Sbírka příkladů do cvičení

MB101 - jaro 2012

Cvičení 1: Komplexní čísla

Teorie 1.

1. Uveďte příklad dvou komplexních čísel se stejnou velikostí, ale jiným argumentem.
2. Uveďte příklad komplexní jednotky v algebraickém tvaru, která bude mít argument $\frac{-\pi}{4}$
3. Uveďte příklad komplexního čísla tak, aby komplexní číslo k němu sdružené mělo jinou velikost.
4. Určete všechna komplexní čísla z, která splňují $x^6 = 1$.
5. Určete komplexní čísla, která jsou vrcholy čtverce s jedním vrcholem v počátku a středem v 1.

Příklad 1. Vypočtěte

1. $49(2 - i\sqrt{3})^{-2}$
2. $\frac{2+i}{i} + \frac{i}{i+1} - \frac{2i+1}{i-1}$
3. $\frac{\frac{1}{2i-1}+\frac{1}{i}}{1+\frac{1}{2i+1}}$
4. $2i^9 - i^{12} + 5i^{16} - 3i^{11}$
5. $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5 \cdot i^6 \cdot i^7 \cdot i^8 \cdot i^9 \cdot i^{10}$
6. $\overline{2+i} + 1 - \bar{i}$
7. $\overline{\overline{3+4i} + 3 - 7i}$
8. $\overline{(1+i)\cdot(3+2i)}$
9. $\left|\frac{|\sqrt{3}-i|\cdot(-1)}{|i(i-1)|-2i}\right|$
10. $\frac{|7i|-i+1}{i-|\sqrt{5}+2i|}$

Výsledek.

1. $1 + 4i\sqrt{3}$
2. 1
3. $-\frac{1}{2}i$
4. $4 + 5i$
5. $-i$
6. $3 + 0i$
7. $6 + 11i$
8. $1 - 5i$
9. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$
10. $\frac{5-\sqrt{5}}{20}$
11. $-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$

Příklad 2. Určete všechna $x \in \mathbb{R}$ tak, aby imaginární část čísla $z = \frac{5+x-4i}{x+1-2i}$ byla $0,25$.

Výsledek. $x \in \{-7; 1\}$

Příklad 3. Určete, pro která reálná čísla b je komplexní číslo $\frac{8-6b-ib}{1-ib}$

1. reálné
2. imaginární
3. ryze imeginární

Výsledek.

1. $b \in \{0; \frac{7}{6}\}$
2. $b \in \mathbb{R} \setminus \{0; \frac{7}{6}\}$
3. $b \in \{2; 4\}$

Příklad 4. Převeďte na goniometrický tvar komplexní čísla

1. $-2 + 2i\sqrt{3}$
2. $-\sqrt{3} + i$
3. $\frac{i-3}{2+i}$
4. $\frac{i-2}{4i-8}$

Výsledek.

1. $4(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$
2. $2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$
3. $\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$
4. $0,25(\cos 0 + i \sin 0)$

Příklad 5. Umocněte a výsledek uveďte v algebraickém tvaru

1. $(1 + i)^6$
2. $(1 - i\sqrt{3})^5$

Výsledek.

1. $16 + 16i\sqrt{3}$
2. $2^{24} + 0i$

Příklad 6. Pomocí Moivrovy a binomické věty odvoďte vzorec pro $\sin 4x$ a $\cos 4x$.

Příklad 7. Určete všechny čtvrté odmocniny z komplexního čísla

1. i
2. $1 - i$

Výsledek.

1. $z_{1,2,3,4} = \cos(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$
2. $z_{1,2,3,4} = \sqrt[8]{2}(\cos(\frac{7\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}) + i \sin(\frac{7\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}))$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

Příklad 8. Určete všechny druhé odmocniny z $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ v algebraickém i goniometrickém tvaru a odtud odvoďte, čemu se rovná $\sin \frac{\pi}{12}$.

Příklad 9. Řešte rovnice s neznámou $z \in \mathbb{C}$:

1. $z\overline{z} - z = \overline{6 - 2i}$
2. $z(\overline{z} - 4) - 1 = 8i$
3. $|z + 1| - 4i = z + 3$
4. $|z + 2 - i| = 5(z + 3i)$

Výsledek.

1. $z_1 = -1 - 2i$, $z_2 = 2 - 2i$
2. $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 3 - 2i$
3. $2 - 4i$
4. $1 - 3i$

Příklad 10. Řešte kvadratické rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$

1. $x^2 - 5x + 5 = 0$
2. $x^2 - 4ix - 8 = 0$
3. $x^2 + (2 - i)x + 3 - i = 0$
4. $(7 + i)x^2 - 5ix - 1 - 0$

Výsledek.

1. $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$
2. $x_{1,2} = \pm 2 + 2i$
3. $x_{1,2} \in \{-1 + 2i; -1 - i\}$
4. $x_{1,2} \in \{\frac{1}{5} + i\frac{2}{5}; -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\}$

Příklad 11. Řešte rovnice v $\mathbb{C}$ a výsledek znázorněte v Gaussově rovině

1. $x^6 - 1 + i\sqrt{3} = 0$
2. $32x^5 - 16 = 16i\sqrt{3} = 0$
3. $x^4 + 16 = 0$
4. $x^6 - 1 = 0$

Výsledek.

1. $x_{1,2,3,4,5,6} = \sqrt[6]{2}(\cos(\frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}))$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
2. $x_{1,2,3,4,5} = 1(\cos(\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}))$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
3. $x_{1,2,3,4} = 2(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}))$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$
4. $x_{1,2,3,4,5,6} = (\cos(\frac{k\pi}{3}) + i\sin(\frac{k\pi}{3}))$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Cvičení 2: Kombinatorika a pravděpodobnost

Příklad 12. Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 vybrat dvě různobarevná políčka tak, aby obě neležela v téže řadě ani v témže sloupci.

Výsledek. $32 \cdot 24$

Příklad 13. Z Brna do Horní Čermné vedou čtyři cesty, z Horní Čermné do Čenkovic tři. Určete, kolika různými způsoby se můžeme dostat

1. z Brna do Čenkovic a zpět, pokud chceme (samozřejmě) jet přes Horní Čermnou a chceme se vracet stejnou cestou, jako jsme přišli.
2. z Brna do Čenkovic a zpět, pokud tam i zpět chceme jet přes Horní Čermnou.
3. z Brna do Čenkovic a zpět, pokud tam i zpět chceme jet přes Horní Čermnou, ale žádnou z cest nechceme jet dvakrát.

Výsledek.

1. 12
2. 144
3. 72

Příklad 14. Určete počet včech čtyřciferných přirozených čísel, jejichž dekadický zápis je složen z číslic $1, 2, 3, 4, 5$ (každá z nich se může opakovat), která jsou dělitelná

1. 5
2. 4

Výsledek.

1. 125
2. 125

Příklad 15. Kolika způsoby můžeme rozestavit na šachovnici $n \times n$ polí n věží tak, aby se žádné dvě z nich vzájemně neohrožovaly?

Výsledek. $n!$

Příklad 16. Kolik pěticiferných přirozených čísel lze sestavit z číslic $0, 1, 2, 3, 4$, mají-li čísla končit číslicí 1 nebo 3.

Výsledek. 36

Příklad 17. Určete, kolika způsoby se v šestimístné lavici může posadit šest hochů, jestliže

1. Milan chce sedět vedle Petra
2. Petr chce sedět vedle Michala a Milan chce sedět na kraji.

Výsledek.

1. 240
2. 96

Příklad 18. Určete, kolika způsoby je možné přeskupit písmena slova *SYMBOL* tak, aby byly mezi 2 samohláskami právě dvě souhlásky.

Výsledek. 144

Příklad 19. Do dvanácté řady v kině, která obsahuje $2n$ míst, si chce sednout n chlapců a n dívek. Kolika způsoby se mohou posadit, jestliže mezi každými dvěma dívkami můsí být alespoň jeden chlapec a mezi každými dvěma chlapci můsí sedět alespoň jedna dívka?

Výsledek. $2(n!)^2$

Příklad 20. Určete, kolika nulami končí 100!

Výsledek. 24

Příklad 21. O telefonním čísle své kamarádky si Janča zapamatovala jen to, že je devítimístné, začíná dvojčíslím 23, neobsahuje žádné dvě stejné číslice a je dělitelné pětadvaceti. Určete, kolik telefonních čísel přichází v úvahu.

Výsledek. 1440

Příklad 22. Kolika způsoby je možno rozdělit 8 chlapců a 4 děvčata na dvě šestičlenná volejbalová družstva tak, aby v každém družstvu bylo aspoň jedno děvče?

Výsledek. $4 \cdot \binom{8}{5} + \frac{1}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{8}{4}$

Příklad 23. Je dán čtverec a na uvnitř každé strany je dáno n bodů. Určete počet všech trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech.

Výsledek. $\binom{4}{3} \cdot n^3 + 4 \cdot \binom{n}{2} \cdot 3n = \binom{4n}{3} - 4 \cdot \binom{n}{3}$

Příklad 24. Je dáno n bodů na jedné přímce a mimo tuto přímku je dáno k bodů, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. Určete, kolik přímek je určeno těmito body.

Výsledek. $1 + k \cdot n + \binom{k}{2}$

Příklad 25. Kolik nejvýše kulových ploch je zadáno n body ležících v jedné rovině a k body mimo tuto rovinu.

Výsledek. $\binom{n}{3} \cdot k + \binom{n}{2} \cdot \binom{k}{2} + \binom{n}{1} \cdot \binom{k}{3} + \binom{k}{4}$.

Příklad 26. Určete, kolika způsoby lze přemístit písmena slova *BEROUNKA* tak, abychom dostali slovo, obsahující slovo *BERAN* jako své podslovo.

Výsledek. 24

Příklad 27. Určete, v kolika bodech se protíná n přímek, z nichž k je rovnoběžných a ždáné tři neprochází jedním bodem.

Výsledek. $\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$

Příklad 28. Určete, kolik anagramů můžeme vytvořit ze slova *MATEMATIKA*.

Výsledek. 151200

Příklad 29. Určete, kolika způsoby můžeme rozdělit k stejných bonbónů mezi n dětí?

Výsledek. $\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Příklad 30. Určete, kolika způsoby můžeme rozdělit k stejných bonbónů mezi n dětí, má-li každé dostat alespoň jden bonbón.

