

ÚVOD

Cílem mé práce je sestavit sbírku úloh z lineární algebry. Ta je určena především pro posluchače prvního semestru oboru odborná informatika.

Látka je rozložena do deseti kapitol, které jsou uspořádány v souladu se skripty [5] doc. RNDr. P. Zlatoše, CSc. a s přednáškami a cvičeními RNDr. M. Čadka, CSc. a Mgr. M. Se-kaniny, Ph.D. Jejím základem jsou cvičení ve skriptech [4] prof. J. Slováka, DrSc., která však podstatně rozšiřuje.

V každé kapitole připomínám nejdůležitější věty a definice potřebných pojmů, z nichž některé jsou ve stručnosti popsány v seznamu použitého značení. Dále jsou zde obsaženy řešené příklady, které čtenáři poskytují návody na řešení daných problémů, a úlohy k procvičení a důkladnému pochopení látky. Příklady i cvičení jsou řazeny postupně od jednodušších po složitější a s některými typy se student setká také v zápočtových a zkouškových testech. Výsledky cvičení je pak možné zkontrolovat v závěru sbírky.

Sbírka dává studentům možnost ověřit si své znalosti samostatným řešením úloh. Takových sbírek sice existuje celá řada (např. [1] nebo [3]), avšak ty jsou buď obtížně dostupné nebo nepokrývají vše, co se v současné době přednáší v prvním semestru lineární algebry na Masarykově univerzitě.

SEZNAM POUŽITÉHO ZNAČENÍ

Uvedené značení je používáno v celé sbírce a ve většině případů koresponduje se značením v [5].

a, b, c	běžné skaláry - prvky pole \mathbf{K}
α, β, γ	báze vektorových prostorů
\mathbf{C}	množina všech komplexních čísel
$\dim \mathbf{V}$	dimenze vektorového prostoru \mathbf{V}
$\text{Dir } \mathbf{V}$	zaměření vektorového prostoru \mathbf{V}
E	jednotková matice
EŘO	elemetrární řádkové operace
ε_n	standardní báze v \mathbf{R}^n
$(f)_{\beta, \alpha}$	matice lineárního zobrazení f v bazích α, β
$(\text{id}_{\mathbf{V}})_{\beta, \alpha}$	matice přechodu od báze α k bázi β
$\text{Im } f$	obraz zobrazení f
\mathbf{K}	obecné pole skalárů
\mathbf{K}^n	množina všech uspořádaných n -tic prvků z \mathbf{K}
$\mathbf{K}_n[x]$	množina všech polynomů v proměnné x nad \mathbf{K} stupně nejvýše n
$\text{Ker } f$	jádro zobrazení f
$[M]$	lineární obal množiny M
$\text{Mat}_{m,n}(\mathbf{K})$	množina všech matic typu $m \times n$ nad polem \mathbf{K}
$\text{Mat}_n(\mathbf{K})$	$\text{Mat}_{n,n}(\mathbf{K})$
\mathbf{N}	množina všech přirozených čísel
\mathbf{R}	množina všech reálných čísel
\mathbf{R}^+	množina všech kladných reálných čísel
$s_i(A)$	i -tý sloupec matice A
$\text{Tr } (A)$	stopa matice A
$\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$	vektorové prostory
u, v, w	vektory
x, y, z	neznámé, vektory
$(x)_{\alpha}$	souřadnice vektoru x v bázi α
\mathbf{Z}	množina všech celých čísel
\mathbf{Z}_n	množina zbytkových tříd modulo n

1. OPAKOVÁNÍ, POČÍTÁNÍ S KOMPLEXNÍMI ČÍSLY

Komplexní čísla jsou čísla tvaru $z = a + ib$, kde $a \in \mathbf{R}$ se nazývá reálná část komplexního čísla z , $b \in \mathbf{R}$ se nazývá imaginární část komplexního čísla z a pro i (tzv. imaginární jednotku) platí $i^2 = -1$. Tento tvar komplexního čísla se nazývá algebraický tvar komplexního čísla z .

Pro komplexní čísla $u = a + ib, v = c + id$ definujeme operace sčítání, odčítání a násobení takto:

$$u \pm v = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

$$u \cdot v = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Číslo $\bar{z} = a - ib$ se nazývá komplexně sdružené k číslu $z = a + ib$, číslo $-z = -a - ib$ je opačné komplexní číslo k číslu $z = a + ib$.

Reálné číslo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se nazývá absolutní hodnota komplexního čísla $z = a + ib$. Platí $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. Komplexní číslo, pro které platí $|z| = 1$, se nazývá komplexní jednotka.

Číslo z^{-1} s vlastností $z \cdot z^{-1} = 1$ se nazývá převrácené číslo komplexního čísla z . Platí $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Podíl komplexních čísel $u = a + ib$ a $v = c + id \neq 0$ je definován jako součin $u \cdot v^{-1}$.

Komplexní čísla znázorňujeme v kartézské soustavě souřadnic xy (tzv. rovina komplexních čísel nebo také Gaussova rovina).

Komplexní číslo $z = a + ib, z \neq 0$ můžeme rovněž zapsat v goniometrickém tvaru $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, kde $r \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je rovno $|z|$, $\cos \alpha = \frac{a}{|z|}$, $\sin \alpha = \frac{b}{|z|}$. Číslo $\alpha \in \mathbf{R}$ se nazývá argument komplexního čísla z .

Sčítání komplexních čísel odpovídá sčítání vektorů v rovině.

Násobení komplexního čísla z reálným skalárem k odpovídá stejnohlosti v rovině s koeficientem k se středem v počátku; $F(z) = kz$.

