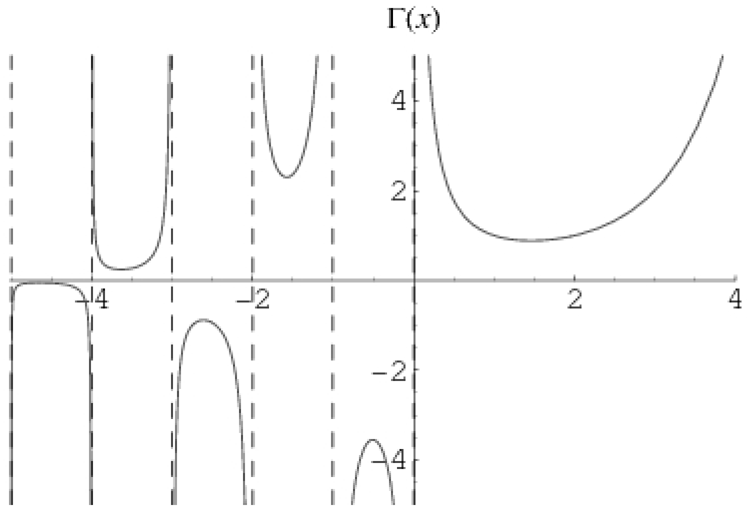
Pro $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t = 1,\\
\Gamma(2) &= \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1,\\
\Gamma(3) &= \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2,\\
\Gamma(4) &= \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3\cdot 2,\\
&\vdots\\
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!,
\end{aligned}$$

odkud

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{4.3}$$

Na obr. 4.1 je znázorněna funkce $\Gamma(x)$ pro reálné hodnoty x z intervalu $(-5,4)$, $x \neq 0,-1,-2,-3,-4$.



Obrázek 4.1: Graf funkce $\Gamma(x)$ pro $-5 < x < 4$

Nyní si uvedeme definici *faktoriálové funkce*, o které jsme se zmínili již dříve, v souvislosti s pojmem diskrétní mocnina.

Definice 10. *Faktoriálová funkce* $t^{(r)}$ je definována takto:

a) jestliže $r = 1, 2, 3, \ldots$, potom $t^{(r)} = t(t-1)(t-2)\cdots(t-r+1)$,

b) jestliže $r = 0$, potom $t^{(0)} = 1$,

c) jestliže $r = -1, -2, -3, \ldots$, potom $t^{(r)} = \frac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t-r)}$,

d) jestliže r není celé číslo, potom

$$t^{(k)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}.$$

Poznámka 4.1. Pro počítání diference faktoriálové funkce používáme větu 2.4 na straně 15, pro počítání sumace potom vztahy uvedené ve větě 2.8 na straně 18.

Je samozřejmé, že definice $t^{(r)}$ je dána pouze pro ty hodnoty t a r, ve kterých mají uvedené vzorce smysl. Například $(-2)^{(-3)}$ není definováno, protože ve výrazu (c) nemůžeme dělit nulou a $\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)}$ nemá smysl, protože není definováno $\Gamma(0)$.

Můžeme rovněž ukázat, že výraz (d) souhlasí s výrazy (a), (b) a (c) pro celá čísla k, kromě jistých diskrétních hodnot t, ve kterých není gama funkce definována.

Nechť r je celé číslo. Potom

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)} &= \frac{t\Gamma(t)}{\Gamma(t-r+1)} = \frac{t(t-1)\Gamma(t-1)}{\Gamma(t-r+1)} \\ &= \cdots = \frac{t(t-1)\cdots(t-r+1)\Gamma(t-r+1)}{\Gamma(t-r+1)} \\ &= t(t-1)(t-2)\cdots(t-r+1),\end{aligned}$$

tedy výraz (a) je speciálním případem (d). Podobně bychom mohli dokázat, že výrazy (b) a (c) jsou speciálními případy (d).