Výsledek. $\frac{(k-1)!}{(k-n)!(n-1)!}$

Příklad 31. Do výtahu nastoupilo 5 osob. Kolika způsobym ohou vystoupit na 8 zastávkách?

Výsledek. 8^5

Příklad 32. Do výtahu nastoupilo 5 osob. Kolika způsobym ohou vystoupit na 8 zastávkách, vystoupí-li na každé nejvýše jedna osoba?

Výsledek. $\frac{8!}{3!}$

Příklad 33. Kolika způsoby můžeme uspořádat 20 různých knich do knihovny, která má pět polic, jestliže se do každé police vejde nejvýše 21 knih.

Výsledek. $\frac{24!}{4!}$

Příklad 34. Z osmnácti lístků označených čísly $1-18$ vytáhneme náhodně jeden lístek. Jaká je pravděpodobnost, že na vytažením lístku bude:

1. sudé číslo
2. číslo dělitelné 3
3. prvočíslo
4. číslo dělitelné 6

Výsledek.

1. $\frac{9}{18}$
2. $\frac{6}{18}$
3. $\frac{7}{18}$
4. $\frac{3}{18}$

Příklad 35. Jaká je pravděpodobnost že při hodu dvěma kostkami padne:

1. součet 8
2. součet, který je dělitelný pěti
3. součet, který bude sudý

Výsledek.

1. $\frac{5}{36}$
2. $\frac{7}{36}$
3. $\frac{1}{2}$

Příklad 36. Je lepší vsadit na to, že při hodu třemi kostkami padne součet 11, nebo součet 12?

Výsledek. $p(11) = \frac{27}{216}$, $p(12) = \frac{25}{216}$

Příklad 37. Milan s Lenkou střídavě hází mincí, přičemž vyhraje ten, komu první padne orel. Určete pravděpodobnost, že vyhraje Milan, který jako správný gantleman začíná.

Výsledek. $\frac{2}{3}$

Příklad 38. Z balíčku mariášových karet vytáhneme náhodně čtyři karty. S jakou pravděpodobností žádná z nich nebude eso?

Výsledek. $\frac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{4}}$

Příklad 39. Kolikrát nejméně musíme hodit kostkou, abychom s pravděpodobností alespoň $\frac{1}{2}$ mohli říci, že šestka padne alespoň jednou.

Výsledek. 4

Příklad 40. V zásilce 150 pytlů ořechů z Turecka je 5 pytlů se zkaženými ořechy, stejně jako v zásilce 250 pytlů ořechů z Afghánistánu. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný pytel ze všech došlých pytlů obsahuje zkažené ořechy

Výsledek. $0,025$

Příklad 41. Každý ze tří střelců vystřelí jednou do společného cíle. Pravděpodobnosti zásahu jsou u jednotlivých střelců: $0,6$, $0,5$ a $0,4$. Při kontrole terče byly zjištěny 2 zásahy. Určete pravděpodobnost, že zasáhl druhý a třetí střelec.

Výsledek. $0,21$

Příklad 42. Na osmi stejných kartičkách jsou napsána po řadě čísla $2, 4, 6, 7, 8, 11, 12$ a 13. Náhodně vezmeme dvě kartičky. Určete pravděpodobnost, že zlomek utvořený z těchto dvou čísel lze krátit.

Výsledek. $\frac{5}{14}$

Příklad 43. V klobouku kouzelníka Pokustóna je kromě Boba a Bobka ještě dalších pět bílých králíků a tři černí (o kterých však pohádky bohužel zatím nevypráví). Náhodně z klobouku vybereme králíka a pustíme ho ven. Nyní sáhneme do klobouku a vytáhneme dalšího králíka.

1. S jakou pravděposobností je druhý vytažený králík bílý?
2. S jakou pravděpodobností je druhý vytažený králík Bobek?

Výsledek.

1. $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9}$
2. $\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9}$.

Příklad 44. K opravování písemek jsme si koupili sáček gumových medvídků, který obsahuje 10 žlutých medvídků, 7 červených mednídků a 8 zelených medvídků. Michal nabídl sáček Lenče, která si náhodně vybrala medvídka a snědla ho, aniž by ho někomu ukázala. Michal samozřejmě také nabídl Janče. S jakou pravděpodobností si Janča vezme žlutého medvídka?

Výsledek. $\frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} + \frac{7}{25} \cdot \frac{10}{24} + \frac{8}{25} \cdot \frac{10}{24}$

Příklad 45. Ve městě žije $n + 1$ obyvatel. Jeden z občanů začne šířit fámu a to tak, že ji sdělí náhodně vybranému obyvateli. Ten ji opět sdělí dalšímu náhodně vybranému obyvateli (může to být i ten, od koho se ji dozvěděl). Tak se fáma šíří městem. Jaká je pravděpodobnost, že fáma bude $k/$-krát předána, aniž by se vrátila k původci?

Výsledek. $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$

Cvičení 3: Geometrická pravděpodobnost, relace a zobrazení

Teorie 2.

1. Uveďte příklad relace na množině $\{a, b, c\}$, která bude reflexivní, ale nebude symetrická.
2. Uveďte příklad relace na množině $\{a, b, c\}$, která bude symetrická i antisymetrická.
3. Uveďte příklad relace na množině $\{a, b, c\}$, která bude symetrická, ale nebude tranzitivní.
4. Uveďte příklad relace na množině $\{a, b, c\}$, která bude úplná, ale nebude reflexivní.
5. Uveďte příklad relace ekvivalence na množině $\{a, b, c\}$.
6. Uveďte příklad relace uspořádání na množině $\{a, b, c\}$.
7. Uveďte příklad injektivního zobrazení na množině $\mathbb{N}$, které nebude surjektivní.
8. Uveďte příklad surjektivního zobrazení na množině $\mathbb{N}$, které nebude injektivní.
9. Uveďte příklad bijektivního zobrazení na množině $\mathbb{N}$, které nebude identitou.

Příklad 46. Petr s Milanem si domluví schůzku mezi 9.00 a 10.00. Jejich příchody na dané místo jsou náhodné v rámci smluveného časového intervalu. Každý bude čekat 10 minut a pak odchází. Jaká je pravděpodobnost, že dojde k setkání?

Výsledek. $\frac{11}{36}$

Příklad 47. Tyč délky 1 m rozdělíme dvěma náhodně umístěnými řezy na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že všechny tři části budou mít délku alespoň 20 cm?

Výsledek. $0,16$

Příklad 48. Úsečku délky a rozdělíme náhodně na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že ze vzniklých částí lze sestrojit trojúhelník?

Výsledek. $\frac{1}{4}$

Příklad 49. Terč na šipky má poloměr 35 cm a je třemi soustřednými kružnicemi o poloměrech 5, 15 a 25 cm rozdělen na oblasti, jejichž zásah je hodnocen jedním až čtyřmi body (střed je za 4). Jaká je pravděpodobnost, že člověk třemi hody šipkou dosáhne součet šest bodů? (Pravděpodobnost, že hráč terč mine, je nulová.)

Výsledek. $\frac{3\cdot 24^2+6\cdot 8\cdot 16\cdot 24+16^3}{49^3}$

Příklad 50. Úsečku délky a rozdělíme náhodně na čtyři části. Jaká je pravděpodobnost, že ze vzniklých částí lze sestrojit čtyřúhelník?

Výsledek. $\frac{1}{2}$

Příklad 51. Na množině $M = \{a, b, c\}$ jsou dány relace σ a ρ, kde

$$\sigma = \{(a, b), (a, a), (b, b), (a, c), (c, a)\}, \quad \rho = \{(a, b), (b, c), (c, a), (a, a), (c, c)\}$$

1. Určete $\sigma \cup \rho$, $\sigma \cap \rho$, $\sigma \circ \rho$, $\rho \circ \sigma$, σ^{-1}.
2. Rozhodněte, zda jsou relace σ, ρ reflexivní, symetrické, antisymetrické, tranzitivní či úplné na množině M.
3. Uveďte příklad relace τ na množině M, tak aby $\sigma \circ \tau = \rho$
4. Uveďte příklad relace τ na množině M tak, aby $\tau \circ \tau = \tau$

Příklad 52. Je dána n-prvková množina A. Určete, kolik existuje na množině M relací, které jsou

1. reflexivní
2. symetrické
3. antisymetrické
4. úplné

Výsledek.

1. 2^{n^2-n}
2. $2^{\frac{n^2+n}{2}}$
3. $3^{\frac{n^2-n}{2}} \cdot 2^n$
4. $3^{\frac{n^2-n}{2}}$

Příklad 53. Je dána relace σ na množině $\mathbb{N}$. Rozhodněte, zda je uvedená relace reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní a úplná, pokud pro $a, b \in \mathbb{N}$ platí, že

1. $a \ \sigma \ b \Leftrightarrow a \cdot b$ je liché
2. $a \ \sigma \ b \Leftrightarrow (a, b) = 1$, kde (a, b) značí největší společný dělitel čísel a, b

Výsledek.

1. symetrická, tranzitivní
2. symetrická

Příklad 54. Je dána relace σ na množině $\mathbb{Z}$. Rozhodněte, zda je uvedená relace reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní a úplná, pokud pro $a, b \in \mathbb{Z}$ platí, že

1. $a \ \sigma \ b \Leftrightarrow 3|(a + 2b)$
2. $a \ \sigma \ b \Leftrightarrow |a| < |b|$

Výsledek.

1. reflexivní, symetrická, tranzitivní
2. antisymetrická, tranzitivní

Příklad 55. Rozhodněte, zda jsou uvedená tvrzení pravdivá. Svá tvrzení dokažte

1. Průnikem reflexivních relací je reflexivní relace.
2. Průnikem symetrických relací je symetrických relace.
3. Průnikem antisymetrických relací je antisymetrických relace.
4. Průnikem tranzitivních relací je tranzitivní relace.
5. Průnikem úplných relací je úplná relace.

6. Sjednocením reflexivních relací je reflexivní relace.
7. Sjednocením symetrických relací je symetrických relace.
8. Sjednocením antisymetrických relací je antisymetrických relace.
9. Sjednocením tranzitivních relací je tranzitivní relace.
10. Sjednocením úplných relací je úplná relace.
11. Složením reflexivních relací je reflexivní relace.
12. Složením symetrických relací je symetrických relace.
13. Složením antisymetrických relací je antisymetrických relace.
14. Složením tranzitivních relací je tranzitivní relace.
15. Složením úplných relací je úplná relace.

