KAPITOLA 4

Analytická geometrie

4.1. Napište parametrické vyjádření přímky určené rovnicemi

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 2, \\ 2x & + & y & - & z & = & 5 \end{array}$$

v $\mathbb{R}^3$.

Řešení. Zřejmě postačuje vyřešit uvedenou soustavu rovnic. Můžeme ale postupovat také odlišně. Potřebujeme totiž najít nenulový (směrový) vektor, který bude kolmý na (normálové) vektory $(1,-2,1)$, $(2,1,-1)$. Vektorový součin

$$(1,-2,1) \times (2,1,-1) = (1,3,5)$$

ovšem takový vektor dává. Všimneme-li si, že např. uspořádaná trojice

$$(x,y,z) = (2,-1,-2)$$

vyhovuje dané soustavě, dostaneme výsledek

$$[2,-1,-2] + t\,(1,3,5)\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4.2. Rovinu

$$\varrho : [0,3,2,5] + t\,(1,0,1,0) + s\,(2,-1,-2,2)\,, \quad t,s \in \mathbb{R}$$

ve čtyřrozměrném euklidovském prostoru zadejte implicitně.

Řešení. Úkolem je najít soustavu lineárních rovnic čtyř proměnných x,y,z,u (čtyři proměnné jsou dány dimenzí prostoru), jíž budou vyhovovat právě souřadnice bodů uvedené roviny. Poznamenejme, že hledaná soustava bude obsahovat $2 = 4 - 2$ lineárně nezávislé rovnice. Příklad vyřešíme tzv. eliminací parametrů. Body $[x,y,z,u] \in \varrho$ splňují

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & & & t & + & 2s, \\ y & = & 3 & & & - & s, \\ z & = & 2 & + & t & - & 2s, \\ u & = & 5 & & & + & 2s, \end{array}$$

přičemž $t,s \in \mathbb{R}$. Odtud můžeme ihned přejít k maticovému zápisu

$$\left(\begin{array}{cc|cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right),$$

kde první dva sloupce jsou směrové vektory roviny, za svislou čarou následuje záporně vzatá jednotková matice a za druhou svislou čarou jsou souřadnice bodu $[0, 3, 2, 5]$. Tento přepis vzniká tak, že na výše uvedenou soustavu rovnic nahlížíme jako na soustavu rovnic pro neznámé t, s, x, y, z, u a všechny členy přitom převádíme na jednu stranu rovnic. Získanou matici převedeme pomocí elementárních řádkových transformací do tvaru, kdy před první svislou čarou bude maximální možný počet nulových řádků. Přičtením (-1)násobku prvního a současně (-4)násobku druhého řádku ke třetímu řádku a dvojnásobku druhého ke čtvrtému řádku dostáváme

$$\left(\begin{array}{cc|cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 11 \end{array}\right).$$

Odkud plyne výsledek

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 4y & - & z & & & - & 10 = & 0, \\ & & -2y & & & - & u & + & 11 = & 0. \end{array}$$

Koeficienty za první svislou čarou v řádcích, které jsou před touto svislou čarou nulové, určují totiž koeficienty obecných rovnic roviny.

Upozorněme, že kdybychom např. přepsali soustavu rovnic do matice

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right),$$

která odpovídá situaci, kdy proměnné x, y, z, u zůstávají na levé straně rovnic, totožná úprava

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

dává výsledek ve tvaru

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & - & 4y & + & z & & & = & -10, \\ & & 2y & & & + & u & = & 11. \end{array}$$

Jinak řečeno, při přepisování soustavy do matice je nutné zohledňovat, zda svislá čára odděluje levou stranu rovnic od pravé (či nikoliv). Nabízí se, že metoda eliminace parametrů může být zdlouhavá a že se při jejím použití lze snadno dopustit chyb(y). V tomto příkladu jsme přitom hledali pouze dva lineárně nezávislé normálové vektory, tj. vektory kolmé na vektory $(1, 0, 1, 0)$, $(2, -1, -2, 2)$. Pokud bychom si uvědomili, že takovými vektory jsou např. $(0, 2, 0, 1)$, $(-1, 0, 1, 2)$, dosazením $x = 0$, $y = 3$, $z = 2$, $u = 5$ do rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & 2y & & & + & u & = & a, \\ -x & & & + & z & + & 2u & = & b \end{array}$$

bychom obdrželi $a = 11$, $b = 12$, následně hledané implicitní vyjádření

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & 2y & & & + & u & = & 11, \\ -x & & & + & z & + & 2u & = & 12. \end{array}$$