Násobení komplexního čísla z komplexní jednotkou $(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ odpovídá otočení v rovině o úhel α okolo počátku; $F(z) = z(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.

Násobení komplexního čísla z pevným komplexním číslem $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ odpovídá složení stejnohlosti a otočení; $F(z) = zr(\cos \alpha + i \sin \alpha)$.

Číslo $z \in \mathbf{C}$ se nazývá n -tá odmocnina čísla $a + ib \in \mathbf{C}$ právě tehdy, když je kořenem rovnice $z^n = a + ib$.

K řešení rovnice $z^n = a + ib$ použijeme goniometrický tvar komplexního čísla. Píšeme

$$z^n = a + ib = R(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

kde R, α jsou známé. Číslo z hledáme ve tvaru

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Z rovnosti

$$z^n = r^n(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = R(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

vyplývá $r^n = R$, tedy $r = \sqrt[n]{R}$ a $n\varphi = \alpha + 2k\pi$, tedy $\varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k}{n}\pi, k = 0, 1, \dots, n-1$.
Existuje n řešení rovnice.

Příklad: Řešte rovnici $z^3 = 8i$.

Řešení: Komplexní číslo $8i$ převedeme na goniometrický tvar:
 $|8i| = 8, \cos \alpha = 0, \sin \alpha = 1, \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 8i = 8(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$.
Tedy

$$z^3 = r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = 8(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$$

z čehož dostáváme

$$\begin{aligned} r^3 = 8 &\Rightarrow r = 2 \\ 3\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi &\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3}\pi \end{aligned}$$

Nyní za k dosadíme čísla $0, 1, 2$, určíme jednotlivé úhly a vypočteme všechna řešení rovnice:

$$k = 0: \varphi_0 = \frac{\pi}{6} = 30^\circ \Rightarrow z_1 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \sqrt{3} + i$$

$$k = 1: \varphi_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi = 150^\circ \Rightarrow z_2 = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = -\sqrt{3} + i$$

$$k = 2: \varphi_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi = \frac{9}{6}\pi = 270^\circ \Rightarrow z_3 = 2(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = -2i$$

Cvičení:

- Jsou dána komplexní čísla $a = -6 + 2i, b = 3 + 5i$. Vyjádřete v algebraickém tvaru čísla
 - $(a - b)^3$
 - \overline{ab}
 - $\frac{a}{b}$

- Upravte a vyjádřete v algebraickém tvaru čísla:

- $(3i - 7)(8 + i)$

- $-i + 2i(3 - 4i)$

- $\frac{3-2i}{1-i}$

- $\frac{1+i}{3-4i}$

- $\frac{(1+2i)(2+i)(3-2i)}{(1-i)^2}$

- $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$

3. Určete všechna reálná čísla x, y , pro která platí

(a) $(1 + i)x + (13 + 7i)y = 0$,

(b) $4(2 + i)x + (1 - 4i)y = (3 + i)x - 4(2i - 1)y - 7 + 9i$.

4. Řešte následující rovnice:

(a) $(1 + i)z = 2i$

(b) $(8 - 3i)z = 1 + i\sqrt{2}$

(c) $(5 - i)z = \frac{3i}{7+6i}$

5. Napište v goniometrickém tvaru komplexní čísla

(a) $-1 + i\sqrt{3}$

(b) $-\sqrt{2}(1 - i)$

(c) $3 - i\sqrt{3}$

6. Řešte následující rovnice:

(a) $x^3 = 8$

(b) $x^4 + 2 = 0$

(c) $x^3 + 1 = 0$

(d) $x^5 - 1 = 0$

(e) $7x^3 + 24 = 0$

2. POLE A VEKTOROVÉ PROSTORY

Polem rozumíme množinu \mathbf{K} se dvěma význačnými prvky – nulou a jedničkou a dvěma binárními operacemi na \mathbf{K} – sčítáním a násobením takovými, že platí následujících deset axiomů:

- (1) $(\forall a, b \in \mathbf{K})(a + b = b + a)$
- (2) $(\forall a, b, c \in \mathbf{K})(a + (b + c) = (a + b) + c)$
- (3) $(\forall a \in \mathbf{K})(a + 0 = a)$
- (4) $(\forall a \in \mathbf{K})(\exists b \in \mathbf{K})(a + b = 0)$
- (5) $(\forall a, b \in \mathbf{K})(a \cdot b = b \cdot a)$
- (6) $(\forall a, b, c \in \mathbf{K})(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c)$
- (7) $(\forall a \in \mathbf{K})(1 \cdot a = a)$
- (8) $(\forall a \in \mathbf{K} \setminus \{0\})(\exists b \in \mathbf{K})(a \cdot b = 1)$
- (9) $(\forall a, b, c \in \mathbf{K})(a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c)$
- (10) $0 \neq 1$

2.1 ZBYTKOVÉ TŘÍDY

Pro každé $n \in \mathbf{N}$ značí

$$\mathbf{Z}_n = \{k \in \mathbf{N}, k < n\} = \{0, 1, \dots, n - 1\}$$

množinu zbytkových tříd modulo n se dvěma binárními operacemi – sčítáním a násobením takovými, že $\forall a, b \in \mathbf{Z}_n$ platí

- (1) $a + b =$ zbytek po dělení $(a + b) : n$,
- (2) $a \cdot b =$ zbytek po dělení $(a \cdot b) : n$.

Příklad: Najděte opačné a inverzní prvky k prvkům množiny \mathbf{Z}_5 .