Výsledek. Ano, ano, ano, ano, ano, ano, ano, ne, ne, ano, ano, ne, ne, ne, ano.

Příklad 56. Rozhodněte, zda zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dané předpisem $f(x) = 5x - 3$ je injektivní, surjektivní a bijektivní.

Výsledek. Jen injktivní

Příklad 57. Rozhodněte, zda zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = x^2 - 2x + 3$ je injektivní, surjektivní a bijektivní.

Výsledek. Není ani injketivní, ani surjektivní.

Příklad 58. Rozhodněte, zda je zobrazení $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektivní, surjektivní a bijektivní, je-li dané předpisem $f(a, b) = a + b$.

Výsledek. Jen surjektivní

Příklad 59. Rozhodněte, zda je zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ injektivní, surjektivní a bijektivní, je-li dané předpisem $f(a) = (2a, 2a + 1)$.

Výsledek. Jen injektivní

Příklad 60. Jsou dány bijektivní zobrazení $f, g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 3x - 4$, $g(x) = 2x + \frac{5}{3}$. Určete $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1}, g^{-1}, $(f \circ g)^{-1}$, $(g \circ f)^{-1}$, $f^{-1} \circ g^{-1}$, $g^{-1} \circ f^{-1}$.

Cvičení 4: Algebra matic, determinanty

Teorie 3.

1. Uveďte příklad dvou matic A, B tak ,aby neexistoval součin
2. Uveďte příklad dvou nenulových čtvercových matic třetího řádu, jejichž součinem bude nulová matice.
3. Uveďte příklad dvou nenulových čtvercových matic druhého řádu A, B tak, aby $A \cdot B$ byla nulová matice, ale $B \cdot A$ nulová matice nebyla.
4. Uveďte příklad dvou čtvercových matic třetího řádu hodnosti 2 tak, aby jejich součin byl hodnosti 3.
5. Uveďte příklad čtvercové matice desátého řádu, která bude mít determinant 2012.
6. Uveďte příklad nejednotkové čtvercové matice, která je sama sobě inverzí.

Příklad 61. Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Určete:

1. $2A^T + C$
2. $D^T \cdot E^T - (E \cdot D)^T$
3. $(A \cdot B) \cdot C$
4. $A \cdot (B \cdot C)$
5. $C^T \cdot A^T + 2E^T$
6. $D^T - E^T$

Výsledek.

1. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 15 & 3 & 12 \\ 14 & 0 & 7 \\ 12 & 12 & 13 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Příklad 62. Je dána matice A,

$$A = \begin{pmatrix} i & 1+i & -1+i \\ 0 & i & -1+i \\ i & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Určete $A \cdot A$.

Výsledek.

$$\begin{pmatrix} -2-i & -2+2i & -5-i \\ -1-i & -1 & -3-i \\ -2+i & -1+i & -1+i \end{pmatrix}$$

Příklad 63. Nalezněte všechny matice X takové, že $A \cdot X = X \cdot A$, přičemž

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Výsledek.

$$\begin{pmatrix} r & 3s \\ -5s & r+9s \end{pmatrix}, \quad \text{kde } r, s \in \mathbb{R}.$$

Příklad 64. Určete všechny matice A tak, aby $A \cdot A = B$, kde

1. $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

Výsledek.

1. $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} \pm\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \pm 3 \end{pmatrix}$

Příklad 65. Určete hodnosti následujících matic

1. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix}$

Výsledek.

1. 2
2. 3

Příklad 66. Určete hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 1-i & i & -1 \\ 1 & 0 & 2i \\ i & 2-i & 1+i \end{pmatrix}.$$

Výsledek. 3

Příklad 67. Určete hodnost matice A v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a & b \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & b \end{pmatrix}$

Výsledek.

1. $h(A) = 2$ pro $(a, b) \in \{(3, 2); (-5, 2)\}$, $h(A) = 3$ jinak
2. $h(A) = 2$ pro $(a, b) = (0, 3)$, $h(A) = 3$ pro $a = 0$, $b \neq 3$, $h(A) = 4$ jinak

Příklad 68. K dané matici A nalezněte matici inverzní

1. $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1-2i \\ 1+2i & 1-i \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Výsledek.

1. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1+i & 1-2i \\ 1+2i & -1-i \end{pmatrix}$

2. $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

3. inverzní matice neexistuje

Příklad 69. Vypočtěte determinant následujících matic

1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & i \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2+i & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 3-2i & 1-i \\ 2-3i & 1+i & 1+2i \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Výsledek.

1. 90
2. -46
3. $-2+2i$
4. $-16+20i$
5. -195
6. 30

Příklad 70. Vypočtěte determinant matice A, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výsledek. -105

Příklad 71. Vypočtěte determinant matice A, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 3 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledek. $(2n+1)(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Cvičení 5: Soustavy lineárních rovnic

Teorie 4.

1. Uveďte příklad soustavy dvou lineárních rovnic o deseti neznámých, která nebude mít řešení.
2. Uveďte příklad soustavy deseti lineárních rovnic o dvou neznámých, která bude mít nekonečně mnoho řešení.
3. Uveďte příklad soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, která bude mít jediné a to nulové řešení.
4. Uveďte příklad homogenní soustavy pěti lineárních rovnic o pěti neznámých, která nebude mít řešení.
5. Uveďte příklad homogenní soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých, která bude mít právě dvě řešení.
6. Uveďte příklad soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých, která bude mít množinu řešení $\{(t, 0, 2012) \mid t \in \mathbb{R}\}$
7. Uveďte příklad dvou lineárních rovnic o třech neznámých, která bude mít právě jedno řešení.

Příklad 72. Řešte soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \\ 5x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & = & -1 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 8x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 6x_1 & - & 9x_2 & + & 7x_3 & + & 10x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & 13x_3 & + & 18x_4 & = & 1 \end{array}$$

g)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

h)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & - & 6x_4 & = & 3 \\ 7x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \end{array}$$

i)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & - & 3x_4 & + & 9x_5 & = 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & = 1 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & = 1 \end{array}$$

Výsledek.

a) $(2, -2, 3)$

b) $(-1, -1, 0, 1)$

c) $(2, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3)$

d) nemá řešení

e) $\{(2-t, -2, 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$

f) $\{(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}s - \frac{1}{16}t, s, -\frac{11}{8}t, t) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$

g) $\{(1+t, \frac{3}{2}, t, -\frac{1}{2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$

h) nemá řešení

i) nemá řešení

Příklad 73. Řešte soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{C}$

a) $$\begin{array}{rcrcl} (1-2i)x_1 & + & (2+3i)x_2 & = & 8+5i \\ (1-4i)x_1 & + & (1+2i)x_2 & = & 5-2i \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & (2+2i)x_2 & + & 2ix_3 & = & 1 \\ (1-i)x_1 & + & (1+3i)x_2 & + & (-1+i)x_3 & = & 0 \\ (1+i)x_1 & + & (1-i)x_2 & + & (1+i)x_3 & = & 1 \end{array}$$

Výsledek.

a) $(2, 3)$

b) $\{(\frac{4-3i}{10} - t, \frac{2+i}{10} - (1+i)t, (2-i)t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Příklad 74. V závislosti na reálném parametru a řešte soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{C}$:

a) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 3 \\ 8x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & 9 \\ 7x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 17x_4 & = & a \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & a \\ x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & a^2 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & 1 \end{array}$$

Výsledek.

a) Pro $a \neq 0$ nemá soustava řešení; pro $a = 0$ má soustava nekonečně mnoho řešení tvaru $(\frac{-13}{2} - 13t, \frac{-7}{2} - 19t, 0, 2t)$

b) Pro $a = -2$ nemá soustava řešení; pro $a = 1$ má nekonečně řešení tvaru $(1-t-s, t, s)$; v ostatních případech má právě jedno řešení $(\frac{-a-1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2})$

c) Pro $a = -2$ nemá soustava řešení; pro $a = 1$ má nekonečně řešení tvaru $(1-t-s, t, s)$; v ostatních případech má právě jedno řešení $(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2})$

Příklad 75. V závislosti na reálných parametrech rozhodněte o řešitelnosti (počtu řešení) daných soustav, aniž byste tato řešení hledali. Soustava je zadána rozšířenou maticí soustavy:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 \end{array}\right)$$

Výsledek. Pokud $a = b$ nebo $c = 0$ nebo $c = a + b$, potom soustava nemá řešení. Jinak má jediné řešení.

Příklad 76. Pomocí Cramerova pravidla (pokud je to možné) řešte danou soustavu lineárních rovnic

a) $$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 29 \\ -4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcr} 13x_1 & + & 2x_2 & - & 6x_3 & = & 8 \\ -5x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 7 \\ 7x_1 & - & 6x_2 & + & 18x_3 & = & 5 \end{array}$$

Výsledek.

a) $(3, 4, 5)$

b) Nelze řešit Cramerovým pravidlem

Příklad 77. Řešte zadanou soustavu homogenních lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$:

a) $$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 16x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 & - & 4x_4 & + & 4x_5 & = 0 \\ 2x_1 & + & 1x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = 0 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & - & 6x_3 & - & 6x_4 & + & 6x_5 & = 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = 0 \end{array}$$

Výsledek.

a) $\{(-11t, -t, -7t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

b) $\{(0, 0, 0, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Příklad 78. V závislosti na reálném parametru a řešte zadanou soustavu homogenních lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 6x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & ax_3 & = & 0 \end{array}$$

Výsledek. Pro $a = 2$ jsou řešení tvaru $(3t, t, 2t)$; pro $a = \frac{1}{6}$ jsou řešení tvaru $(12t, -7t, 30t)$; jinak je jediné řešení $(0, 0, 0)$.

Cvičení 6: Vektorové prostory a jejich podprostory

Teorie 5.

1. Uveďte příklad vektorového prostoru, který nemá žádný podprostor.
2. Uveďte příklad vektorového prostoru nad číselným tělesem, který má právě 2012 vektorů-
3. Uveďte příklad nenulového vektoru $\underline{u}$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ tak, aby $3 \cdot \underline{u} = \underline{o}$.
4. Uveďte příklad čtyř různých podprostorů vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$.