4.3. Nalezněte parametrické vyjádření roviny procházející body

$$A = [2, 1, 1], \quad B = [3, 4, 5], \quad C = [4, -2, 3].$$

Poté parametricky vyjádřete otevřenou polorovinu obsahující bod C a vymezenou přímkou zadanou body A, B.

Řešení. K parametrickému vyjádření roviny potřebujeme jeden bod ležící v této rovině a dva směrové (lineárně nezávislé) vektory. Stačí zvolit bod A a vektory $B - A = (1, 3, 4)$ a $C - A = (2, -3, 2)$, které jsou očividně lineárně nezávislé. Bod $[x, y, z]$ náleží do dané roviny právě tehdy, když existují čísla $t, s \in \mathbb{R}$, pro která je

$$x = 2 + 1 \cdot t + 2 \cdot s, \quad y = 1 + 3 \cdot t - 3 \cdot s, \quad z = 1 + 4 \cdot t + 2 \cdot s;$$

tj. hledané parametrické vyjádření roviny je

$$[2, 1, 1] + t\,(1, 3, 4) + s\,(2, -3, 2)\,, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Volba $s = 0$ zjevně dává přímku, která prochází body A, B. Pro $t = 0$, $s \geq 0$ dostáváme polopřímku začínající v bodě A a procházející bodem C. Libovolně pevně zvolené $t \in \mathbb{R}$ a měnné $s \geq 0$ pak zadávají polopřímku s počátkem na hraniční přímce a s body v polorovině, ve které se nachází bod C. To znamená, že hledanou otevřenou polorovinu můžeme vyjádřit parametricky takto

$$[2, 1, 1] + t\,(1, 3, 4) + s\,(2, -3, 2)\,, \quad t \in \mathbb{R},\ s > 0.$$

4.4. Určete vzájemnou polohu přímek

$$p : [1, 0, 3] + t\,(2, -1, -3)\,, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$q : [1, 1, 3] + s\,(1, -1, -2)\,, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Hledejme společné body zadaných přímek (průnik podprostorů). Dostáváme soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 1 & + & 2t & = & 1 & + & s, \\ 0 & - & t & = & 1 & - & s, \\ 3 & - & 3t & = & 3 & - & 2s. \end{array}$$

Z prvních dvou rovnic vyplývá, že $t = 1$, $s = 2$. To ovšem nevyhovuje třetí rovnici. Soustava tak nemá řešení. Neboť směrový vektor $(2, -1, -3)$ přímky p není násobkem směrového vektoru $(1, -1, -2)$ přímky q, přímky nejsou rovnoběžné. Jedná se proto o mimoběžky.

4.5. Pro jaká čísla $a \in \mathbb{R}$ jsou přímky

$$p : [4, -4, 8] + t\,(2, 1, -4)\,, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$q : [a, 6, -5] + s\,(1, -3, 3)\,, \quad s \in \mathbb{R}$$

různoběžné?

Řešení. Přímky jsou různoběžné tehdy a jenom tehdy, když má soustava

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4 & + & 2t & = & a & + & s, \\ -4 & + & t & = & 6 & - & 3s, \\ 8 & - & 4t & = & -5 & + & 3s \end{array}$$

právě 1 řešení. V maticovém zápisu řešíme (první sloupec odpovídá proměnné t, druhý pak s)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & a-4 \\ 1 & 3 & 10 \\ -4 & -3 & -13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 10 \\ 2 & -1 & a-4 \\ -4 & -3 & -13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 10 \\ 0 & -7 & a-24 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Vidíme, že soustava má právě 1 řešení tehdy a jenom tehdy, když je druhý řádek násobkem třetího. To je splněno pouze pro $a = 3$. Dodejme, že průsečíkem je v tomto případě bod $[6, -3, 4]$.

