Příklad 1. Výpočtem determinantu rozhodněte, zda následující vektory tvoří bázi $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} 2\\3\\1\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\2\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}$$

Příklad 2. Najděte nějakou bázi podprostoru $M = \{f \mid f(1) = 0\}$ prostoru polynomů stupně nejvýše dvě $\mathrm{P}_2(x)$.

Příklad 3. Každý vektorový prostor U konečné dimenze n je izomorfní s $\mathbb{R}^n$ pomocí zobrazení $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ daného předpisem $f(u) = [u]_\alpha$, kde α je libovolná báze prostoru U. Proto veškeré počítání lze převést na počítání v $\mathbb{R}^n$ a výsledek pak převést zpět do původního prostoru.

Ukažte, že zobrazení $f\colon \mathrm{P}_2(x) \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a\\b\\c \end{pmatrix}$ je izomorfizmus vektorových prostorů (je lineární a bijekce). Poznamenejme, že je to zobrazení, které přiřazuje polynomu jeho souřadnice ve standardní bázi $\epsilon_{\mathrm{P}_2(x)} = (1, x, x^2)$.

Příklad 4. Jsou následující zobrazení lineární?

- $f\colon \mathbb{C} \to \mathrm{Mat}(3, 2, \mathbb{R})$ dané předpisem $f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & 6b\\ a+2b & b^2\\ a & a+1 \end{pmatrix}$
- $f\colon \mathbb{C} \to \mathrm{Mat}(3, 2, \mathbb{R})$ dané předpisem $f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & 6b\\ a+2b & ab\\ a & a+b \end{pmatrix}$
- $f\colon \mathbb{C} \to \mathrm{Mat}(3, 2, \mathbb{R})$ dané předpisem $f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & 6b\\ a+2b & a\\ a & a+b \end{pmatrix}$
- $f\colon \mathbb{R} \to \mathrm{P}_3(x)$ dané předpisem $f\left(\begin{pmatrix} a\\b\\c \end{pmatrix}\right) = (a + b) + 2cx + (3b + c)x^2$

Příklad 5. Dokažte, že pro lineární zobrazení $f\colon U \to V$ platí $f(o_U) = o_V$, kde o značí nulový vektor. Uvažte libovolný vektor $u \in U$ a počítejte $f(u - u)$.

Příklad 6. Najděte jádro a obraz následujících zobrazení. Poznamenejme, že jádro zobrazení $f\colon U \to V$ obsahuje pouze nulový vektor právě tehdy, když je injektivní a je $\mathrm{Im} f = V$ právě tehdy, když zobrazení f je surjektivní.

- $f\colon \mathrm{P}_2(x) \to \mathbb{C}$ dané předpisem $f(a + bx + cx^2) = a + b + i(2b + 3c)$
- $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f\left(\begin{pmatrix} a\\b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b\\b \end{pmatrix}$
- kolmá projekce roviny $\mathbb{R}^2$ na přímku $y = 0$
- $f\colon \mathrm{Mat}(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f\left(\begin{pmatrix} a & b\\ c & d \end{pmatrix}\right) = 2a + 3b + c$
- $f\colon \mathrm{Mat}(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f\left(\begin{pmatrix} a & b\\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b\\ a+2c\\ d \end{pmatrix}$
- $f\colon \mathrm{Mat}(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathrm{P}_2(x)$ dané předpisem $f\left(\begin{pmatrix} a & b\\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + b) + (a + 2c)x + dx^2$

Příklad 7. Uvažme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Víme, že

$$f\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)=\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\1\end{smallmatrix}\right),\ f\left(\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\right)=\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right),\ f\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\right)=\left(\begin{smallmatrix}2\\4\\2\end{smallmatrix}\right),\ f\left(\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\3\\0\end{smallmatrix}\right).$$

1. Nejprve spočítejte obrazy $f(e_i)$, kde e_i tvoří standardní (jinak řečeno kanonickou) bázi $\epsilon_4 = (e_1, e_2, e_3, e_4) = \left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$. Užijte toho, že f je lineární, tj. že $f(ax+by) = af(x) + bf(y)$. Znamená to, že musíte vhodně volit koeficienty a, b z $\mathbb{R}$ a volit vektory x, y z $\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\right\}$.
2. Pak $f(e_i)$ pro $i = 1, \ldots, 4$ postupně tvoří sloupce matice zobrazení $(f)_{\epsilon_3\epsilon_4}$.
3. Najděte předpis tohoto zobrazení. (Předpis získáme z právě vypočítané matice.)
4. Najděte matici zobrazení $(f)_{\alpha\epsilon_4}$, jestliže je báze $\alpha = \left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$. Buď můžete využít násobení matic, pak je $(f)_{\alpha\epsilon_4} = (\mathrm{id})_{\alpha\epsilon_3} \cdot (f)_{\epsilon_3\epsilon_4}$, nebo z definice i-tý sloupec je $[f(e_i)]_\alpha$ a $i = 1, \ldots 4$.
5. Najděte jádro $\mathrm{Ker} f$ a obraz $\mathrm{Im} f$ (nejlépe pomocí báze jako podprostor $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$).

Příklad 8. Najděte následující matice lineárního zobrazení f.

- Najděte $(f)_{\gamma\gamma}$, jestliže je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dané předpisem $f\left(\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix}a+b\\b\end{smallmatrix}\right)$ a $\gamma = \left(\left(\begin{smallmatrix}6\\3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}10\\2\end{smallmatrix}\right)\right)$.
- Najděte matice přechodu $\mathrm{id}_{\epsilon_{\mathrm{Mat}(3,2,\mathbb{R})}\alpha}$, $\mathrm{id}_{\alpha\epsilon_{\mathrm{Mat}(3,2,\mathbb{R})}}$, $\mathrm{id}_{\beta\alpha}$ a $\mathrm{id}_{\alpha\beta}$, jestliže je

$$\alpha = \left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\right) \text{ a}$$

$$\beta = \left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)\right).$$

- Najděte $(f)_{\beta\alpha}$, jestliže je $f\colon \mathbb{C} \to \mathrm{P}_2(x)$ dané předpisem $f(a+bi) = b + (a+b)x + 3bx$ a $\alpha = (2+i, 1+3i)$ a $\beta = (1+x^2, x+x^2, 1+x)$.

Příklad 9. V $\mathrm{P}_2(x)$ uvažujme bázi $\epsilon_{\mathrm{P}_2(x)} = (1, x, x^2)$ a bázi $\alpha = (1+2x+x^2, 1+x+x^2, -1-x+3x^2)$. Vypočtěte matici přechodu $(\mathrm{id})_{\alpha\epsilon_{\mathrm{P}_2(x)}}$, od báze $\epsilon_{\mathrm{P}_2(x)}$ k bázi α a s její pomocí vypočtěte souřadnice polynomu $2+3x+6x^2$ v bázi α.