Příklad 79. Je dáno číselné těleso T a množina V. Sčítání vektorů definujme jako obvyklé sčítání čísel a násobení vektoru definujme jako klasické násobení. Rozhodněte, zda V tvoří vektorový prostor nad T

1. $V = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{Q}$.
2. $V = \mathbb{Q}$, $T = \mathbb{R}$.
3. $V = \mathbb{C}$, $T = \mathbb{R}$.
4. $V = \mathbb{Q}$, $T = \mathbb{C}$.
5. $V = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $T = \mathbb{R}$.
6. $V = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $T = \mathbb{Q}$.

Výsledek.

1. Ano
2. Ne
3. Ano
4. Ne
5. Ne
6. Ano

Příklad 80. Rozhodněte, zda množina V tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, jestliže sčítání vektorů definujeme jako sčítání polynomů a násobení vektoru číslem definujeme jako násobení polynomu číslem.

1. $V = \mathbb{R}[x]$
2. $V = \mathbb{R}_2[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \mathrm{st}(f) \leq 2\}$
3. $V = \mathbb{R}_n[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \mathrm{st}(f) \leq n\}$
4. $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \mathrm{st}(f) = 2\}$

Výsledek.

1. Ano
2. Ano
3. Ano
4. Ne

Příklad 81. Rozhodněte zda množina V tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, jestliže sčítání vektorů definujeme jako sčítání matic a násobení vektoru číslem definujeme jako násobení všech složek matice tímto číslem.

1. $V = \mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{R})$
2. $\{A \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 0\}$
3. $\{A \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$
4. $\{A \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$
5. $\{A \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{R}) \mid A \text{ má na hlavní diagonále nuly}\}$

Výsledek.

1. Ano
2. Ne
3. Ne
4. Ne
5. Ano

Příklad 82. Nechť $V = \{f \mid f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}\}$. Pro $f, g \in V$ a $r \in \mathbb{R}$ definujme $f+g$ vztahem $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, pro všechna $x \in \langle 0,1\rangle$, a $r \cdot f$ vztahem $(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$. Dokažte, že V tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Ten označujeme $\mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}$.

Příklad 83. Nechť $V = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Pro $f, g \in V$ a $r \in \mathbb{R}$ definujme $f+g$ vztahem $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, pro všechna $x \in \mathbb{R}$, a $r \cdot f$ vztahem $(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$. Dokažte, že V tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Příklad 84. Je dáno číslené těleso T a množina V s operací $\oplus$. Dále definujme součin $\odot$ čísla z T s prvkem z V. Rozhodnět, zda V tvoří vektorový prostor nad T.

1. $T = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^+$

   $u \oplus v = u \cdot v$, pro $u, v \in V$

   $r \odot v = v^r$, pro $v \in V$, $r \in T$

2. $T = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^+$

   $u \oplus v = u + v$, pro $u, v \in V$

   $r \odot v = v^r$, pro $v \in V$, $r \in T$

3. $T = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

   $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2)$, pro $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

   $r \odot (x, y) = (r \cdot x, r \cdot y)$, pro $x, y \in \mathbb{R}$, $r \in T$

Výsledek.

1. Ano
2. Ne
3. Ne

Příklad 85. Rozhodněte, zda množina U tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$

1. $U = \{(x, y, z) \mid x \cdot y \cdot z = 0\}$
2. $U = \{(r, \sqrt{2}r, -2r) \mid r \in \mathbb{R}\}$

Výsledek.

1. Ne
2. Ano

Příklad 86. Rozhodněte, zda množina $U = \{(z_1, z_2, z_3) \mid |z_1| = |z_2| = |z_3|\}$ tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$

Výsledek. Ne

Příklad 87. Rozhodněte, zda množina U tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$

1. $U = \{(0,0,0,0), (1,1,1,1), (-1,-1,-1,-1)\}$
2. $U = \{(a, b, c, d) \mid a + b + c + d \geq 0\}$
3. $U = \{(2s + t, s - t, t, s) \mid t, s \in \mathbb{Q}\}$

Výsledek.

1. Ne 2. Ne 3. Ano

Příklad 88. Rozhodněte, zda množina U tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$

1. $U = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n + \dots + x_n = 0\}$
2. $U = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n + \dots + x_n = 1\}$

Výsledek.

1. Ano 2. Ne

Příklad 89. Rozhodněte, zda množina U tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}$

1. $U = \{f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$
2. $U = \{f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R} \mid f(0) \cdot f(1) = 0\}$

Výsledek.

1. Ano 2. Ne

Příklad 90. Rozhodněte, zda množina U tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}[x]$

1. $U = \mathbb{R}_2[x]$
2. $U = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(0) = 0\}$
3. $U = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(1) = 0\}$
4. $U = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(0) = 1\}$
5. $U = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid -f(x) = f(-x)\}$
6. $U = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(1) = f(0) = 0\}$

Výsledek.

1. Ano 2. Ano 3. Ano 4. Ne 5. Ano 6. Ano

Cvičení 7: Lineární závislost vektorů, generování podprostorů, báze, dimenze, součet a průnik podprostorů

Teorie 6. Uveďte příklad

1. pěti lineárně nezávislých vektorů z $\mathbb{R}_4[x]$
2. tří lineárně nezávislých vektorů z $\mathbb{R}^2$
3. tří vektorů, které budou generovat $\mathbb{R}^2$
4. tří vektorů, které budou generovat $\mathbb{R}_3[x]$
5. dvou lineárně nezávislých vektorů $u, v \in \mathbb{R}^3$ tak, aby $u + v$ a $u - v$ byly lineárně závislé.
6. dvou různých bází $\mathbb{R}_2[x]$.
7. trojdimenzinálního podprostoru $\mathbb{R}_3[x]$
8. nekonečnědimenzionálního prostoru a jeho dvojdimenzionálního podprostoru.
9. dvou dvoudimenzionálních podprostorů $\mathbb{R}^3$ tak, aby byl jejich průnikem triviální podprostor.

Příklad 91. Vyjádřete vektor u jako lineární kombinaci vektorů u_i.

1. $u = (3, 2, 4),\ u_1 = (1, 1, 0),\ u_2 = (0, 1, 1),\ u_3 = (1, 0, 1)$
2. $u = (1, 4, -1, 0),\ u_1 = (2, 1, 0, 0),\ u_2 = (0, 1, 1, 0),\ u_3 = (1, 0, 1, 1),\ u_4 = (0, 0, 0, 1)$
3. $u = 2x^2 - 3x + 1,\ u_1 = x + 2,\ u_2 = x^2 + x + 1,\ u_3 = x^2 - x + 2$
4. $u = x^3 - x^2 + 2x,\ u_1 = x - 1,\ u_2 = x^2 - 1,\ u_3 = x^3 - 1,\ u_4 = x^3 + x^2 + x + 1$

Výsledek.

1. $(3, 2, 4) = \frac{1}{2} \cdot (1, 1, 0) + \frac{3}{2} \cdot (0, 1, 1) + \frac{5}{2} \cdot (1, 0, 1)$
2. $(1, 4, -1, 0) = 2 \cdot (2, 1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 1, 0) - 3 \cdot (1, 0, 1, 1) + 3 \cdot (0, 0, 0, 1)$
3. $2x^2 - 3x + 1 = -\frac{7}{5} \cdot (x + 2) + \frac{1}{5} \cdot (x^2 + x + 1) + \frac{9}{5} \cdot (x^2 - x + 2)$
4. $x^3 - x^2 + 2x = \frac{3}{2} \cdot (x - 1) - \frac{3}{2} \cdot (x^2 - 1) + \frac{1}{2} \cdot (x^3 - 1) + \frac{1}{2} \cdot (x^3 + x^2 + x + 1)$

Příklad 92. Rozhodněte, zda vektory $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 1)$ generují tentýž podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ jako vektory $(2, -1, 3, 3)$, $(0, 1, -1, -1)$.

Výsledek. Ano

Příklad 93. Rozhodněte, zda uvedené vektory generují prostor $\mathbb{Q}^4$.

1. $(1, 2, 1, 2)$, $(2, 1, 2, 1)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(-2, 0, -1, -3)$, $(-1, 1, 0, -2)$
2. $(-1, 1, 0, 1)$, $(2, 0, 1, 3)$, $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 3, 4, 6)$, $(1, -3, 5, -7)$

Výsledek.

1. Ne
2. Ano

Příklad 94. Rozhodněte, zda dané vektory generují vektorový prostor $\mathbb{R}_2[x]$

1. $x+1,\ x^2+2x+3,\ x^2-2x-3$
2. $x^2+2x+3,\ x^2-2x-3,\ 2x+3$

Výsledek.

1. Ano
2. Ne

Příklad 95. Určete všechna reálná čísla a tak, aby vektor $(a,1,2)$ ležel v prostoru $\langle u_1,u_2,u_3\rangle$

1. $u_1=(1,2,-1),\ u_2=(1,1,0),\ u_3=(2,-1,3)$
2. $u_1=(1,2,-2),\ u_2=(1,1,-1),\ u_3=(-2,-1,1)$

Výsledek.

1. $a=3$
2. $a\in\mathbb{R}$

Příklad 96. Rozhodněte, zda jsou dané vektory vektorového prostoru V lineárně závislé, či lineárně nezávislé

1. $V=\mathbb{R}^4$; $(0,-1,2,3)$, $(2,1,-1,-2)$, $(1,0,1,1)$
2. $V=\mathbb{R}^4$; $(1,1,-1,2)$, $(-4,1,1,-3)$, $(2,-3,1,-1)$, $(1,1,1,1)$
3. $V=\mathbb{C}^3$; $(2,2+2i,2i)$, $(1-i,1+3i,-1+i)$, $(1+i,1-i,1+i)$
4. $V=\mathbb{R}_3[x]$; $2x^2+x-4$, x^2-3, x^2+2x+1

Výsledek.

1. Nezávislé
2. Závislé
3. Závislé
4. Závislé

Příklad 97. Určete, pro jaké hodnoty racionálních parametrů jsou uvedené vektory z $\mathbb{Q}^4$ lineárně nezávislé.

1. $(1,2+a,4,6)$, $1,2,3-b,3$, $(2,4,b-6,7)$, $(1,2-a,2-b,1)$
2. (a,b,c,d), $(b,-a,d,-c)$, $(c,-d,-a,b)$, $(d,c,-b,-a)$

Výsledek.