Připomeňme si, že binomický koeficient je definován takto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Z definice 10(a) dostáváme

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{(k)}}{\Gamma(k+1)},$$

pokud n a k jsou kladná celá čísla, $n \geq k$. V následující větě si ukážeme jak vypočítat diferenci binomického koeficientu.

Věta 4.1. *Pro všechna t a r, ve kterých je výraz $t^{(r)}$ definován, platí*

$$\Delta\binom{t}{r} = \binom{t}{r-1} \qquad (r \neq 0).$$

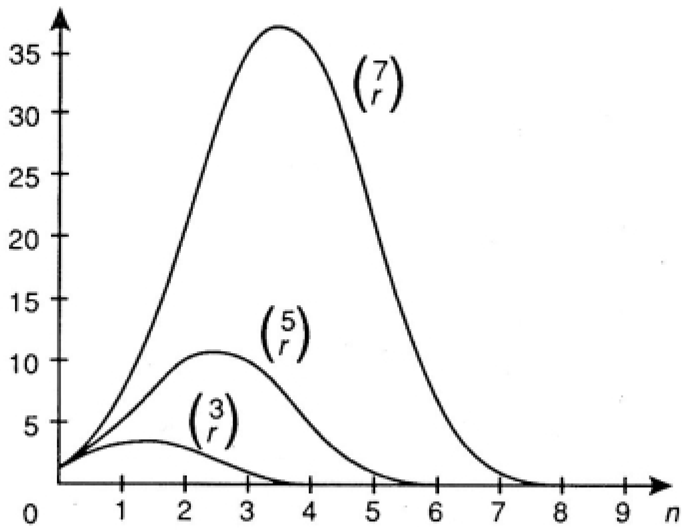
Důkaz.

$$\Delta\binom{t}{r} = \Delta\frac{t^{(r)}}{\Gamma(r+1)} = \frac{1}{\Gamma(r+1)}\Delta t^{(r)},$$

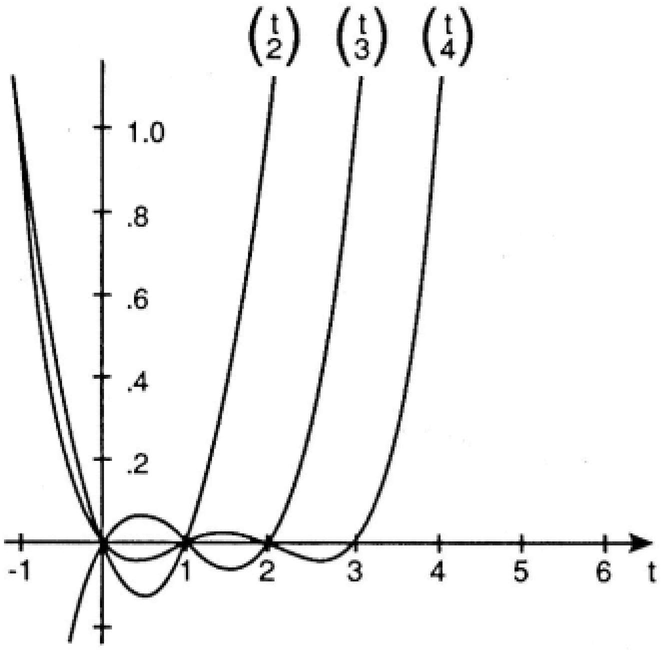
podle věty 2.4 platí $\Delta t^{(r)} = rt^{(r-1)}$, tedy

$$\Delta\binom{t}{r} = \frac{rt^{(r-1)}}{\Gamma(r+1)} = \frac{t^{(r-1)}}{\Gamma(r)} = \binom{t}{r-1}.$$