Řešení: Opačným prvkem k a je podle axiomu (4) takové b , pro které platí $a + b = 0$. Jak snadno zjistíme z tabulky pro sčítání v \mathbf{Z}_5 , opačným prvkem k 1 je 4, ke 2 je to prvek 3, k 0 je to opět 0.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Tabulka 1: Tabulka pro sčítání v \mathbf{Z}_5 .

Inverzním prvkem k a je podle axiomu (8) takové b , pro které platí $a \cdot b = 1$. V tabulce pro násobení v \mathbf{Z}_5 vidíme, že inverzním prvkem k 1 je opět 1, ke 2 je to prvek 3, ke 4 opět 4. K 0 inverzní prvek neexistuje.

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Tabulka 2: Tabulka pro násobení v \mathbf{Z}_5 .

Příklad: Řešte v \mathbf{Z}_5 rovnici $3x + 4 = 3$.

První řešení: Rovnici upravíme přičtením opačného prvku ke 4 k oběma stranám rovnice. Tedy

$$3x + 4 + 1 = 3 + 1 \Rightarrow 3x = 4.$$

Dále celou rovnici vynásobíme inverzním prvkem ke 3, čímž dostaneme

$$2 \cdot 3x = 2 \cdot 4 \Rightarrow 1 \cdot x = 3.$$

Druhé řešení: Rovnici opět upravíme na tvar $3x = 4$. V multiplikační tabulce pro násobení v \mathbf{Z}_5 najdeme prvek, který dá v součinu s 3 výsledek 4. Tímto prvkem je 3, což je přímo řešením rovnice.

Poznámka: V \mathbf{Z}_n pro n prvočíslo má rovnice $ax + b = c$ pro $a \neq 0$ právě jedno řešení. V \mathbf{Z}_n pro n složené mohou nastat případy, kdy má rovnice více řešení, právě jedno řešení nebo nemá řešení žádné.

Cvičení:

1. V \mathbf{Z}_p řešte rovnici $2x + 1 = 2$ pro $p = 3, 5, 7$.
2. V \mathbf{Z}_p řešte rovnici $7x + 9 = 8$ pro $p = 11, 13$.
3. V \mathbf{Z}_p řešte rovnici $4x + 3 = 0$ pro $p = 5, 7, 11$.
4. V \mathbf{Z}_8 najděte všechna řešení rovnic
 - (a) $4x + 6 = 5$
 - (b) $4x + 6 = 2$
5. V \mathbf{Z}_9 najděte všechna řešení rovnic
 - (a) $5x + 7 = 4$
 - (b) $8x + 4 = 7$
6. V \mathbf{Z}_6 najděte rovnice, které
 - (a) mají více řešení,
 - (b) mají právě jedno řešení,
 - (c) nemají žádné řešení.

7. V \mathbf{Z}_7 najděte všechna řešení rovnic

- (a) $x^3 = 1$
 (b) $x^3 = 6$

8. V \mathbf{Z}_{11} najděte všechna řešení rovnic

- (a) $x^2 + x = 9$
 (b) $x^2 + 2x = 8$

9. Najděte všechna řešení rovnice $x^3 + 2x = 2$

- (a) v \mathbf{Z}_5
 (b) v \mathbf{Z}_6
 (c) v \mathbf{Z}_7

2.2 VEKTOROVÉ PROSTORY

Nechť \mathbf{K} je pole. Vektorovým prostorem nad polem \mathbf{K} nazýváme množinu \mathbf{V} s význačným prvkem 0 a dvěma binárními operacemi – sčítáním $+$: $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ a násobením \cdot : $\mathbf{K} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ takovými, že platí:

- (1) $(\forall u, v \in \mathbf{V})(u + v = v + u)$
- (2) $(\forall u, v, w \in \mathbf{V})(u + (v + w) = (u + v) + w)$
- (3) $(\forall u \in \mathbf{V})(0 + u = u + 0 = u)$
- (4) $(\forall u \in \mathbf{V})(\exists v \in \mathbf{V})(u + v = 0)$
- (5) $(\forall k, l \in \mathbf{K})(\forall u \in \mathbf{V})(k \cdot (l \cdot u) = (kl) \cdot u)$
- (6) $(\forall u \in \mathbf{V})(1 \cdot u = u)$
- (7) $(\forall k \in \mathbf{K})(\forall u, v \in \mathbf{V})(k \cdot (u + v) = k \cdot u + k \cdot v)$
- (8) $(\forall k, l \in \mathbf{K})(\forall u \in \mathbf{V})((k + l) \cdot u = k \cdot u + l \cdot u)$

Nejčastějším případem vektorového prostoru nad polem \mathbf{K} je pro libovolné $n \in \mathbf{N}$ množina

$$\mathbf{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_1, \dots, x_n \in \mathbf{K}\}$$

všech uspořádaných n -tic prvků z \mathbf{K} spolu s operacemi

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$cx = c(x_1, \dots, x_n) = (cx_1, \dots, cx_n),$$

kde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{K}^n$ a $c \in \mathbf{K}$. Roli nuly v \mathbf{K}^n hraje uspořádaná n -tice $0 = (0, \dots, 0)$, opačným prvkem k $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ je prvek $-x = -(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n)$.

Příklad: Zjistěte, zda množina $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R}, x > 0\}$ s operacemi $x \oplus y = x \cdot y$, $a \odot x = x^a$ pro $x, y \in \mathbf{R}^+$, $a \in \mathbf{R}$ tvoří vektorový prostor nad polem \mathbf{R} .