4.6. V $\mathbb{R}^3$ stanovte vzájemnou polohu přímky p zadané implicitně rovnicemi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 4, \\ x & - & 2y & + & z & = & -3 \end{array}$$

a roviny $\varrho : y = 2x - 1$.

Řešení. Normálový vektor ϱ je $(2, -1, 0)$ (uvažte zápis $\varrho : 2x - y + 0z = 1$). Lze postřehnout, že platí

$$(1, 1, -1) + (1, -2, 1) = (2, -1, 0),$$

tj. že normálový vektor roviny ϱ je lineární kombinací normálových vektorů p. Zaměření přímky (zadané nenulovým směrovým vektorem kolmým na uvedené dva normálové vektory) je proto podprostorem zaměření roviny ϱ (směrový vektor přímky je nutně kolmý na vektor $(2, -1, 0)$). Lehce jsme zjistili, že přímka p je rovnoběžná s rovinou ϱ. Zajímá nás, zda se protínají (zda p leží v ϱ). Soustava rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 4, \\ x & - & 2y & + & z & = & -3, \\ 2x & - & y & & & = & 1 \end{array}$$

má nekonečně mnoho řešení, neboť sečtením prvních dvou rovnic dostaneme právě třetí z rovnic. Přímka p tak musí ležet v rovině ϱ.

4.7. Nalezněte průnik podprostorů Q_1 a Q_2, je-li

$$Q_1 : [4, -5, 1, -2] + t_1\,(3, 5, 4, 2) + t_2\,(2, 4, 5, 1) + t_3\,(0, 3, 1, 2)\,, \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R},$$
$$Q_2 : [4, 4, 4, 4] + s_1\,(0, -6, -2, -4) + s_2\,(-1, -5, -3, -3)\,, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Bod $X = [x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4$ náleží do $Q_1 \cap Q_2$ právě tehdy, když je

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

pro nějaká čísla $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ a současně když je

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

pro nějaká $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Porovnáním získáváme

$$t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ 4+5 \\ 4-1 \\ 4+2 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Při maticovém zápisu (pro pořadí proměnných t_1, t_2, t_3, s_1, s_2 a po převodu vektorů u s_1 a s_2 na levou stranu) řešme pomocí řádkových operací

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 5 & 9 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 3 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 18 & 10 & 27 \\ 0 & 7 & 3 & 6 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & 6 & 12 & 7 & 18 \end{array} \right) \sim$$

$$\cdots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Odtud vidíme, že $t_1 = t_2 = s_2 = 0$ a pro $s_1 = t \in \mathbb{R}$ je $t_3 = 3 - 2t$. Podotkněme, že k určení $Q_1 \cap Q_2$ stačilo znát buď t_1, t_2, t_3 nebo s_1, s_2. Vraťme se nyní k vyjádření

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Průnikem zadaných podprostorů je tedy přímka ($s = -2t$)

$$[4, 4, 4, 4] + s\,(0, 3, 1, 2)\,, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Pro kontrolu rovněž dosaďme

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + (3 - 2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

4.8. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro libovolná kladná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ platí

$$n^2 \le \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) .$$

Poté uveďte, kdy nastává rovnost.

Řešení. Postačuje uvážit Cauchyovu nerovnost

$$|\, u \cdot v \,| \le ||\, u \,||\, ||\, v \,||$$

v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ pro vektory

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right), \quad v = \left(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n}\right) .$$

Takto dostaneme

$$n \le \sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \cdot \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}. \tag{1}$$

Dokazovanou nerovnost potom obdržíme umocněním (**??**). Dále víme, že Cauchyova nerovnost přejde v rovnost, právě když bude vektor u násobkem vektoru v, což již implikuje $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

4.9. Nalezněte bod A přímky

$$p : x + 2y + z - 1 = 0, \quad 3x - y + 4z - 29 = 0,$$

který má stejnou vzdálenost od bodů $B = [3, 11, 4]$, $C = [-5, -13, -2]$.