□



Obrázek 4.2: Binomické koeficienty jako funkce r



Obrázek 4.3: Binomické koeficienty jako funkce t

4.2 Řešení homogenní rovnice pomocí sumace

Řešme nyní homogenní rovnici (3.2) a nehomogenní rovnici (3.1) pro n v diskrétním nebo spojitém oboru. Předpokládejme, že $p(n) > 0$. Aplikujme přirozený logaritmus na obě strany přepsané homogenní rovnice (3.5) na straně 26:

$$\begin{aligned} \ln|u(n+1)| &= \ln|u(n)| + \ln p(n), \\ \Delta \ln|u(n)| &= \ln p(n), \\ \ln|u(n)| &= \sum \ln p(n) + D, \end{aligned}$$

kde $D \in \mathbb{R}$. Označme exponenciální funkci $e^x = \exp x$. Potom

$$\begin{aligned} |u(n)| &= \exp(D) \exp\left(\sum \ln p(n)\right), \\ u(n) &= C \exp\left(\sum \ln p(n)\right), \end{aligned} \tag{4.4}$$

kde $C = \exp(D)$. Jakmile najdeme řešení $u(n)$ homogenní rovnice (3.2), řešení $y(n)$ rovnice (3.1) můžeme vypočítat pomocí věty 3.4 na straně 28.

Tvrzení následující věty využíváme při řešení příkladů.

Věta 4.2. *Nechť C je konstanta. Potom*

$$\sum \ln n = \ln \Gamma(n) + C, \qquad (a \neq -1). \tag{4.5}$$

Důkaz. Potřebujeme dokázat, že $\sum \ln n = \ln \Gamma(n) + C$, tj. že

$$\ln n = \Delta(\ln \Gamma(n) + C)$$

(podle definice 7 na straně 16). Vypočítáme tedy diferenci

$$\Delta(\ln \Gamma(n) + C) = \Delta \ln \Gamma(n) + \Delta C = \ln \Gamma(n+1) - \ln \Gamma(n) + 0 = \ln \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} = \ln n$$

podle vztahu (4.2). □

Příklad 4.1. Řešte rovnici

$$u(n+1) = \frac{n}{2n^2 + 3n + 1} u(n). \tag{4.6}$$

Řešení. Při řešení tohoto příkladu je výhodné upravit posloupnost $p(n)$ do součinového tvaru:

$$\frac{n}{2n^2 + 3n + 1} = \frac{1}{2} \frac{n}{n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{n}{(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right)}.$$

Podle vztahu (4.4) dostáváme

$$u(n) = C \exp\left(\sum \left[\ln \frac{1}{2} \frac{n}{(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right]\right).$$

Platí

$$\sum \left[\ln \frac{1}{2} \frac{n}{(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right] = \sum \left[\ln \frac{1}{2} + \ln n - \ln(n+1) - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \ln \frac{1}{2} \sum 1 + \sum \ln n - \sum \ln(n+1) - \sum \ln(n + \frac{1}{2}).$$

Použijeme-li vztah (4.5), dostáváme

$$\ln \frac{1}{2} \sum 1 + \sum \ln n - \sum \ln(n+1) - \sum \ln(n + \frac{1}{2}) =$$

$$= n \ln \frac{1}{2} + \ln \Gamma(n) - \ln \Gamma(n+1) - \ln \Gamma \left(n + \frac{1}{2}\right),$$

tedy

$$\begin{aligned}
u(n) &= C \exp \left(\sum \left[\ln \frac{1}{2} \frac{n}{(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)} \right] \right) \\
&= C \exp \left(n \ln \frac{1}{2} + \ln \Gamma(n) - \ln \Gamma(n+1) - \ln \Gamma \left(n + \frac{1}{2}\right) \right) \\
&= C \exp \left(\ln \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \right] \right) \\
&= C \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Podle vztahu (4.2) můžeme tento výsledek upravit na tvar

$$u(n) = C \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

■

Poznámka 4.2. Obecně platí, že pokud je posloupnost $p(n)$ racionální funkcí, tj. rovnice (3.2) je ve tvaru