Řešení: Abychom zjistili, zda je daná množina vektorovým prostorem, musíme ověřit všech osm axiomů vektorového prostoru:

$$(1) \quad x \oplus y = y \oplus x$$

$$\text{Důkaz: } x \oplus y = x \cdot y = y \cdot x = y \oplus x$$

$$(2) \quad (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

$$\text{Důkaz: } (x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \oplus (y \oplus z)$$

$$(3) \quad \text{Neutrální prvek pro } \oplus \text{ je } 1.$$

$$\text{Důkaz: } x \oplus 1 = x \cdot 1 = x$$

$$(4) \quad \text{Inverzní prvek pro } \oplus \text{ k prvku } x \text{ je } \frac{1}{x}.$$

$$\text{Důkaz: } x \oplus \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

$$(5) \quad (a \cdot b) \odot x = a \odot (b \odot x)$$

$$\text{Důkaz: } (a \cdot b) \odot x = x^{a \cdot b} = (x^b)^a = a \odot (b \odot x)$$

$$(6) \quad 1 \odot x = x$$

$$\text{Důkaz: } 1 \odot x = x^1 = x$$

$$(7) \quad a \odot (x \oplus y) = (a \odot x) \oplus (a \odot y)$$

$$\text{Důkaz: } a \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a = (a \odot x) \oplus (a \odot y)$$

$$(8) \quad (a + b) \odot x = (a \odot x) \oplus (b \odot x)$$

$$\text{Důkaz: } (a + b) \odot x = x^{(a+b)} = x^a \cdot x^b = (a \odot x) \oplus (b \odot x)$$

Daná množina splňuje všech osm axiomů, tvoří tedy vektorový prostor.

Cvičení:

1. Zjistěte, zda jsou následující množiny vektorové prostory nad \mathbf{R} . Pokud ne, určete, které axiomy vektorového prostoru nejsou splněny.

$$(a) \quad \mathbf{V} = \{(x, y, z)\} \text{ s operacemi } (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z'), \\ k(x, y, z) = (kx, y, z)$$

$$(b) \quad \mathbf{V} = \{(x, y)\} \text{ s operacemi } (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \\ k(x, y) = (2kx, 2ky)$$

$$(c) \quad \mathbf{V} = \{(x, y), x \geq 0\} \text{ se standardními operacemi sčítání vektorů, tj. } (x, y) + \\ (x', y') = (x + x', y + y'), \text{ a násobení vektoru skalárem, tj. } k(x, y) = (kx, ky).$$

$$(d) \quad \mathbf{V} = \{(x, y)\} \text{ s operacemi } (x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1), \\ k(x, y) = (kx, ky)$$

$$(e) \quad \text{Množina všech } n\text{-tic reálných čísel tvaru } (x, x, \dots, x) \text{ se standardními operacemi} \\ \text{sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem.}$$

$$(f) \quad \mathbf{V} = \{(1, x)\} \text{ s operacemi } (1, x) + (1, x') = (1, x + x'), \\ k(1, x) = (1, kx)$$

- (g) Množina všech matic typu 2×2 s reálnými koeficienty se standardními operacemi sčítání matic a násobení matic skalárem.
- (h) Množina všech matic typu 2×2 tvaru $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ se standardními operacemi sčítání matic a násobení matic skalárem.
- (i) Množina všech matic typu 2×2 tvaru $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ se standardními operacemi sčítání matic a násobení matic skalárem.
2. Uvažte, zda může vektorový prostor obsahovat dva různé nulové prvky (vektory). Pokud ano, splňují oba axiom (4)? Zdůvodněte.
3. Uvažte, zda mohou k vektoru u ve vektorovém prostoru existovat dva různé opačné vektory $(-u)_1, (-u)_2$. Pokud ano, splňují oba axiom (5)? Zdůvodněte.
4. Nechť $\mathbf{V} = \mathbf{C}$ a $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Ukažte, že \mathbf{C} je vektorový prostor nad \mathbf{R} .
5. Ukažte, že množina polynomů stupně nejvýše 2 s reálnými koeficienty $\mathbf{R}_2[x] = \{a_2x^2 + a_1x + a_0, a_2, a_1, a_0 \in \mathbf{R}\}$ tvoří vektorový prostor.
6. Nechť $\mathbf{V} = \mathbf{C}_2[x]$ je množina polynomů stupně nejvýše 2 s komplexními koeficienty. Ukažte, že \mathbf{V} tvoří vektorový prostor nad \mathbf{C} i nad \mathbf{R} .

3. MATICE, OPERACE S MATICEMI

Definujme nejprve základní operace s maticemi.

Sčítání matic: Nechť $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ jsou matice typu $m \times n$. Pak $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ je matice typu $m \times n$ pro $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Násobení matic skalárem: Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$, $a \in \mathbf{R}$ je skalár. Pak $a \cdot A = (a \cdot a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ pro $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Násobení matic: Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$, $B = (b_{jk})$ je matice typu $n \times p$. Pak $AB = C = (c_{ik})$ je matice typu $m \times p$ a $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$ pro $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p$.

Transponování matic: Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$. Pak $A^T = (a_{ji})$ je matice typu $n \times m$ pro $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Stopa matice, ozn. $\text{Tr}(A)$, je součet prvků matice na hlavní diagonále. $\text{Tr}(A)$ je definována pouze pro čtvercové matice.

Příklad: Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, E = (1 \ 0 \ -2),$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte matice $2D - 5F, A + 3C, C^T, A^T, 2C + 4E^T, AB, EC, CE, F^2 - 3D$. Dále vypočtěte stopy matic A, \dots, F .