Řešení. Nejprve vyjádříme přímku p parametricky tak, že vyřešíme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1, \\ 3x & - & y & + & 4z & = & 29. \end{array}$$

Soustavu zapíšeme rozšířenou maticí a upravíme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 29 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & 26 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9/7 & 59/7 \\ 0 & 1 & -1/7 & -26/7 \end{array}\right).$$

Tím dostáváme vyjádření

$$p : \left[\frac{59}{7}, -\frac{26}{7}, 0\right] + t\left(-\frac{9}{7}, \frac{1}{7}, 1\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Odkud substitucí $t = 7s + 26$ plyne

$$p : [-25, 0, 26] + s\,(-9, 1, 7)\,, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Bod A obdržíme volbou jistého $s \in \mathbb{R}$. Přitom vektory

$$A - B = (-28 - 9s, -11 + s, 22 + 7s)\,,$$
$$A - C = (-20 - 9s, 13 + s, 28 + 7s)$$

mají mít stejnou délku, tj. má platit

$$\sqrt{(-28-9s)^2+(-11+s)^2+(22+7s)^2}$$
$$= \sqrt{(-20-9s)^2+(13+s)^2+(28+7s)^2},$$

resp.

$$(-28-9s)^2+(-11+s)^2+(22+7s)^2$$
$$= (-20-9s)^2+(13+s)^2+(28+7s)^2.$$

Úpravou poslední rovnice získáme $s=-3$. Je tak

$$A = [-25,0,26] - 3\,(-9,1,7) = [2,-3,5].$$

4.10. V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ stanovte vzdálenost bodu $A = [2,-5,1,4]$ od podprostoru

$$U : 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 12 = 0, \quad 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 9 = 0.$$

Řešení. Nejdříve nalezneme libovolný bod podprostoru U (řešení soustavy). Např. je

$$B = [0,3,0,3] \in U.$$

Víme, že vzdálenost A od U se rovná velikosti kolmého průmětu vektoru $A-B$ do ortogonálního doplňku zaměření podprostoru U. Ortogonální doplněk zaměření U ovšem známe (zadává tento podprostor) – jako množinu (lineárních kombinací normálových vektorů)

$$V := \{t\,(4,-2,-3,-2) + s\,(2,-1,-2,-2)\,;\ t,s \in \mathbb{R}\}.$$

Potřebujeme najít kolmý průmět P_{A-B} vektoru $A-B$ do V, který náleží do V, a proto je

$$P_{A-B} = a\,(4,-2,-3,-2) + b\,(2,-1,-2,-2)$$

pro jisté hodnoty $a,b \in \mathbb{R}$. Zjevně musí platit $(A-B-P_{A-B}) \perp V$, tedy

$$((A-B)-P_{A-B}) \perp (4,-2,-3,-2)\,,$$
$$((A-B)-P_{A-B}) \perp (2,-1,-2,-2)\,.$$

Dosazením za $A-B$ a P_{A-B} odsud vyplývá

$$(((2,-8,1,1) - a\,(4,-2,-3,-2) - b\,(2,-1,-2,-2)) \cdot (4,-2,-3,-2)) = 0,$$
$$(((2,-8,1,1) - a\,(4,-2,-3,-2) - b\,(2,-1,-2,-2)) \cdot (2,-1,-2,-2)) = 0;$$

tj.

$$((2,-8,1,1)\cdot(4,-2,-3,-2)) - a\,((4,-2,-3,-2)\cdot(4,-2,-3,-2))$$
$$- b\,((2,-1,-2,-2)\cdot(4,-2,-3,-2)) = 0,$$

$$((2,-8,1,1)\cdot(2,-1,-2,-2)) - a\,((4,-2,-3,-2)\cdot(2,-1,-2,-2))$$
$$- b\,((2,-1,-2,-2)\cdot(2,-1,-2,-2)) = 0.$$

Vyčíslíme-li tyto skalární součiny, obdržíme soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcl} 19 & - & 33a & - & 20b & = & 0, \\ 8 & - & 20a & - & 13b & = & 0, \end{array}$$

která má jediné řešení $a = 3$, $b = -4$. Je tudíž

$$P_{A-B} = 3\,(4,-2,-3,-2) - 4\,(2,-1,-2,-2) = (4,-2,-1,2)\,,$$

přičemž

$$||\,P_{A-B}\,|| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 5.$$

Připomeňme, že vzdálenost A od U je rovna $||\,P_{A-B}\,|| = 5$.