$$u(n+1) = a \frac{(n-r_1)\cdots(n-r_n)}{(n-s_1)\cdots(n-s_m)} u(n), \tag{4.7}$$

kde $a, r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_m$ jsou konstanty, řešení diferenční rovnice (4.7) je podle věty 4.2 ve tvaru

$$u(n) = Ca^n \frac{\Gamma(n-r_1)\cdots\Gamma(n-r_n)}{\Gamma(n-s_1)\cdots\Gamma(n-s_m)}, \tag{4.8}$$

kde $C \in \mathbb{R}$. Přímou substitucí můžeme dokázat, že výraz pro $u(n)$ řeší diferenční rovnici pro všechny hodnoty n, pro které $\Gamma(n - s_k) \neq 0$, $k = 1, \ldots, m$. Můžeme učinit závěr, že rovnice (3.5) je řešitelná ve členech gama funkcí , pokud $p(n)$ je racionální funkce.

Kapitola 5

Aplikace

5.1 Aplikace diferenčních rovnic a jejich řešení

V této podkapitole si ukážeme několik slovních úloh, při jejichž řešení využijeme diferenční rovnice 1. řádu.

Příklad 5.1. (Hanojská věž) Určete nejmenší počet pohybů $y(n)$ potřebných k přemístění n disků z prvního kolíku na třetí kolík, viz obr. 5.1. Provést pohyb znamená vzít horní disk z kteréhokoliv kolíku a přemístit jej na jiný kolík, který je buď volný (tzn. bez disku), nebo obsahuje pouze větší disky než je přemisťovaný disk (tzn. větší disk nelze dát na menší).

Řešení. Můžeme najít řešení tohoto problému, pokud nalezneme vztah mezi $y(n+1)$ a $y(n)$.

Představme si, že $n+1$ disků je již přesunuto. Nevyhnutelný mezistupeň úspěšného řešení je ukázán na obr. 5.2. Všimněme si, že právě $y(n)$ pohybů je potřebných k tomu, abychom dostali toto uspořádání; potom minimální počet pohybů, které potřebujeme, abychom přesunuli n disků z kolíku 1 na kolík 2, je stejný jako minimální počet pohybů k přesunutí n disků z kolíku 2 na kolík 3. Nyní potřebujeme jeden pohyb největšího disku na kolík 3 a $y(n)$ dodatečných pohybů k přemístění dalších n disků z kolíku 2 na kolík 3. Dospěli jsme k diferenční rovnici

$$y(n+1) = y(n) + 1 + y(n)$$

neboli

$$y(n+1) - 2y(n) = 1, \tag{5.1}$$

kterou vyřešíme. Nejprve najdeme řešení homogenní rovnice

$$u(n+1) - 2u(n).$$

Podle věty 3.3 je jejím řešením posloupnost

$$u(n) = 2^n.$$

Řešení nehomogenní rovnice (5.1) potom bude mít podle věty 3.4 tvar

$$y(n) = 2^n \left[\sum \frac{1}{2^{n+1}} + C \right],$$

kde

$$\sum \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2} - 1} = -\frac{1}{2^n}.$$

Po dosazení dostáváme

$$y(n) = 2^n \left[-\frac{1}{2^n} + C \right] = -1 + C2^n.$$

Abychom vypočítali konstantu C, dosadíme počáteční podmínku $y(1) = 1$:

$$y(1) = -1 + 2C = 1,$$

odkud $C = 1$. Řešením této úlohy je tedy vztah

$$y(n) = 2^n - 1,$$

tj. je třeba vykonat $2^n - 1$ pohybů k přemístění n disků z prvního kolíku na třetí kolík.