Řešení:

$$2D - 5F = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 37 \end{pmatrix}$$

Součet $A + 3C$ není definován.

$$C^T = (3 \ 2 \ -1) \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2C + 4E^T = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) & 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & -3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$EC = (1 \ 0 \ -2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-2)(-1)) = (5)$$

$$CE = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ -2) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) \\ (-1) \cdot 1 & (-1) \cdot 0 & (-1) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F^2 - 3D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 46 \end{pmatrix}$$

$\text{Tr}(D) = 2$, $\text{Tr}(F) = -6$, pro ostatní matice není stopa definována.

Cvičení:

1. Uvažme matice nad \mathbf{Z}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = (-1 \ 0 \ 2), C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}, I = (1 \ 0 \ -2 \ 4).$$

(α) Které matice můžeme násobit s A zleva a zprava?

(β) Spočtěte (pokud je definováno):

(a) EI

(b) IE

(c) $D^3 + 4DH - H^2$

(d) $G^2 - 3F$

(e) $A - F$

(f) $A - GFA$

(g) $BACE - BFB^T$

2. Uvažme matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte (je-li definováno):

(a) $(4B)C + 2B$

(b) $2A^T + C$

(c) $D^T - E^T$

(d) $(D - E)^T$

(e) $D^T E^T - (ED)^T$

(f) $(AB)C$

(g) $A(BC)$

(h) $\text{Tr}(D)$

(i) $\text{Tr}(D - 3E)$

(j) $4\text{Tr}(7B)$

(k) $\text{Tr}(A)$

(l) $\text{Tr}(DD^T)$

(m) $C^T A^T + 2E^T$

3. Mějme A a B blokové matice:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & & \\ \hline & & & \\ A_{21} & A_{22} & & \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} B_{11} & B_{12} & & \\ \hline & & & \\ B_{21} & B_{22} & & \end{array} \right)$$

$$\text{Jejich součin lze vyjádřit: } AB = \left(\begin{array}{cc|cc} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} & & \\ \hline & & & \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} & & \end{array} \right)$$

za předpokladu, že bloky matic A a B mají vhodné rozměry. Tato metoda se nazývá blokové násobení.

Vynásobte následující matice blokově a výsledek ověřte obyčejným maticovým násobením:

$$(a) \quad A = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline & & & \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 4 & \\ -3 & 5 & 2 & \\ \hline & & & \\ 7 & -1 & 5 & \\ 0 & 3 & -3 & \end{array} \right)$$

$$(b) \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline & & & \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 4 & \\ -3 & 5 & 2 & \\ \hline & & & \\ 7 & -1 & 5 & \\ 0 & 3 & -3 & \end{array} \right)$$

$$(c) \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ \hline & & \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

4. Ukažte, že má-li A nulový řádek a B je matice taková, že AB je definován, pak AB obsahuje také nulový řádek.

Taktéž ukažte, že má-li B nulový sloupec a AB je definován, pak i AB má nulový sloupec.

5. Nechť $E = (e_{ij})$ je matice typu $n \times n$ splňující

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

Ukažte, že $AE = EA = A$ pro libovolnou matici A typu $n \times n$.
 E se nazývá jednotková matice.

6. Najděte matici $A = (a_{ij})$ typu 4×4 splňující následující podmínky:

(a) $a_{ij} = i + j$

(b) $a_{ij} = i^{j-1}$

(c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } |i - j| > 1 \\ -1 & \text{pro } |i - j| \leq 1 \end{cases}$

7. Maticí A tvaru $n \times n$ takovou, že

(a) $A_{22} = a, A_{ii} = 1$ pro všechna $i \neq 2$ a $A_{ij} = 0$ pro $i \neq j$,

(b) $A_{13} = A_{22} = A_{31} = A_{ii} = 1$ pro $i \geq 4$ a $A_{ij} = 0$ pro všechny ostatní dvojice ij ,

(c) $A_{13} = a, A_{ii} = 1$ pro všechna i a $A_{ij} = 0$ pro všechny ostatní dvojice ij

vynásobte obecnou matici $B = (B_{ij})$ tvaru $n \times m$ zleva a obecnou matici $C = (C_{ij})$ tvaru $m \times n$ zprava. Jak se výsledky násobení liší od matice B , resp. C ?

8. Najděte matici A typu 2×2 takovou, že zobrazení $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, je stejnoolehlost se středem v $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a koeficientem 3.

9. Najděte matici A typu 2×2 tak, aby $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ -x + y \end{pmatrix}$.

10. Kolik existuje matic A typu 3×3 takových, že platí:

(a) $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

11. Matice B se nazývá odmocninou matice A , jestliže platí $BB = A$.

(a) Najděte odmocninu matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Kolik existuje různých odmocnin matice $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

(c) Mají všechny matice typu 2×2 odmocninu? Vysvětlete.

12. Nechť O je nulová matice typu 2×2 .

(a) Existují matice A typu 2×2 takové, že $A \neq O$ a $AA = O$? Dokažte.

(b) Existují matice A typu 2×2 takové, že $A \neq O$ a $AA = A$? Dokažte.

13. Ukažte, že násobení sloupcového vektoru v \mathbf{R}^2 maticí $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ reprezentuje otočení v rovině o úhel α . Spočtete A^2, A^3 (obecně A^k).

14. Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dokažte, že $A^n = \begin{pmatrix} a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{2n} & a_{2n+1} \end{pmatrix}$, kde $\{a_n\}$ je Fibonacciho posloupnost a $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

15. Orientovaný graf G je tvořen množinou vrcholů $V = \{1, 2, \dots, n\}$ a množinou hran $H = \{(i, j) : i, j \in V\}$.