4.11. Spočtěte vzdálenost v bodu $[0,0,6,0]$ od vektorového podprostoru

$$U : [0,0,0,0] + t_1\,(1,0,1,1) + t_2\,(2,1,1,0) + t_3\,(1,-1,2,3)\,, \quad t_1,t_2,t_3 \in \mathbb{R}$$

prostoru $\mathbb{R}^4$.

Řešení. Úlohu budeme řešit postupem založeným na tzv. problému nejmenších čtverců. Vektory generující U napíšeme do sloupců matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a bod $[0,0,6,0]$ nahradíme jemu odpovídajícím vektorem $b = (0,0,6,0)^T$. Budeme řešit soustavu $A \cdot x = b$, tj. soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0, \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6, \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 0, \end{array}$$

právě metodou nejmenších čtverců. (Upozorněme, že tato soustava nemá řešení – jinak by vzdálenost byla rovna 0.) Systém $A \cdot x = b$ vynásobíme zleva maticí A^T. Rozšířená matice soustavy $A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$ pak je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 15 & 12 \end{array}\right).$$

Pomocí elementárních řádkových transformací ji postupně převedeme na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 15 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Provedeme-li ještě zpětnou eliminaci

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

můžeme ihned napsat řešení

$$x = (2-3t,\; t,\; t)^T\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dodejme, že existence nekonečně mnoha řešení je zapříčiněna nadbytečností třetího ze zadávajících vektorů podprostoru U, neboť je

$$3\,(1,0,1,1) - (2,1,1,0) = (1,-1,2,3)\,.$$

Libovolná ($t \in \mathbb{R}$) lineární kombinace

$$(2-3t)\,(1,0,1,1) + t\,(2,1,1,0) + t\,(1,-1,2,3) = (2,0,2,2)$$

však odpovídá bodu $[2,0,2,2]$ podprostoru U, který je nejblíže bodu $[0,0,6,0]$. Pro hledanou vzdálenost proto platí

$$v = ||\,[2,0,2,2] - [0,0,6,0]\,|| = \sqrt{2^2 + 0 + (-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}.$$

4.12. Nechť je dána krychle $ABCDEFGH$ (při obvyklém významu zápisu, tedy vektory $E-A$, $F-B$, $G-C$, $H-D$ jsou kolmé na rovinu určenou vrcholy A, B, C, D) v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Vypočtěte úhel φ mezi vektory $F-A$ a $H-A$.

Řešení. Tento příklad jsme již jednou řešili pomocí vzorce z definice odchylky. Nyní se zkusme zamyslet. Uvažované body A, F, H jsou vrcholy trojúhelníku, jehož všechny strany jsou úhlopříčkami stěn krychle. Jedná se tudíž o rovnostranný trojúhelník. Odtud plyne, že $\varphi = \pi/3$.

4.13. V reálné rovině nalezněte přímku, která prochází bodem $[-3,0]$ a s přímkou

$$p: \sqrt{3}x + 3y + 5 = 0$$

svírá úhel $60\,^\circ$.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že podmínkám úlohy musí vyhovovat právě dvě přímky. Obecná rovnice přímky v rovině má tvar

$$ax + by + c = 0, \quad \text{přičemž lze volit} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Nalezněme tedy taková čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$, aby byly splněny uvedené podmínky. Dosadíme-li $x = -3$, $y = 0$ do této rovnice (přímka má procházet bodem $[-3,0]$), dostaneme $c = 3a$. Podmínka, že přímka má svírat úhel $60\,^\circ$ s přímkou p, potom dává

$$\frac{1}{2} = \cos 60\,^\circ = \frac{|\,\sqrt{3}a + 3b\,|}{\sqrt{12}}, \quad \text{tj.} \quad \sqrt{3} = \left|\,\sqrt{3}a + 3b\,\right|.$$