Snadno ověříme výsledek pro $n = 2$ a $n = 3$. Pro $n = 2$ dostáváme $y(2) = 3$, je tedy potřeba tří pohybů k přemístění dvou disků z prvního kolíku na třetí kolík za dodržení podmínek pro přemístění. Pro $n = 3$ dostáváme $y(3) = 7$, potřebujeme proto sedm pohybů k tomu, abychom přemístili tři disky z prvního kolíku na třetí.

■

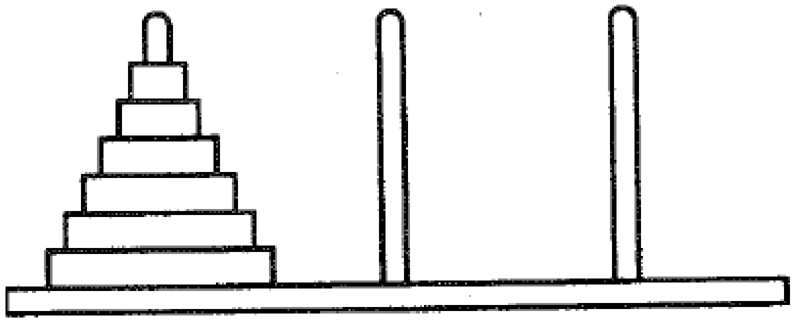
Příklad 5.2. Pan Novotný si koupil nové auto za 600 100 Kč a chtěl by jej splácet měsíčně. Prodávající společnost mu nabídla půjčku na koupi auta s ročním úrokem $8,9\%$. Pan Novotný chce auto splatit za pět let. Jak vysoká bude měsíční splátka?

Řešení. Označíme si měsíční splátku M. Symbolem $y(n)$ si označíme částku, kterou bude pan Novotný dlužit po n měsících. První měsíc splatí pan Novotný M korun, z nichž část půjde na vlastní splátku, část na splacení úroku. Po prvním měsíci bude velikost dluhu

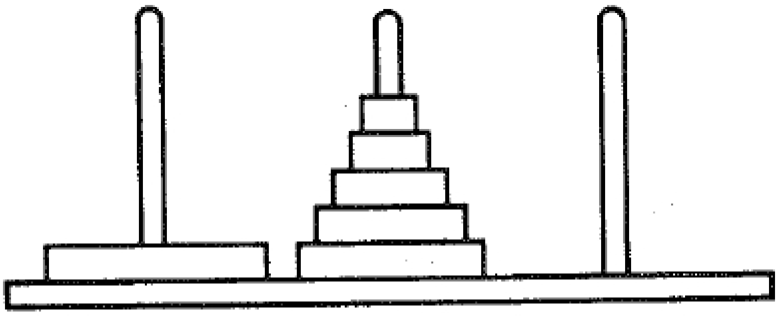
$$y(1) = 600100 - M + \frac{0,089}{12} 600100. \tag{5.2}$$

Po uplynutí n-tého měsíce bude pan Novotný dlužit

$$y(n) = y(n-1) - M + \frac{0,089}{12} y(n-1) = \left(1 + \frac{0,089}{12}\right) y(n-1) - M. \tag{5.3}$$



Obrázek 5.1: Výchozí pozice disků



Obrázek 5.2: Prostřední pozice

Podle věty 3.4 dostáváme řešení ve tvaru

$$y(n) = \left(1 + \frac{0,089}{12}\right)^n \left[\sum \frac{-M}{\left(1 + \frac{0,089}{12}\right)^{n+1}} + C\right],$$

kde

$$\sum \frac{-M}{\left(1 + \frac{0,089}{12}\right)^{n+1}} = -\frac{M}{1 + \frac{0,089}{12}} \sum \left(\frac{1}{1 + \frac{0,089}{12}}\right)^n =$$

$$= -\frac{M}{1 + \frac{0,089}{12}} \left(\frac{1}{1 + \frac{0,089}{12}}\right)^n : \left(\frac{1}{1 + \frac{0,089}{12}} - 1\right) =$$

$$= M \frac{1}{\left(1 + \frac{0,089}{12}\right)^{n+1}} \cdot \frac{1 + \frac{0,089}{12}}{\frac{0,089}{12}} = \frac{12M}{0,089} \frac{1}{\left(1 + \frac{0,089}{12}\right)^n}.$$