1. $a=0\ \vee b=6$
2. $a=b=c=d=0.$

Příklad 98. Nechť u,v,w jsou lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru V. Rozhodněte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé či nezávislé

1. $u+v,\ v+w,\ u+w$
2. $2u+3v+3w,\ u+4v-w,\ 3u+5v+4w$
3. $3u+4v+5w,\ 4u+3v+5w,\ 5u+4v+3w$
4. $u,\ u+v,\ u+v+w$

Výsledek.

1. Nezávislé
2. Závislé
3. Nezávislé
4. Nezávislé

Příklad 99. Rozhodněte, zda dané vektory tvoří bázi vektorového prosotru V

1. $V=\mathbb{R}^4$; $(1,5,5,-4)$, $(1,2,3,-1)$, $(1,-1,1,2)$, $(1,8,7,-7)$
2. $V=\mathbb{R}_2[x]$; $2x^2+3x-5$, x^2-x+1, $3x^2+2x-2$
3. $V=Mat_{22}(\mathbb{R})$; $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$
4. $V=\mathbb{C}^2$; $(1+i,2-i)$, $(1-i,2-i)$

Výsledek.

1. Ne
2. Ano
3. Ano
4. Ano

Příklad 100. Doplňte dané vektory na bázi vektorového prostoru V

1. $V=\mathbb{R}^4$; $(1,2,-1,1)$, $(1,-1,0,2)$, $(0,0,1,-1)$
2. $V=\mathbb{R}_3[x]$; $1+x+x^2$, $2-x+x^2+x^3$
3. $V=Mat_{22}(\mathbb{R})$; $\begin{pmatrix}-1&1\\1&-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&-1\\0&-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$
4. $V=\mathbb{C}^3$; $(1+i,1-i,2i)$, $(1,-1,2)$, $(i,i,0)$

Příklad 101. Ve vektorovém prostoru V je dán podprostor W. Určete jeho dimenzi a nějakou jeho bázi.

1. $V=\mathbb{R}^4$, $W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1+x_4=0, x_2+x_3=0\}$
2. $V=\mathbb{R}^n$, $W=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1=\dots=x_n\}$
3. $V=\mathbb{R}^n$, $W=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1+\dots+x_n=0\}$
4. $V=\mathbb{R}^5$, $W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 \mid x_1-x_2+x_3-x_4=0\}$
5. $V=\mathbb{R}^5$, $W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 \mid x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0, x_5=0\}$
6. $V=\mathbb{R}_2[x]$, $W=\{f\in\mathbb{R}_2[x] \mid f(0)=0\}$
7. $V=\mathbb{R}_2[x]$, $W=\{f\in\mathbb{R}_2[x] \mid f(1)=0\}$
8. $V=\mathbb{R}_5[x]$, $W=\{f\in\mathbb{R}_5[x] \mid f(x)=f(-x)\}$

Výsledek.

1. $\dim(W) = 2$, $W = \langle(1, 0, 0, -1), (0, 1, -1, 0)\rangle$
2. $\dim(W) = 1$, $W = \langle(2012, 2012, 2012, 2012)\rangle$
3. $\dim(W) = n - 1$, $W = \langle(1, 0, 0 \dots, 0, -1), (0, 1, 0, \dots, 0, -1), \dots (0, 0, 0, \dots, -1, 1)\rangle$
4. $\dim(W) = 4$, $W = \langle(0, 0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 1, 0)\rangle$
5. $\dim(W) = 3$, $W = \langle(4, 0, 0, -1, 0), (0, 2, 0, -1, 0), (0, 0, 4, -3, 0)\rangle$
6. $\dim(W) = 2$, $W = \langle x^2, x\rangle$
7. $\dim(W) = 2$, $W = \langle(x - 1)^2, (x - 1)\rangle$
8. $\dim(W) = 3$, $W = \langle x^4, x^2, 1\rangle$

Příklad 102. Ve vektorovém prostoru V jsou dány podprostory W_1, W_2. Nalezněte bázi a dimenzi podprosotorů $W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$ a rozhodněte, zda je součet $W_1 + W_2$ přímý.

1. $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = \langle(1, 2, 2), (2, 3, -1), (1, 1, -3)\rangle$, $W_2 = \langle(0, 1, 2), (1, 1, -1), (1, 3, 3)\rangle$
2. $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \langle(1, -1, 2, 1), (2, 2, 3, 3), (0, 4, -1, 1)$, $W_2 = \{(1, 3, 1, 2), (3, 1, 5, 4)\}$
3. $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \langle(1, 1, 0, 2), (1, 2, 1, -2), (1, 2, 2, -3), (2, 3, 1, 0)\rangle$,
   $W_2 = \langle(1, 3, 0, -4), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, -1)\rangle$
4. $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \langle(1, 0, 0, -1), (1, 0, 0, 0)\rangle$, $W_2 = \langle(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0)\rangle$

Výsledek.

1. $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, $\dim(W_1 + W_2) = 3$. Součet není přímý.
2. $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$, $\dim(W_1 + W_2) = 2$. Součet není přímý.
3. $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$, $\dim(W_1 + W_2) = 4$. Součet není přímý.
4. $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$, $\dim(W_1 + W_2) = 4$. Součet je přímý.

Příklad 103. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_5[x]$ jsou dány podprostory $W_1 = \{f \in \mathbb{R}_5[x] \mid f(-x) = f(x)\}$, $W_2 = \{f \in \mathbb{R}_5[x] \mid f(-x) = -f(x)\}$, $W_3 = \{f \in \mathbb{R}_5[x] \mid f(1) = f(2) = 0\}$.

1. Určete bázi a dimenzi jednotlivých podprostorů.
2. Určete bázi a dimenzi $W_1 \cap W_3$
3. Určete bázi a dimenzi $W_2 + W_3$
4. Dokažte, že součet $W_1 + W_2$ je přímý.

Příklad 104. Nalezněte matici přechodu od báze (2) k bázi (1) ve vektorovém prostoru V

1. $V = \mathbb{R}^2$

   (1) $(2, -3), (-1, 1)$
   (2) $(1, 0), (0, -2)$

2. $V = \mathbb{R}^4$

(1) $(1, 2, 1), (2, -1, 3), (-2, 3, 2)$

(2) $(-5, 9, 2), (6, -10, 5), (-1, 2, 9)$

Výsledek.

1. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Cvičení 8: Lineární zobrazení, lineární transformace

Teorie 7. Uveďte příklad

1. Injektivního lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[x]$
2. Injektivního lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^3$
3. Surjektivního lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}_3[x]$
4. Dvou různých izomorfních vektorových prostorů.

Příklad 105. Rozhodněte, zda je φ lineární zobrazení, zda je injektivní, surjektivní, izomorfismus

1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi((a,b,c)) = (2a+3b, 4c+5)$
2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi((a,b)) = (2a+b, b, b-a)$
3. $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x], \quad \varphi(ax^2+bx+c) = 3ax^3+3bx+c$
4. $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(ax^2+bx+c) = (a+b+c, b+c, c)$
5. $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(f) = (f(0), f(1))$
6. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_4[x], \quad \varphi((a,b,c)) = ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$
7. $\varphi : \mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a,b,c,d)$
8. $\varphi : \mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a+c, b+d)$
9. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{R}), \quad \varphi((a,b)) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$
10. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{R}), \quad \varphi((a,b)) = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$
11. $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{R}), \quad \varphi(f) = \begin{pmatrix} f(0) & 0 \\ 0 & -f(0) \end{pmatrix}$
12. $\varphi : \mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x], \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = bx^2+cx+(d-a)$

Výsledek.

1. Není linzob
2. Injketivní linzob
3. Injketivní linzob
4. Izomorfismus
5. Je surjektivní linzob
6. Injektivní linzob
7. Izomorfismus
8. Surjektivní linzob
9. Injektivní linzob
10. Linzob
11. Je linzob
12. Surjektivní linzob

Příklad 106. Pro zadané lineární zobrazení nalezněte jádro a obraz

1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad \varphi((a,b,c)) = (a+b, b+c, a+c, a)$
2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi((a,b,c)) = (a+b, b+c)$
3. $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi((a,b,c,d)) = (3a-b+2c-d, 5a+2b+3c, 2a+3b+c+d)$
4. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad \varphi((1,2,1)) = (-1,1,1,1)$, $\varphi((0,1,2)) = (1,0,0,1)$, $\varphi((1,0,-1)) = (0,1,1,2)$
5. $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi((1,0,0,0,0)) = (1,2,1)$, $\varphi((1,1,0,0,0)) = (-1,1,0)$, $\varphi((1,1,1,0,0)) = (1,5,2)$, $\varphi((1,1,1,1,0)) = (0,3,1)$, $\varphi((1,1,1,1,1)) = (2,1,1)$

Výsledek.

1. $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{o\}$, $\operatorname{Im}(\varphi) = \langle (1,0,1,1), (1,1,0,0), (0,1,1,0) \rangle$
2. $\operatorname{Ker}(\varphi) = \langle (1,-1,1) \rangle$, $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$
3. $\operatorname{Ker}(\varphi) = \langle (-7,1,11,0), (-3,0,5,1) \rangle$, $\operatorname{Im}(\varphi) = \langle (3,5,2), (-1,2,3) \rangle$
4. $\operatorname{Ker}(\varphi) = \langle (0,3,4) \rangle$, $\operatorname{Im}(\varphi) = \langle (-1,1,1,1), (1,0,0,1) \rangle$
5. $\operatorname{Ker}(\varphi) = \langle (-2,0,1,0,0), (-1,0,1,1,0), (1,2,1,1,1) \rangle$, $\operatorname{Im}(\varphi) = \langle (1,2,1), (-1,1,0) \rangle$

Příklad 107. Lineární zobrazení $\varphi : \mathrm{Mat}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ je dáno obrazy bázových vektorů

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = (2,1),\ \varphi\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = (-1,1),\ \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (1,1),\ \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (0,-1).$$

1. Nalezněte obecný předpis pro zobrazení φ
2. Určete jádro a obraz zobrazení φ
3. Nalezněte všechny matice X takové, že $\varphi(X) = (1,1)$

Výsledek.