Matice grafu G je definována takto: $a_{ij} = 1$ právě, když $(i, j) \in H$, $a_{ij} = 0$ právě, když $(i, j) \notin H$.

Cesta délky k je tvořena posloupností čísel $i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}$ takových, že $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_{k+1}) \in H$.

Určete, jaký je vztah mezi A^2, A^3, \dots, A^k a cestami délky $2, 3, \dots, k$.

4. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Příklad: Řešte systém rovnic v \mathbf{R} užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Řešení: Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Pomocí EŘO (elementárních řádkových operací) upravujeme na schodovitý tvar. Poslední řádek matice dáme na první místo, potom jeho (-2) -násobek přičteme k původnímu prvnímu řádku, který posuneme na druhé místo, a jeho (-3) -násobek přičteme k původnímu druhému řádku, který posuneme na třetí místo. Tak dostaneme matici

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \end{array} \right)$$

Přičtením (-1) -násobku druhého řádku k třetímu dostaneme matici

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

Už z tohoto tvaru vidíme, že soustava odpovídající poslední matici nemá řešení, jelikož obsahuje rovnici $0 = -3$. Tedy ani původní soustava (přestože obsahuje více neznámých než rovnic) nemá řešení.

Příklad: Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -9 \end{aligned}$$

tří rovnic o třech neznámých nad polem \mathbf{R} .

Řešení: Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 10 \\ 1 & -2 & 2 & -9 \end{array} \right).$$

Pomocí EŘO upravujeme na redukovaný schodovitý tvar. Třetí řádek dáme na první místo. Jeho (-1) -násobek přičteme k původnímu prvnímu řádku, který dáme na druhé místo, a jeho (-3) -násobek přičteme k původnímu druhému řádku, který nyní dáme na třetí místo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & 11 & -2 & 37 \\ 0 & 11 & -2 & 37 \end{array} \right).$$

(-2) -násobek druhého řádku přičteme k (11) -násobku prvního řádku a jeho (-1) -násobek přičteme ke třetímu řádku. Výsledná matice už je v redukovaném schodovitém tvaru.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & 18 & -25 \\ 0 & 11 & -2 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Matice odpovídá soustavě rovnic

$$\begin{aligned} 11x_1 + 18x_3 &= -25 \\ 11x_2 - 2x_3 &= 37, \end{aligned}$$

kteřá je ekvivalentní s původní soustavou. Proměnnou x_3 si zvolíme za parametr $t \in \mathbf{R}$. Z první rovnice určíme x_1 :

$$11x_1 + 18t = -25 \Rightarrow 11x_1 = -25 - 18t \Rightarrow x_1 = \frac{-25 - 18t}{11}.$$

Z druhé rovnice určíme x_2 :

$$11x_2 - 2t = 37 \Rightarrow 11x_2 = 37 + 2t \Rightarrow x_2 = \frac{37 + 2t}{11}.$$

Vidíme, že původní soustava (přestože počet rovnic je stejný jako počet neznámých) má nekočně mnoho řešení.

Příklad: Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

čtyř rovnic o čtyřech neznámých nad polem \mathbf{Z}_5 .

Řešení: Protože se jedná o homogenní soustavu, stačí upravovat její (nerozšířenou) matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(-2) -násobek, tj. 3-násobek prvního řádku přičteme k druhému řádku a jeho (-1) -násobek, tj. 4-násobek přičteme k třetímu řádku. Dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(-1) -násobek, tj. 4-násobek třetího řádku přičteme k prvnímu řádku a jeho (-3) -násobek, tj. 2-násobek přičteme k druhému řádku. Konečně výměnou druhého a třetího řádku dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Třetí řádek odečteme od prvního a od čtvrtého řádku. Dále jej vynásobíme skalárem $3^{-1} = 2$. Potom jeho (-4) -násobek, tj. přímo tento nový třetí řádek přičteme k druhému řádku. Výsledná matice už je v redukovaném schodovitém tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proměnnou x_4 si zvolíme za parametr. Všechna řešení soustavy pak mají tvar $x_1 = t, x_2 = 2t, x_3 = 2t, x_4 = t$, kde $t \in \mathbf{Z}_5$. Vidíme, že původní soustava (přestože počet rovnic je stejný jako počet neznámých) má více než jedno řešení; není jich však nekonečně mnoho, ale pouze 5. Právě tolik je totiž možných voleb parametru t , tj. prvků pole \mathbf{Z}_5 .

Příklad: Uvažujme soustavu lineárních rovnic v neznámých x, y, z :

$$\begin{aligned} x + cy - cz &= -3 \\ x + (c-1)y - (c+3)z &= -5 \\ x + (c+1)y + 2z &= d-1 \end{aligned}$$

Najděte všechny hodnoty parametrů c, d , pro které má soustava

- (a) jediné řešení,
- (b) nekonečně mnoho řešení,
- (c) žádné řešení.

V případech (a), (b) najděte tato řešení v závislosti na parametrech c, d .