Dostáváme tedy řešení

$$y(n) = \left(1 + \frac{0,089}{12}\right)^n \left[\frac{12M}{0,089} \frac{1}{\left(1 + \frac{0,089}{12}\right)^n} + C\right] = \frac{12M}{0,089} + C \left(1 + \frac{0,089}{12}\right)^n.$$

Konstantu C dostaneme dosazením počáteční podmínky $y(0) = 600100$:

$$y(0) = \frac{12M}{0,089} + C = 600100,$$

tj. $C = 600100 - \frac{12M}{0,089}$ a celkově

$$y(n) = 600100 \left(1 + \frac{0,089}{12}\right)^n - \frac{12M}{0,089} \left[\left(1 + \frac{0,089}{12}\right)^n - 1\right].$$

Pokud chce pan Novotný splatit auto za pět let, dostáváme podmínku $y(60) = 0$ a tedy

$$M = \frac{0,089 \cdot 600100}{12} \frac{\left(1 + \frac{0,089}{12}\right)^{60}}{\left[\left(1 + \frac{0,089}{12}\right)^{60} - 1\right]} \doteq 12428,$$

tj. pan Novotný bude splácet měsíčně 12 428 Kč.

■

Příklad 5.3. Předpokládejme, že vložíme 2000 Kč na začátku každého roku do banky, která má roční úrokovou sazbu 8%. Kolik budeme mít v bance na konci n-tého roku?

Řešení. Označme $y(n)$ množství peněz v bance na konci n-tého roku. Potom

$$\begin{aligned} y(n+1) &= y(n) + 2000 + (y(n) + 2000)(0,08) \\ &= 1,08y(n) + 2160, \end{aligned} \tag{5.4}$$

kde $(y(n)+2000)\,(0,08)$ představuje úrok z n-tého roku. Řešení homogenní rovnice

$$u(n+1) = 1,08u(n)$$

je podle věty 3.3

$$u(n) = (1,08)^n.$$

Potom obecné řešení rovnice (5.4) je podle věty 3.4 ve tvaru

$$\begin{aligned} y(n) &= 1,08^n \left[\sum \frac{2160}{1,08^{n+1}} + C\right] \\ &= 1,08^n \left[\frac{2160}{1,08} \sum \left(\frac{1}{1,08}\right)^n + C\right]. \end{aligned}$$

Podle věty 2.8(b)

$$\begin{aligned} y(n) &= 1,08^n \left[\frac{2160}{1,08} \frac{\left(\frac{1}{1,08}\right)^n}{\frac{1}{1,08}-1} + C\right] \\ &= -27000 + C(1,08)^n. \end{aligned}$$

Jelikož $y(0)=0$, dostáváme $C = 27000$, takže

$$y(n) = 27000\left[(1,08)^n - 1\right].$$

Například na konci dvacátého roku můžeme mít v bance

$$y(20) = 27000\left[1,08^{20}-1\right] \doteq 98846,$$

tj. téměř 100 000 Kč, viz obr. 5.3.