1. $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (-a+b+\frac{5}{2}c+\frac{1}{2}d, -2a+b+2c+d)$
2. $\operatorname{Ker}(\varphi) = \left\{\begin{pmatrix} t & -3t+3s \\ t-s & 3t-s \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\}$, $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$
3. $X = \begin{pmatrix} r & 1-3r+3s \\ r-s & 3r-s \end{pmatrix}$

Příklad 108. Lineární transformace $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definována vztahem

$$\varphi((a,b,c)) = (b+c, 2a+c, a-3b+c).$$

Nalezněte matici lineární transformace φ v bázi u_1, u_2, u_3

1. $u_1 = (0,0,1), u_2 = (1,0,0), u_3 = (0,1,0)$
2. $u_1 = (1,1,1), u_2 = (0,1,1), u_3 = (0,0,-1)$
3. $u_1 = (1,2,1), u_2 = (2,1,1), u_3 = (1,3,2)$

Výsledek.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 16 & \frac{17}{2} & \frac{47}{2} \\ -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -9 & -\frac{7}{2} & -\frac{27}{2} \end{pmatrix}$

Příklad 109. Lineární transformace φ vektorového prostoru V je zadána určením obrazů báze. Nalezněte matici lineární transformace v bázi u_1, u_2, u_3

1. $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi((2,3,5)) = (1,1,1), \varphi((0,1,2)) = (1,1,-1), \varphi((1,0,0)) = (2,1,2), u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)$
2. $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi((2,4,1)) = (0,5,1)$, $\varphi((-1,3,-2)) = (-5,1,1)$, $\varphi((3,-1,4)) = (7,3,-1)$, $u_1 = (1,2,1), u_2 = (2,1,1), u_3 = (1,1,2)$
3. $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\varphi(x^2+x+1) = x^2+x$, $\varphi(x+1) = 4x^2+3x+6$, $\varphi(x^2+1) = 2x^2+x+3$, $u_1 = 2x^2+2x+3, u_2 = 2x^2+4x+5, u_3 = x^2+3x+3$

Výsledek.

1. $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

Příklad 110. Nalezněte jádro a obraz dané linerání transformace φ vektorového prostoru V

1. $V = \mathbb{R}^3$, $\varphi((1,-1,2)) = (-3,0,9)$, $\varphi((2,1,3)) = (4,1,-12)$, $\varphi((-1,0,2)) = (-4,0,22)$,
2. $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\varphi(ax^2+bx+c) = (4a-5b+2c)x^2 + (5a-7b+3c)x + (6a-9b+4c)$

Výsledek.

1. $\mathrm{Ker}(\varphi) = \langle (1,0,2),(0,1,3) \rangle$, $\mathrm{Im}(\varphi) = \langle (1,0,-3) \rangle$
2. $\mathrm{Ker}(\varphi) = \langle x^2+2x+3 \rangle$, $\mathrm{Im}(\varphi) = \langle x^2+x+1, x+2 \rangle$

Cvičení 9: Euklidovské prostory

Příklad 111. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ je pro libovolné dva vektory $u = (a, b)$, $v = (c, d)$ definováno reálné číslo $u \cdot v$. Rozhodněte, zda je takto korektně definován skalární součin, jestliže

1. $u \cdot v = 0$
2. $u \cdot v = 4ac - 2ad - 2bc + 5bd$
3. $u \cdot v = ad + bc$

Výsledek.

1. ne
2. ano
3. ne

Příklad 112. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ je pro libovolné dva vektory $u = (a, b, c)$, $v = (d, e, f)$ definováno reálné číslo $u \cdot v$. Rozhodněte, zda je takto korektně definován skalární součin, jestliže

1. $u \cdot v = 3ad - ae - bd + 2be + af + cd + cf$
2. $u \cdot v = 2ad - ae - bd + cf$

Výsledek.

1. ano
2. ne

Příklad 113. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ je pro libovolné dva vektory $u = ax^2 + bx + c$, $v = dx^2 + ex + f$ definováno reálné číslo $u \cdot v$. Rozhodněte, zda je takto korektně definován skalární součin, jestliže

1. $u \cdot v = 1$
2. $u \cdot v = cf + eb + ad$

Výsledek.

1. ne
2. ano

Příklad 114. Určete všechny hodnoty reálného parametru a tak, aby byl zadaný vektor $u \in V$ normovaný (vzhledem ke klasickému skalárnímu součinu).

1. $V = \mathbb{R}^5$, $u = (a + 1, 0, a + 2, 0, a + 1)$
2. $V = \mathbb{R}^7$, $u = (a + 1, 1, 0, a + 2, 1, 0, 2a - 3)$

Výsledek.

1. -1, $-\frac{5}{3}$
2. pro žádné a

Příklad 115. Určete reálné parametry a, b tak, aby byly zadané vektory prostoru $\mathbb{R}^5$ ortogonální

1. $(1, 1, 2, 0, 0), (1, -1, 0, 1, a), (-1, b, 2, 3, -2)$
2. $(2, -1, 0, a, b), (a, b, 0, -2, 1), (a, 2b, 5, b, -a)$

Výsledek.

1. $b = -3$, $a = \frac{5}{2}$
2. $a = b = 0$ nebo $a = b = 1$

Příklad 116. V euklidovském prostoru V nalezněte nějakou ortogonální bázi podprostoru W, jestliže

1. $V = \mathbb{R}^4$, $W = \langle u, v, w \rangle$, kde $u = (1, 2, 2, -1)$, $v = (1, 1, -5, 3)$, $w = (3, 2, 8, -7)$
2. $V = \mathbb{R}^4$, $W = \langle u, v, w \rangle$, kde $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, 0, -7)$, $w = (3, -2, 3, 14)$
3. $V = \mathbb{R}^4$, W je podprostor řešení homogenní soustavy lineárních rovnic zadané maticí soustavy
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & -2 & 9 \\ 3 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Výsledek. Hledaných bází je spousta, například

1. $(1, 2, 2, -1), (2, 3, -3, 2), (2, -1, -1, -2)$
2. $(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, -7)$
3. $(0, 0, 3, 1), (90, -10, 13, 39)$

Příklad 117. V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^5$ je dán podprostor W. Nalezněte ortogonální bázi ortogonálního doplňku $W^\perp$, jestliže

1. $W = \{(r + s + t, -t + r, r + s, -t, s + t) \mid r, s, t \in \mathbb{R}\}$
2. $W = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$, kde $u_1 = (1, -1, 2, 1, 3)$, $(2, 1, -1, -1, 2)$, $(1, -7, 12, 7, -19)$, $(1, 5, -8, -5, 13)$
3. $V = \mathbb{R}^4$, W je podprostor řešení homogenní soustavy lineárních rovnic zadané maticí soustavy
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Výsledek. Hledaných bází je spousta, například

1. $(1, 0, -1, 1, 0), (1, 3, 2, 1, -3)$
2. $(2, 1, -1, -1, 2), (1, -7, 12, 7, -19)$, $(1, 5, -8, -5, 13)$
3. $(1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0)$

Příklad 118. Nechť $\mathbb{R}^3$ je euklidovský prostor s obvyklým skalárním součinem. Nechť $\mathbb{R}^2$ je euklidovský prostor se skalárním součinem definovaným vztahem
$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$
Rozhodněte, zda je dané zobrazení f ortogonálním zobrazením, jestliže

1. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \sqrt{2}x_1)$
2. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3, -x_2)$
3. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3)$

Výsledek.

1. ano 2. ne 3. ne

Příklad 119. Rozhodněte, zda je daná matice ortogonální

1.
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2.
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Výsledek.

1. ne 2. ano

Cvičení 10: Analytická geometrie

Příklad 120. Určete parametrické rovnice podprostoru M zadaného

1. rovnicemi $M : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 9,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -3$
2. třemi body $A[-1, 1, 0]$,$B[2, 1, 6]$, $C[3, 0, 4]$
3. dvěma body $A[1, 2, -3]$, $B[0, 2, 1]$ a směrovým vektorem $u = (2, 1, -1)$
4. bodem $A[3, 1, -2]$ a dvěma směrovými vektory $u = (-1, 2, 1)$, $v = (3, -4, 2)$
5. rovnicemi $x_1 + x_2 - 2x_4 = 6; x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 11$, $x_1 + x_2 - x_4 = 8$
6. rovnicemi $x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; x_2 + x_3 + x_4 = 5$, $2x_1 + 4x_2 - x_3 = 11$

Výsledek.

1. $M : [x_1; x_2; x_3; x_4] = [3; 6; 0; 0] + t_1(0; -1; 1; 0) + t_2(0; 1; 0; 1)$
2. $M : [x, y, z] = [-1, 1, 0] + t(1, 0, 2) + s(3, -1, 4)$
3. $M = [x, y, z] = [1, 2, -3] + t(-1, 0, 4) + s(2, 1, -1)$
4. $M : [x, y, z] = [3, 1, -2] + t(-1, 2, 1) + s(3, -4, 2)$
5. $M : [x_1, x_2, x_3, x_4] = [7; 3; 0; 2] + t(1; -1; 1; 0)$
6. $M : [x_1, x_2, x_3, x_4] = [3; 2; 3; 0] + t(-2; -1; 0; 1)$

Příklad 121. Najděte obecné rovnice afinního podprostoru M

1. $M : [x_1; x_2; x_3; x_4] = [1; 0; 2; 2] + t_1(1; -1; 0; 0) + t_2(1; 2; 0; -1)$
2. M je dáno třemi body $A[1, -1, 1]$, $B[2, 1, -3]$, $C[1, 4, 2$
3. M je dáno dvěma body $A[4, 1, 2]$, $B[2, -2, 3]$ a směrovým vektorem $u = (3, -2, 1)$
4. M je dáno bodem $A[3, 3, 3]$ a směrovými vektory $u = (1, -1, 1)$, $v = (-1, 1, 1)$
5. $M : [x_1; x_2; x_3; x_4] = [1; 0; 0; 0] + s(1; -1; 1; 0) + t(3; -2; 0; 1)$
6. $M : [x_1; x_2; x_3; x_4] = [0; 3; 1; 3] + s(1; 1; -2; -2) + t(1; 5; -4; 0)$

Výsledek.