Další úpravou obdržíme

$$\pm 1 = a + \sqrt{3}b \quad \text{a umocněním} \quad 1 = a^2 + 3b^2 + 2\sqrt{3}ab.$$

Využijeme-li $a^2 + b^2 = 1$, získáme

$$0 = 2b^2 + 2\sqrt{3}ab, \quad \text{tj.} \quad 0 = b\left(b + \sqrt{3}a\right).$$

Celkem tak máme možnosti (připomeňme, že $c = 3a$ a $a^2 + b^2 = 1$)

$$a = \pm 1, \quad b = 0, \quad c = \pm 3; \qquad a = \pm\frac{1}{2}, \quad b = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad c = \pm\frac{3}{2}.$$

Snadno se ověří, že těmito koeficienty určené přímky

$$x + 3 = 0, \qquad \frac{1}{2}\,x - \frac{\sqrt{3}}{2}\,y + \frac{3}{2} = 0$$

zadání skutečně vyhovují.

4.14. Určete odchylku přímky p zadané implicitně rovnicemi

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & 0, \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

od roviny $\varrho : x + y + 2z + 1 = 0$.

Řešení. Vidíme, že normálový vektor roviny ϱ je $(1,1,2)$. Sečtení rovnic zadávajících přímku p při opsání první z nich dává

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & 0, \\ & & 2y & + & 2z & = & 0. \end{array}$$

Odsud plyne, že $y = -z$ a $x = 2z$. Vektor $(2,-1,1)$ je proto směrovým vektorem přímky p; jinak řečeno, můžeme zapsat (p očividně prochází počátkem)

$$p : [0,0,0] + t\,(2,-1,1)\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pro úhel φ vektorů $(1,1,2)$, $(2,-1,1)$ platí

$$\cos\varphi = \frac{2 - 1 + 2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{2}.$$

Je tedy $\varphi = 60^\circ$. To je ovšem velikost úhlu, který svírá směrový vektor p s normálovým vektorem ϱ. Hledaný úhel je doplňkem tohoto úhlu, a tak je výsledek $30^\circ = 90^\circ - 60^\circ$.

4.15. Spočtěte objem rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^3$ s podstavou v rovině $z = 0$ a s hranami zadanými dvojicemi vrcholů $[0,0,0]$, $[-2,3,0]$; $[0,0,0]$, $[4,1,0]$ a $[0,0,0]$, $[5,7,3]$.

Řešení. Rovnoběžnostěn je zadán vektory $(4,1,0)$, $(-2,3,0)$, $(5,7,3)$. Víme, že jeho objem je roven determinantu

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 14 = 42.$$

Doplňme, že při změnách pořadí vektorů bychom obdrželi výsledek ± 42, neboť determinant udává *orientovaný* objem rovnoběžnostěnu. Ještě poznamenejme, že objem rovnoběžnostěnu by se dle výpočtu determinantu nezměnil, pokud by třetí vektor byl $[a,b,3]$ pro libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$. Jeho objem pochopitelně závisí pouze na kolmé vzdálenosti rovin dolní a horní podstavy a jejich obsahu

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 14.$$

4.16. Určete rovnici kuželosečky (a poté její typ), která prochází body

$$[-2,-4], \quad [8,-4], \quad [0,-2], \quad [0,-6], \quad [6,-2].$$

Řešení. Do obecné rovnice kuželosečky

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_1x + a_2y + a = 0$$

postupně dosadíme souřadnice zadaných bodů. Takto obdržíme soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
4a_{11} & + & 16a_{22} & + & 16a_{12} & - & 2a_1 & - & 4a_2 & + & a & = & 0,\\
64a_{11} & + & 16a_{22} & - & 64a_{12} & + & 8a_1 & - & 4a_2 & + & a & = & 0,\\
 & & 4a_{22} & & & & & - & 2a_2 & + & a & = & 0,\\
 & & 36a_{22} & & & & & - & 6a_2 & + & a & = & 0,\\
36a_{11} & + & 4a_{22} & - & 24a_{12} & + & 6a_1 & - & 2a_2 & + & a & = & 0.
\end{array}$$