Řešení: Matici soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & -c & -3 \\ 1 & c-1 & -c-3 & -5 \\ 1 & c+1 & 2 & d-1 \end{array} \right)$$

převědeme pomocí Gaussovy eliminace na schodovitý tvar. První řádek opíšeme, k (-1) -násobku druhého řádku přičteme první řádek, ke třetímu řádku přičteme (-1) -násobek prvního řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & -c & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2+c & d+2 \end{array} \right)$$

Nyní první a druhý řádek opíšeme a ke třetímu řádku přičteme (-1) -násobek druhého řádku. Získáme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & -c & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & c-1 & d \end{array} \right),$$

ze které určíme, že

- (a) soustava má jediné řešení pro $c \neq 1$, a to:

$$x = \frac{4cd - c - 2c^2 + 3}{c - 1}, y = \frac{2c - 2 - 3d}{c - 1}, z = \frac{d}{c - 1};$$

- (b) pro $c = 1, d = 0$ doplníme hodnoty parametrů do upravené matice soustavy, z níž již lehce určíme, že soustava má nekonečně mnoho řešení, která jsou tvaru

$$x = -5 + 4p, y = 2 - 3p, z = p,$$

kde $p \in \mathbf{R}$ je parametr;

- (c) pro $c = 1, d \neq 0$ soustava obsahuje rovnici $0 = d$, v tomto případě tedy nemá řešení.

Cvičení:

1. Řešte soustavu rovnic v \mathbf{R} a \mathbf{Z}_5 užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

2. Řešte soustavu rovnic v \mathbf{R} , \mathbf{Z}_5 a \mathbf{Z}_7 užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -6 \end{aligned}$$

3. Řešte soustavu rovnic v \mathbf{R} užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 17x_3 - 29x_4 - 36x_5 &= 22 \\ 2x_1 - 3x_2 + 18x_3 - 27x_4 + 33x_5 &= 21 \\ 12x_1 - 18x_2 + 102x_3 - 174x_4 - 216x_5 &= 132 \\ 2x_1 - 3x_2 + 21x_3 - 24x_4 - 30x_5 &= 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 24x_3 - 21x_4 - 27x_5 &= 19 \end{aligned}$$

Soustavu řešte také jako homogenní.

4. Řešte soustavu rovnic v \mathbf{C} užitím Gaussovy eliminace.

(a)

$$\begin{aligned} x + 2iy &= 5 + 4i \\ (3 - i)y + (6 - 2i)z &= 10 \\ 2x - z &= 5 + 3i \\ x + y + z &= 5 + 2i \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (1 + i)x + 3iy &= -i \\ (1 + 2i)x + (1 - i)y &= 6 + i \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} (1 + i)x + (1 - i)y &= 6 + 4i \\ ix + (1 + 2i)y &= -3 + 5i \end{aligned}$$

5. Řešte soustavu rovnic v \mathbf{R} užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

6. Řešte soustavu rovnic v \mathbf{R} užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

7. Řešte soustavu rovnic v \mathbf{R} užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

8. Řešte následující systém rovnic, kde a, b, c jsou konstanty.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 + 2x_3 &= b \\ 3x_2 + 3x_3 &= c \end{aligned}$$

9. Řešte následující systém rovnic.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 9 \\ x_1 - 2x_3 + 7x_4 &= 11 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 10 \end{aligned}$$

10. Řešte následující systém rovnic.

$$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 2 \\ -10x_1 + 15x_2 - 11x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Soustavu řešte také jako homogenní.

11. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů a a b má soustava v \mathbf{R}

- (i) právě jedno řešení,
 - (ii) více než jedno řešení,
 - (iii) žádné řešení.
- (a)

$$\begin{aligned} ax + y - 2z &= 1 \\ x - y + z &= 0 \\ (1 + a)y - z &= b \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x - ay - 2z &= b \\x + (1 - a)y &= b - 3 \\x + (1 - a)y + az &= 2b - 1\end{aligned}$$

12. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů a a b má soustava v \mathbf{Z}_5
- (i) právě jedno řešení,
 - (ii) více než jedno řešení,
 - (iii) žádné řešení.

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 1 \\3x + 4y + az &= 2 \\3x + 4az &= b\end{aligned}$$

13. V \mathbf{Z}_5 řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\2x + 3z &= 0 \\4x + y + 2z &= 1\end{aligned}$$

Napište výčtem všechny prvky množiny řešení.

14. V \mathbf{Z}_5 řešte následující systém rovnic v závislosti na parametrech a a b .

$$\begin{aligned}ax + y &= b \\ay + z &= 2b \\x + az &= 4\end{aligned}$$

15. Určete parametry a, b, c tak, aby následující systém měl právě jedno řešení.

$$\begin{aligned}ax + by &= c \\cx + az &= b \\bz + cy &= a\end{aligned}$$

16. Řešte soustavu rovnic v závislosti na parametrech a, b .

$$\begin{aligned}ax + by + z &= 1 \\x + aby + z &= b \\x + by + az &= 1\end{aligned}$$

5. INVERZNÍ MATICE

Řekneme, že matice $A \in \text{Mat}_n(\mathbf{K})$ má inverzní matici, jelikož existuje matice $B \in \text{Mat}_n(\mathbf{K})$ taková, že

$$AB = BA = E.$$

Ke každé matici existuje nejvýše jedna inverzní matice. Značíme ji A^{-1} . Matici, která má matici inverzní, nazýváme regulární maticí.

Metoda výpočtu inverzní matice spočívá v použití EŘO. Nechť A je matice typu $n \times n$. Vytvoříme blokovou matici B tak, že zapíšeme A a jednotkovou matici E vedle sebe – A nalevo, E napravo:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

Matici B upravujeme nejdříve na schodovitý tvar. Pokud je ve schodovitém tvaru v levém bloku řádek ze samých nul, inverzní matice k A neexistuje. Pokud tento případ nenastane, pokračujeme v řádkových úpravách tak, abychom v levém bloku dostali jednotkovou matici. (Tento postup se nazývá zpětná Gaussova eliminace.) V pravém bloku je potom A^{-1} .