1. $x_3 = 2,\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 7$
2. $22x - y + 5z - 28 = 0$
3. $x - 5y - 3z + 27 = 0$
4. $x + y - 6 = 0$
5. $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2;\ -x_1 - x_2 + x_4 = -1$

6. $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$; $4x_1 + x_3 + x_4 = 4$

Příklad 122. Určete vzájemnou polohu podprostorů $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ (a určete jejich průnik) v afinním prostoru $\mathcal{A}$

1. $\mathcal{A} = \mathbb{A}^3$, $\mathcal{U} : [3, -1, 0] + t(-6, 4, 1)$, $\mathcal{V} : [-2, 4, 3] + t(3, 0, -1)$
2. $\mathcal{A} = \mathbb{A}^3$, $\mathcal{U} : x + z - 1 = 0$, $3x + y - z + 13 = 0$, $\mathcal{V} : x - 2y + 3$, $y + 2z - 8 = 0$
3. $\mathcal{A} = \mathbb{A}^3$, $\mathcal{U} : x + y + 2z - 3 = 0$, $\mathcal{V} : x - y + z - 1 = 0$
4. $\mathcal{A} = \mathbb{A}^3$, $\mathcal{U} : [-1, 3, -2] + t(0, 1, 1) + s(1, -1, -2)$, $\mathcal{V} : x - y + z + 6$
5. $\mathcal{A} = \mathbb{A}^3$, $\mathcal{U} : 2x - y + 3z + 4 = 0$, $x - 2y - 2z = 0$, $\mathcal{V} : 4x - 5y - z + 8 = 0$
6. $\mathcal{A} = \mathbb{A}^4$, $\mathcal{U} : x_1 + x_2 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$, $\mathcal{V} : [1, -1, 1, 2] + s(-1, 1, 0, 0) + t(1, 2, -2, 0)$
7. $\mathcal{A} = \mathbb{A}^4$, $\mathcal{U} : x_1 + x_2 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, $x_3 + x_4 = 3$, $\mathcal{V} : [1, -1, 1, 2] + s(-1, 1, 0, 0) + t(0, 0, -2, 2)$
8. $\mathcal{A} = \mathbb{A}^4$, $\mathcal{U} : [4, -2, 3, -1] + t(1, -1, 1, -1)$, $\mathcal{V} : x_1 + x_3 + x_4 = 4$, $x_1 + x_2 + x_3 = 3$
9. $\mathcal{A} = \mathbb{A}^5$, $\mathcal{U} : [1, 1, 1, 1] + r(2, -8, 3, -5, -9)$, $\mathcal{V} : [1, 1, 2, -1, 3] + s(1, -1, 0, 2, 3) + t(0, 2, -1, 3, 5)$

Výsledek.

1. mimoběžné
2. různoběžné, $R[-3, 0, 4]$
3. totožné
4. $[-2, -2, 3]$
5. přímka leží v rovině
6. mimoběžné
7. přímka leží v rovině
8. různoběžné, $R[2, 0, 1, 1]$
9. rovnoběžné

Příklad 123. V závislosti na reálném parametru a určete vzájemnou polohu rovin $[3, -1, -1, 6] + s(-2, 1, -2, 1) + t(4, -1, -1, 0)$ a $[3, 1, 3, a] + r(0, -2, 0, 1) + \check{r}(2, 2, -1, -1)$.

Výsledek. Pro $a = \frac{11}{4}$ různoběžné, jinak mimoběžné.

Příklad 124. V prostoru $\mathbb{A}^3$ najděte příčku mimoběžek

1. $p : [1, -1, 2] + t(1, -1, 3)$, $q : [3, -1, 1] + t(2, 1, 4)$, která prochází bodem $[3, -2, 13]$
2. $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-2}$, $q : [2, 0, 1] + t(1, -1, 1)$, která je rovnoběžná s přímkou $r : x - y + z + 11 = 0$, $x - 3y - z - 6 - 0$.

Výsledek.

1. $[3, -2, 13] + t(1, 0, 8)$
2. $[1, -2, 3] + t(2, 1, -1)$

Příklad 125. V prostoru $\mathbb{A}^4$ určete přímku q, která

1. prochází bodem $M[8, 9, -11, -15]$ a protíná přímky $p : [1, 0, -2, 1] + s(1, 2, -1, -5)$, $r[0, 1, 1, -1] + t(2, 3, -2, -4)$
2. prochází bodem $M[1, 2, -1, -2]$, protíná rovinu $\sigma : x_1 + x_2 = 1,\ x_3 - x_4 = 3$ a je rovnoběžná s rovinou $\rho : x_1 + x_3 = -5,\ x_2 + x_4 = 3$.

Výsledek.

1. $[8, 9, -11, -15] + t(6, 7, -8, -11)$
2. $[1, 2, -1, -2] + t(-2, 0, 2, 0)$

Příklad 126. V prostoru $\mathbb{A}^5$ určete přímku q, která prochází bodem $M[5, 3, 4, 6, 2]$ a protíná roviny $\rho : [3, 1, 0, 4, 0] + a(0, 1, 0, 0, 0) + b(0, 0, 1, 0, 1)$ a $\pi : [0, 1, -2, 1, 0] + c(1, 0, 0, 0, 0) + d(0, 0, 0, 1, 0)$.

Výsledek. $[5, 3, 4, 6, 2] + t(2, 1, 3, 2, 1)$

Příklad 127. Najděte příčku mimoběžek $p : [1, 5, 2, -1] + t(1, 2, 1, 0)$, $q : [0, -1, 1, 1] + t(3, 1, 0, 1)$, která prochází bodem $M[0, 1, -5, -3]$.

Výsledek. Taková příčka neexistuje.

Cvičení 11: Analytická geometrie - Euklidovské prostory

Příklad 128. Určete orogonální projekci vektoru $(1; 2; 3)$ do podprostoru generovaného vektory $(-1; 1; 1)$, $(1; 1; 1)$ v $\mathbb{E}^3$.

Příklad 129. V Euklidovském prostoru $\mathbb{E}^4$ najděte ortogonální projekci vektoru $(-2; 2; 2; 5)$ do podprostoru $W = \langle (1; 1; -1; 2);\ (3; 1; 0; 1);\ (2; 0; 1; -1) \rangle$.

Příklad 130. V Euklidovském prostoru $\mathbb{E}^4$ určete vzdálenost roviny: $\sigma : [4; 1; 1; 0] + t(1; -1; 0; 0) + s(2; 0; -1; 0)$ a přímky $p : [5; 4; 4; 5] + r(0; 0; 1; -4)$.

Výsledek. 5

Příklad 131. Určete vzdálenost rovin $\sigma : [4; 5; 3; 2] + t(1; 2; 2; 2) + s(2; 0; 2; 1)$; $\rho : [1; -2; 1; -3] + r(2; -2; 1; 2) + p(1; -2; 0; -1)$ v Euklidovském prostoru $\mathbb{E}^4$.

Výsledek. 3

Příklad 132. Určete odchylku přímky $p : [1; 2; 3; 4] + t(-3; 15; 1; -5)$ a podprostoru $B : (0; 0; 0; 0) + r(1; -5; -2; 10) + s(1; 8; -2; -16)$ v $\mathbb{E}^4$.

Výsledek. $\frac{\pi}{4}$

Příklad 133. Nalezněte odchylku roviny $\rho : [2; 1; 0; 1] + t(1; 1; 1; 1) + s(1; -1; 1; -1)$ a roviny $\sigma : [1; 0; 1; 1] + r(2; 2; 1; 0) + p(1; -2; 2; 0)$ v prostoru $\mathbb{E}^4$.

Výsledek. $\arccos \frac{2}{3}$

Příklad 134. V Euklidovském prostoru $\mathbb{E}^4$ resp. $\mathbb{E}^5$ určete vzdálenost bodu A od podprostoru P.

1. $A[4; 1; -4; -5]$; $P : [3; -2; 1; 5] + t(2; 3; -2; -2) + s(4; 1; 3; 2)$
2. $A[1; 1; -2; -3; -2)$; $P : (3; 7; -5; 4; 1) + t(1; 1; 2; 0; 1) + s(2; 2; 1; 3; 1)$

Příklad 135. Určete vzdálenost přímek p, q v Euklidovském prostoru $\mathbb{E}$

1. $p : (9; -2; 0) + t(4; -3; 1)$; $q : (0; -7; 2) + s(-2; 9; 2)$
2. $p : (-3; 2; 3; 3) + t(-1; 1; 1; 0)$; $q : (6; 5; 7; 3) + r(0; 0; -1; 2)$

Příklad 136. Určete vzdálenost přímky p a roviny τ.

1. $p : (5; 4; 4; 5) + r(0; 0; 1; -4)$; $\tau : (4; 1; 1; 0) + t(1; -1; 0; 0) + s(2; 0; -1; 0)$
2. $p : (1; 6; -6; 4) + t(1; -5; 8; 5)$; $\tau : (6; 3; -5; 5) + s(1; -2; 2; 2) + r(2; -1; -2; 1)$

Příklad 137. Určete vzdálenost rovin σ a ρ

1. $\rho : x_1 + x_2 + 2x_3 = 4,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 9$; $\sigma : x_1 - 2x_2 - 2x_4 = -25,\ x_1 - x_3 + x_4 = 15$
2. $\rho : [5; 0; -1; 9; 3] + t(1; 1; 0; -1; -1) + s(1; -1; 0; -1; 1)$; $\sigma : [3; 2; -4; 7; 5] + r(1; 1; 0; 1; 1) + u(0; 3; 0; 1; -2)$

Příklad 138. Určete odchylku přímky p dané směrovým vektorem u a podprostoru B

1. $u = (1; 2; -2; 1)$, $B : [1; 1; 1; 1] + t(2; -2; 1; -1)$
2. $(0; 1; -1; 0; 0)$, $B : [2; 1; 1; 2; 2] + t(2; 1; 0; 1; -1) + s(3; 2; 0; 0; 1) + r(0; 1; 0; 1; 0) + p(1; 0; 0; 1; 3)$

Cvičení 12: Analytická geometrie - různé příklady

Příklad 139. V $\mathcal{A}^4$ zadejte obecnými rovnicemi roviny σ, τ tak, že

1. se neprotínají
2. jejich průnikem je bod
3. jejich průnikem je přímka

Příklad 140. V ainním prostoru A^5 udejte příklad

1. dvou rovin, jejichž součtem je A^5
2. bodů $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, které jsou v obecné poloze
3. bodů $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, které nejsou v obecné poloze
4. dvou nadrovin $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$, které se neprotínají
5. přímky p a roviny σ tak, aby $\dim(p+\sigma) = 4$
6. přímky p a roviny σ tak, aby $\dim(p+\sigma) = 3$

Příklad 141. Dokažte, že se přímky $p = A+tu$, $q = B+sv$ neprotínají, a sestrojte 3−rozměrný podprostor obsahující obě tyto přímky, jestliže $A[8,2,5,15,-3]$, $u(7,-4,11,13,-5)$, $B[-7,2,-6,-5,3]$, $v(2,9,-10,-6,4)$.