V maticovém zápisu provedeme úpravy

$$\begin{pmatrix}
4 & 16 & 16 & -2 & -4 & 1\\
64 & 16 & -64 & 8 & -4 & 1\\
0 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1\\
0 & 36 & 0 & 0 & -6 & 1\\
36 & 4 & -24 & 6 & -2 & 1
\end{pmatrix} \sim \cdots$$

$$\sim \begin{pmatrix}
4 & 16 & 16 & -2 & -4 & 1\\
0 & 4 & 0 & 0 & -2 & 1\\
0 & 0 & 64 & -8 & 12 & -9\\
0 & 0 & 0 & 24 & -36 & 27\\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2
\end{pmatrix} \sim \cdots$$

$$\sim \begin{pmatrix}
48 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 12 & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 64 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2
\end{pmatrix}.$$

Hodnotu a můžeme zvolit. Zvolíme-li $a = 48$, dostaneme

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = 4, \quad a_{12} = 0, \quad a_1 = -6, \quad a_2 = 32.$$

Kuželosečka má tudíž rovnici

$$x^2 + 4y^2 - 6x + 32y + 48 = 0.$$

V této rovnici doplníme výrazy $x^2 - 6x$, $4y^2 + 32y$ na druhé mocniny dvojčlenů, což dává

$$(x-3)^2 + 4(y+4)^2 - 25 = 0,$$

resp.

$$\frac{(x-3)^2}{5^2} + \frac{(y+4)^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} - 1 = 0.$$

Vidíme, že se jedná o elipsu se středem v bodě $[3,-4]$.

4.17. Pomocí doplnění na čtverce vyjádřete kvadriku
$$-x^2 + 3y^2 + z^2 + 6xy - 4z = 0$$
ve tvaru, ze kterého lze vyčíst její typ.

Řešení. Všechny členy obsahující x připojíme k $-x^2$ a provedeme doplnění na čtverec. Tím získáme
$$-(x - 3y)^2 + 9y^2 + 3y^2 + z^2 - 4z = 0.$$
Žádné „nežádoucí“ členy obsahující y nemáme, a proto postup opakujeme pro proměnnou z, což dává
$$-(x - 3y)^2 + 12y^2 + (z - 2)^2 - 4 = 0.$$
Odtud plyne, že existuje transformace proměnných, při které obdržíme (rovnici můžeme nejdříve vydělit 4) rovnici
$$-\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - 1 = 0.$$

4.18. Uveďte všechny hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pro které jsou vektory
$$(0, \alpha + 2, \alpha + 1, \alpha + 1), \quad (\beta - 2, 1 - \beta, \beta + 1, 3 - \beta)$$
v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ normované (velikost je rovna 1).

Řešení. V prvním případě existují dvě možné volby parametru
$$\alpha = -1, \qquad \alpha = -\frac{5}{3}.$$
Ve druhém případě hledané β očividně neexistuje.

4.19. Jestliže je ve vektorovém prostoru polynomů stupně nejvýše 2 pro libovolné dva polynomy
$$p = a_2(p)\, x^2 + a_1(p)\, x + a_0(p), \quad q = a_2(q)\, x^2 + a_1(q)\, x + a_0(q)$$
definován „standardní“ skalární součin vztahem
$$(\, p \cdot q\,) := a_2(p)\, a_2(q) + a_1(p)\, a_1(q) + a_0(p)\, a_0(q),$$
jakou má vektor $5x^2 + 12$ délku?

Řešení. Délka vektoru $5x^2 + 12$ je 13.

4.20. Najděte přímku q, která protíná přímky
$$p_1 : [3, 8, 1] + t_1\,(2, 3, 4)\,, \quad t_1 \in \mathbb{R},$$
$$p_2 : [0, -5, 2] + t_2\,(5, 2, -1)\,, \quad t_2 \in \mathbb{R}$$
a která prochází bodem $[4, -1, 0]$.