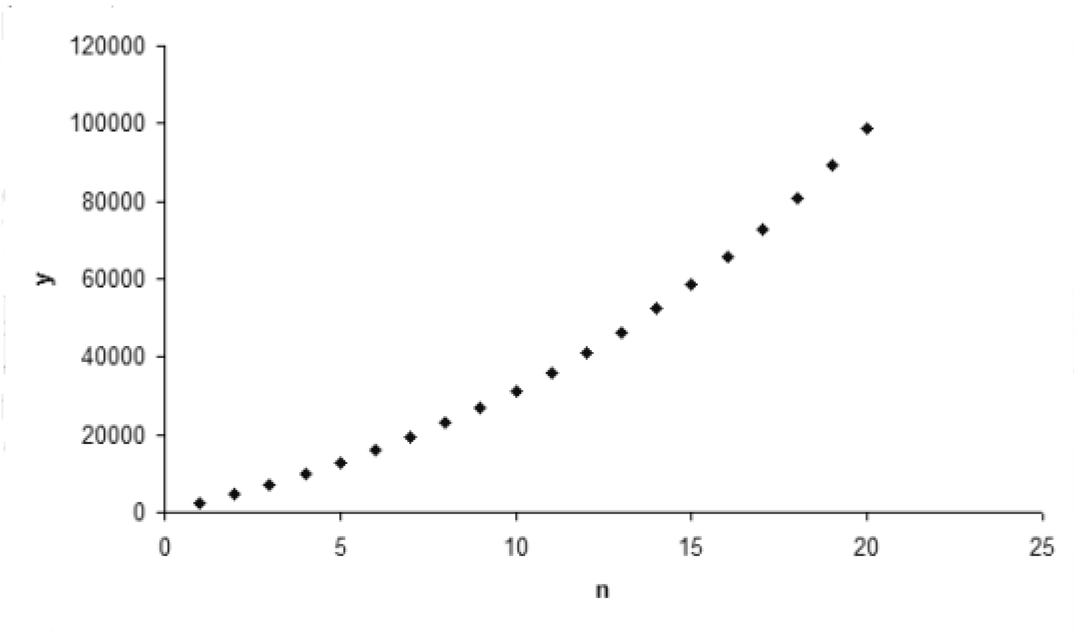
■

Příklad 5.4. Paní Volná uzavřela stavební spoření a měsíčně na něj posílá 2000 Kč (vždy k 1. v měsíci). Vklad je úročen roční úrokovou mírou 4% a úročení probíhá jednou za rok. Roční příspěvek státu činí 3000 Kč a připisuje se vždy 1. května následujícího roku. Kolik korun naspoří paní Volná za čtyři roky?

Řešení. Množství peněz naspořených za n let si označíme $y(n)$. Předpokládáme-li, že každý měsíc je přesně dvanáctina roku, můžeme sestavit vztah

$$y(n+1) = 1,04y(n) + 12\cdot 2000 + 3000 + 0,04\cdot 2000\left(\frac{12}{12}+\frac{11}{12}+\cdots+\frac{1}{12}\right) + 0,04\cdot\frac{8}{12}\cdot 3000,$$

kde $0,04\cdot 2000\left(\frac{12}{12}+\frac{11}{12}+\cdots+\frac{1}{12}\right)$ jsou úroky z vkladů za aktuální rok a $0,04\cdot\frac{8}{12}\cdot 3000$ je úrok ze státního příspěvku připsaného v aktuálním roce.



Obrázek 5.3: Množství peněz po n letech

Po úpravě získáváme diferenční rovnici

$$y(n+1) = 1,04y(n) + 27600. \tag{5.5}$$

Řešením příslušné homogenní rovnice

$$u(n+1) - 1,04u(n) = 0$$

je podle věty 3.3

$$u(n) = (1,04)^n.$$

Řešení nehomogenní rovnice (5.5) je podle věty 3.4 ve tvaru

$$\begin{aligned}
y(n) &= (1,04)^n \left[\sum \frac{27600}{(1,04)^{n+1}} + C\right] \\
&= (1,04)^n \left[\frac{27600}{1,04} \sum \frac{1}{(1,04)^n} + C\right] \\
&= (1,04)^n \left[\frac{27600}{1,04} \sum \left(\frac{1}{1,04}\right)^n + C\right] \\
&= (1,04)^n \left[\frac{27600}{1,04} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1,04}\right)^n}{\frac{1}{1,04} - 1} + C\right] \\
&= -690000 + C(1,04)^n.
\end{aligned}$$