Výsledek. $p+q$

Příklad 142. Nalezněte parametrické i obecné vyjádření průniku a součtu podprostorů $\mathcal{B}_1 = \{B, L(u_1; u_2)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{B_2; L(v_1; v_2; v_3)\}$, kde

$$B_1 = [2,1,4,0,0], u_1 = (1,0,1,1,0), u_2 = (0,-1,-1,2,1)$$
$$B_2 = [3,0,1,3,2], v_1 = (1,1,0,0,1), v_2 = (1,-1,0,3,1), v_3 = (1,0,-2,1,1).$$

Výsledek.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 &= [2,0,3,2,1] + t(1,-1,0,3,1) \\ \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 &= 3x_1 - 6x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4 \end{aligned}$$

Příklad 143. V 5-rozměrném afinním prostoru udejte příklad přímky p a 3-rozměrného podprostoru $\mathcal{B}$ tak, že

1. $p \subseteq \mathcal{B}$
2. $p \parallel \mathcal{B}$
3. p a $\mathcal{B}$ jsou různoběžné
4. p a $\mathcal{B}$ jsou mimoběžné

Příklad 144. V 5-rozměrném afinním prostoru udejte příklad dvou rovin tak, že

1. jsou rovnoběžné
2. jsou různoběžné a mají společný bod
3. jsou různoběžné a mají společnou přímku
4. jsou mimoběžné a mají společný právě jeden směr
5. jsou mimoběžné a nemají společný žádný směr

Příklad 145. Nechť $\sigma : x - y + z = 0$, $\tau : 3x - y - z + 2 = 0$, $\rho : 4x - y - 2z + k = 0$ jsou roviny v afinním prostoru $\mathcal{A}^3$. Určete, pro která reálná čísla k se tyto roviny protínají v jedné přímce a tuto přímku určete.

Výsledek. $k = 3$, $p : [-1, -1, 0] + t(1, 2, 1)$

Příklad 146. V $\mathcal{A}^3$ napište parametrické vyjádření podprostorů $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ zadaných jako afinní obal bodů, jestliže $\mathcal{B} = \langle B_1, B_2, B_3\rangle, \mathcal{C} = \langle C_1, C_2, C_3\rangle$. Přitom $B_1[1, 1, -1]$, $B_2[-1, 5, 4]$, $B_3[3, 1, 2]$, $C_1[0, 1, 2]$, $C_2[1, 1, 1]$, $C_3[0, 1, 1]$.

Výsledek. $\mathcal{B} : B_1 + t(2, -2, 3)$, $\mathcal{C} : C_1 + r(1, 0, -1) + s(0, 0, 1)$, různoběžné, průsečík $[3, 1, 2]$.

Příklad 147. Nalezněte přímku r, která protíná přímku p, rovinu σ a navíc prochází bodem M, jestliže $p : [0, 0, -6, -7] + t(1, 1, 2, 1)$, $\sigma : [2, 1, 1, 1] + r(1, 2, -1, 1) + s(-1, 2, 1, 2)$, $M[7, -2, -1, 0]$.

Výsledek. $r : [1, 1, -4, -6] + t(7, -6, 5, 7)$.

Příklad 148. Je dána přímka $p : [0, 1, 0, 1]+t(1, 0, -1, 1)$ a rovina $\sigma : x_1+x_3 = 0, x_1+x_2+x_3+x_4 = 1$. Nalezněte

1. rovinu τ, která obsahuje přímku p a je rovnoběžná s rovinou σ
2. nadrovinu, která obsahuje přímku p a je rovnoběžná s rovinou σ

Výsledek.

1. neexistuje
2. $[0, 1, 0, 1] + r(-1, 0, 1, 0) + s(0, -1, 0, 1) + t(1, 0, -1, 1)$

Příklad 149. Nalezněte průnik úsečky AB a roviny σ, je-li

1. $A[-1; 1; 1]$; $B[3; 1; -2]$; $\sigma : [1; 0; 0] + r(1; 1; 0) + s(0; 1; -1)$
2. $A[1; 1; 3]$; $B[4; 0; 1]$; $\sigma : [3; 1; 4] + r(1; 2; 2) + s(2; 3; 1)$
3. $A[5; 1; 3]$; $B[1; -3; 4]$; $\sigma : 2x - 3y - 4z + 5 = 0$
4. $A[-1; 1; 2]$; $B[0; 3; 2]$ $\sigma : x - 2y - z + 6 = 0$

Výsledek.

1. $[\frac{9}{7}, 1, -\frac{5}{7}]$
2. $\emptyset$
3. úsečka AB
4. $[-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 2]$

Příklad 150. Jsou dány body $A[2, 3, 0, 1]$, $B[-2, 1, 2, 3]$, $C[1, 2, 1, -3]$, $D[4, 2, 1, -18]$. Určete vzájemnou polohu

1. úsečky AB a polopřímky CD
2. úsečky AB a polopřímky DC

Výsledek.

1. disjunktní
2. protínají se v bodě $[0, 2, 1, 2]$

Příklad 151. Nalezněte přímku p, která prochází bodem Q, leží v rovině σ a je kolmá k přímce q. Přitom $Q[-1; 1; -1]$; $\sigma : x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$, $q : x_1 + 2x_2 = 0$, $x_2 - x_3 + 1 = 0$.

Výsledek. $p : [-1, 1, -1] + t(0, 1, -1)$

Příklad 152. Nalezněte hodnoty parametru 4k4, pro něž jsou přímka p a rovina τ kolmé, jestliže $p : [0; 1; 0] + t(1; 2; 3)$, $\tau : (k + 4)x_1 + (2 - k)x_2 - 3kx_3 = 5$.

Výsledek. $k = -2$

Příklad 153. Nalezněte příčku mimoběžek p, q, která je kolmá k p i q. Přitom

1. $p : [8; 5; 8] + t(1; 2; -1)$, $q : [-4; 3; 4] + r(-7; 2; 3)$
2. $p : [1; -2; 0] + t(2; 3; 1)$, $q : x + y - z = 1$, $-3x + y + z = 9$

Výsledek.

1. $[3, 1, 1] + t(2, 1, 4)$
2. $[-1, 4, 2] + t(-5, 3, 1)$

Příklad 154. Nalezněte příčku mimoběžek p, q, která je kolmá k nadrovině $\mathcal{N}$. Přitom $p : [1; 0; 1; 1] + t(-1; 1; 2; 1)$, $q : [3; 1; 3; 4] + r(2; -1; 1; 0)$, $\mathcal{N} : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 7 = 0$.

Výsledek. $[0, 1, 3, 2] + t(1, 1, -1, 2)$

Cvičení 13: Vlastní čísla, vlastní vektory, diagonalizovatelné matice, iterované procesy

Příklad 155. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice A. Dále určete algebraickou a geometrickou násobnosti vlastních čísel. Odtud určete determinant matice A a rozhodněte, zda je matice A diagonalizovatelná.

1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Výsledek. Vlastní čísla:

1. $1, 2$
2. -1
3. 2
4. $1, 0$
5. $1, -1$
6. $1, 2 \pm 3i$

Příklad 156. Je dána matice A. Určete diagonální matici D a ortogonální matici C tak, aby $A = C \cdot D\ cdot C^T$, jestliže

1. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Výsledek.

1. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 2\sqrt{6} & 1 \\ 2\sqrt{5} & \sqrt{6} & -2 \\ \sqrt{5} & 0 & 5 \end{pmatrix}$
2. $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$

Příklad 157. Určete třetí mocninu a druhou odmocninu matice A

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

Výsledek.

1. $A^3 = \begin{pmatrix} -6 & 14 & -14 \\ 49 & -97 & 161 \\ 56 & -112 & 176 \end{pmatrix}$, $\sqrt{A} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & 2\sqrt{2}-2 & 2-2\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} & 4\sqrt{2}-5 & 7-4\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} & 2\sqrt{2}-4 & 6-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$
2. $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -112 & 1 & 63 \\ -112 & 0 & 64 \end{pmatrix}$, $\sqrt{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2}-4 & 1 & 1 \\ 2\sqrt{2}-4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A^3 = \begin{pmatrix} 64 & -56 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 126 & -119 & 1 \end{pmatrix}$, $\sqrt{A} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2}-2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & \sqrt{2}-3 & 1 \end{pmatrix}$

Příklad 158.

1. Vypočtete

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^n$$

2. Vypočtete

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n$$

3. Vypočtete

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^n$$

Příklad 159. Spočítejte $F(A) = A^{2010} - 2A^{2008} - 4A^{2006}$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ -4 & -2 & -4 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Výsledek.

$$F(A) = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -12 & -12 \end{pmatrix}$$

Příklad 160. Brněnská oblast má cca 400 tisíc obyvatel, což zahrnuje vlastní město a předměstí. Analyzujte změny v městské a příměstské populaci (a jejich dlouhodobý efekt), jestliže se každý rok přestěhuje 15% městské populace do předměstí a 5% příměstské populace do města.

Příklad 161. Předpokládejme, že v populačním modelu dravec–kořist (liška–králík)je vztah mezi počtem lišek L_k a králíků K_k v daném a následujícím měsíci následovný:

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= 0{,}6L_k + 0{,}5K_k \\ Kk+1 &= -0{,}16L_k + 1{,}2K_k, \end{aligned}$$

přičemž počáteční počet lišek a králíků je $L_0 = 50$ a $K_0 = 100$. Pomocí tohoto modelu analyzujte stav této populace z dlouhodobého hlediska.

Reference

[1] Petáková, J.: *Matematika - příprava k maturitě*, Prometheus, 2007

[2] Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*, Masarykova univerzita, 2002

[3] Čadek, M.: *Cvičení z lineární agebry 1*