Řešení. Hledaná přímka je
$$q : [4, -1, 0] + s\,(1, -2, 1)\,, \quad s \in \mathbb{R}.$$

4.21. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a libovolná reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí odhad

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Řešení. Postačuje aplikovat Cauchyovu nerovnost pro vektory

$$u = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad v = (1, 1, \ldots, 1)$$

v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ (a nerovnost vynásobit číslem $1/n$).

4.22. V prostoru $\mathbb{R}^3$ nalezněte bod roviny (vektorového podprostoru)

(a) $\langle\, (2, 1, 1), (2, -1, 1)\, \rangle$;

(b) $\langle\, (1, 1, -2), (3, 1, -1)\, \rangle$,

který je nejblíže bodu

(a) $[1, 1, 3]$;

(b) $[3, -7, 8]$.

Řešení. Nejblíže je bod

(a) $[2, 1, 1]$;

(b) $\left[\frac{34}{15}, -\frac{10}{3}, \frac{142}{15}\right]$.

4.23. Vypočtěte vzdálenost přímek

$$p : [-4, -4, 12] + t\,(-3, 3, -8)\,, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$q : [7, 0, 5] + s\,(-2, 3, -4)\,, \quad s \in \mathbb{R}$$

v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení. Výsledek je 13.

4.24. Napište rovnici přímky mající vzdálenost 4 od bodu $[-1, 0]$ a procházející bodem $[3, 2]$.

Řešení. Takovými přímkami jsou

$$3x + 4y = 17, \qquad x = 3.$$

4.25. Určete vzdálenost bodu $[-2, 2, 2, 5]$ od roviny zadané body

$$[0, 0, 0, 0], \quad [1, 1, -1, 2], \quad [3, 1, 0, 1].$$

Řešení. Vzdálenost je rovna $\sqrt{22}$.

4.26. Stanovte rovinu ϱ, která obsahuje bod $[5, -3, 2]$ a současně jeho kolmé průměty do rovin

$$\sigma_1 : [3, -1, 0] + t_1\,(0, 1, -4) + s_1\,(1, 1, -1)\,, \quad t_1, s_1 \in \mathbb{R},$$
$$\sigma_2 : [-1, 0, 1] + t_2\,(2, 0, 1) + s_2\,(-4, 2, 3)\,, \quad t_2, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Rovina ϱ má parametrické vyjádření

$$[6, 2, 0] + t\,(5, -13, 0) + s\,(0, 19, -5)\,, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

4.27. Spočítejte odchylku φ přímek
$$2x + y - 5 = 0 \quad \text{a} \quad 6x - 2y + 7 = 0$$
v reálné rovině.

Řešení. Lehce lze ukázat, že $\varphi = \pi/4$.

4.28. V $\mathbb{R}^3$ určete odchylku přímky zadané rovnicemi
$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 0, \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}$$
od roviny
$$2x + y + z = 0.$$

Řešení. Výsledek je $\pi/6$.

4.29. Stanovte vzdálenost v bodu $[2, 1, 2, 3]$ od podprostoru
$$W = \left\{ [x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4;\ x_4 = 0 \right\}$$
a poté odchylku φ přímky se směrovým vektorem $(2, 1, 2, 3)$ od podprostoru W v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$.

Řešení. Platí
$$v = 3, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$
Uvědomte si, že projekce (kolmý průmět) bodu $[2, 1, 2, 3]$ do W je zřejmě $[2, 1, 2, 0]$.

4.30. Spočítejte odchylku φ rovin
$$\begin{aligned} \varrho_1 &: [6, 5, 4, 3] + t_1\,(-3, 0, 0, 2) + t_2\,(3, 0, 0, 2)\,, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \\ \varrho_2 &: [5, 6, 5, 2] + s_1\,(2, 2, 0, -3) + s_2\,(3, 3, 0, -2)\,, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
a vzdálenost v rovnoběžných rovin
$$\begin{aligned} \sigma_1 &: [6, 5, 5, 4] + t_1\,(0, -1, 1, 0) + t_2\,(8, -5, 5, -2)\,, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \\ \sigma_2 &: [5, 0, 2, 0] + s_1\,(-4, 5, -5, 1) + s_2\,(4, 4, -4, -1)\,, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$.

Řešení. Je $\varphi = \pi/4$, $v = 7$.