Konstantu C vypočítáme z počáteční podmínky $y(0) = 0$:

$$y(0) = -690000 + C = 0,$$

tedy $C = 690000$. Dostáváme tedy obecné řešení rovnice (5.5):

$$y(n) = 690000\left[(1,04)^n - 1\right]. \tag{5.6}$$

Abychom zjistili, kolik si paní Volná naspořila za čtyři roky, vypočítáme $y(4)$:

$$y(4) = 690000\left[(1,04)^4 - 1\right] \doteq 117203.$$

Paní Volná tedy naspoří na stavebním spoření za čtyři roky přibližně 117203 Kč.

■

5.2 Řetězové zlomky

Nyní si všimneme zajímavé souvislosti mezi nehomogenní rovnicí (3.1) a vzestupnými řetězovými zlomky. Přepišme rovnici (3.1) do zlomkového tvaru:

$$y(n) = \frac{-r(n) + y(n+1)}{p(n)}. \tag{5.7}$$

Potom

$$y(n+1) = \frac{-r(n+1) + y(n+2)}{p(n+1)}.$$

Po dosazení do (5.7) dostáváme

$$y(n) = \frac{-r(n) + \frac{-r(n+1)+y(n+2)}{p(n+1)}}{p(n)} = -\frac{r(n)}{p(n)} + \frac{-r(n+1)}{p(n)p(n+1)} + \frac{y(n+2)}{p(n)p(n+1)}. \tag{5.8}$$

Nyní si můžeme vyjádřit z rovnice (5.7) $y(n+2)$ a dosadit jej do (5.8) a takto můžeme pokračovat dále. Tímto postupem dospějeme k nekonečné řadě

$$y(n) = \frac{-r(n)}{p(n)} + \frac{-r(n+1)}{p(n)p(n+1)} + \cdots,$$

neboli

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-r(n+k)}{p(n)\cdots p(n+k)}. \tag{5.9}$$

Pokud tato řada konverguje, její suma musí být řešením rovnice (3.1), což můžeme ověřit pomocí substituce.

Příklad 5.5. Pro rovnici

$$y(n+1) - ny(n) = -3^n \tag{5.10}$$

je rovnice (5.9) tvaru

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{n+k}}{n(n+1)\cdots(n+k)} = \frac{3^n}{n} \sum_{k=0}^{\infty} 3^k n^{(-k)}, \tag{5.11}$$

kde $n^{(-k)}$ je faktoriálovou funkcí z definice 10. Je-li $n \in \mathbb{N}$ pevné, řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k n^{(-k)}$$

konverguje a řešení rovnice (5.10) je dáno vztahem (5.11).

Seznam použité literatury

[1] *Diference a diferenční rovnice*
http://www.matematika.educato.cz/vyuka/matematika_i/diferencstr6.pdf

[2] Mařík R. *Diferenciální a diferenční rovnice*, Brno: Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně, 2004.

[3] Kelley W., Peterson A. *Difference Equation: An Introduction with Applications*, San Diago: ACADEMIC PRESS, 1991.

[4] Prágerová A. *Diferenční rovnice*, Praha: SNTL, 1971.

[5] Kobza A. *Diferenční rovnice ve středoškolské matematice*, diplomová práce, 2001.

[6] Panák M., Slovák J. *Drsná matematika*, 2007.
https://is.muni.cz/el/1433/podzim2008/MB102/um/roughmath.pdf

[7] Odvárko O. *Matematika pro gymnázia: Posloupnosti a řady*, Praha: Prometheus, 2003.

[8] Jirásek F., Kriegelstein E., Tichý Z. *Sbírka řešených příkladů z matematiky*, Praha: SNTL, 1982.

[9] *Poznámky z přednášek k předmětu Matematická analýza IV. od doc. J. Kalase*, Brno, 2007.