Příklad: Najděte inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Řešení: Vytvoříme blokovou matici tak, že A napíšeme nalevo, E napravo a upravujeme pomocí EŘO na schodovitý tvar (přímou Gaussovou eliminací).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Ze schodovitého tvaru vidíme, že A^{-1} existuje. Matici tedy dále upravujeme na redukovaný schodovitý tvar (zpětnou Gaussovou eliminací).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Tedy $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Správnost výpočtu ověříme vynásobením A s A^{-1} .

Příklad: Najděte inverzní matici k matici $C = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 1 & i \end{pmatrix}$.

Řešení: Napíšeme blokovou matici nalevo s maticí C , napravo s jednotkovou maticí a upravujeme na redukovaný schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} i & -2 & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 & 1 \end{array} \right)$$

První řádek vynásobíme $-i$, od druhého řádku odečteme nový první řádek.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2i & -i & 0 \\ 0 & -i & i & 1 \end{array} \right)$$

K prvnímu řádku přičteme dvojnásobek druhého řádku, druhý řádek vynásobíme i .

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & i & 2 \\ 0 & 1 & -1 & i \end{array} \right)$$

Tedy $C^{-1} = \begin{pmatrix} i & 2 \\ -1 & i \end{pmatrix}$

Cvičení:

1. Vypočítejte inverzní matice k daným maticím.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & -11 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Mějme matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Najděte jejich inverze.

(b) Ukažte, že

- i. $(A^{-1})^{-1} = A$
- ii. $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$
- iii. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- iv. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

3. Najděte inverzní matice k daným maticím.

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \ddots & 2-n & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2-n \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Najděte inverzní matice k následujícím maticím v \mathbf{C} .

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 2-3i & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. VEKTOROVÉ PODPROSTORY, LINEÁRNÍ ZÁVISLOST A NEZÁVISLOST, LINEÁRNÍ OBALY

6.1 VEKTOROVÉ PODPROSTORY

Množina $S \subseteq \mathbf{V}$ se nazývá lineární podprostor vektorového prostoru \mathbf{V} , jestliže $S \neq \emptyset$ a pro všechny skaláry $a \in \mathbf{K}$ a vektory $x, y \in S$ platí

- (1) $x + y \in S$
- (2) $ax \in S$

Tzn. neprázdná množina $S \subseteq \mathbf{V}$ je lineární podprostor právě tehdy, když je uzavřená vzhledem k operacím sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem.

Příklad: Určete, zda množina $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}; x \geq 0, y \geq 0\}$ tvoří vektorový podprostor v \mathbf{R}^2 .

Řešení: Pokud M tvoří vektorový podprostor, musí splňovat výše uvedené podmínky. Ověříme nejprve uzavřenost množiny M vzhledem k operaci sčítání vektorů. Jestliže vektor $x = (x_1, x_2) \geq 0$ (zápis $(x_1, x_2) \geq 0$ znamená $x_1 \geq 0$ a $x_2 \geq 0$) a vektor $y = (y_1, y_2) \geq 0$, pak i jejich součet $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \geq 0$.

Nyní ověříme uzavřenost množiny M vzhledem k operaci násobení skalárem. Nechť $a \in \mathbf{R}$. Pak $a(x, y) = (ax, ay)$. Pro $a \geq 0$ je podmínka splněna, ale pro a záporné je $(ax, ay) < 0$. Tedy M netvoří vektorový podprostor.

Cvičení:

1. Zjistěte, zda daná množina tvoří vektorový podprostor v \mathbf{R}^2 .
 - (a) $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x \cdot y \geq 0\}$
 - (b) $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x = y + 1\}$
2. Určete, které z následujících množin tvoří vektorové podprostory v \mathbf{R}^3 .
 - (a) $N = \{(a, 1, 1) \in \mathbf{R}^3\}$
 - (b) $N = \{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3; b = a + c\}$
3. Určete, které z následujících množin tvoří vektorové podprostory v $\text{Mat}_n(\mathbf{K})$.
 - (a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}_2(\mathbf{K}); a + b + c + d = 0 \right\}$
 - (b) $M = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbf{K}); \text{Tr}(A) = 0\}$
4. Určete, které z následujících množin jsou vektorové podprostory v $\mathbf{R}_3[x]$.
 - (a) $P = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3; a_0 = 0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}\}$
 - (b) $P = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{Z}\}$

6.2 LINEÁRNÍ ZÁVISLOST A NEZÁVISLOST, LINEÁRNÍ OBALY

Nechť $u_1, \dots, u_n \in \mathbf{V}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{K}$. Vektor $u = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$ se nazývá lineární kombinací vektorů u_1, \dots, u_n s koeficienty a_1, \dots, a_n .

Řekneme, že vektory u_1, \dots, u_n jsou

– lineárně nezávislé, jestliže pro libovolné koeficienty $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{K}$ platí

$$a_1u_1 + \dots + a_nu_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0,$$

– lineárně závislé, jestliže nejsou lineárně nezávislé. Tzn. existuje-li jejich lineární kombinace s alespoň jedním nenulovým koeficientem rovnající se nulovému vektoru.

Nechť $M = \{u_1, \dots, u_k\} \neq \emptyset$ je konečná podmnožina \mathbf{V} . Množina $\{a_1u_1 + \dots + a_ku_k; a_1, \dots, a_k \in \mathbf{K}\}$ všech konečných lineárních kombinací vektorů u_1, \dots, u_k se nazývá lineární obal množiny M , ozn. $[M]$. Jestliže $M = \emptyset$, potom $[\emptyset] = \{0\}$.

Příklad: Zjistěte, zda jsou vektory $v_1 = (1, -1, 0, 2)^T$, $v_2 = (2, 2, -1, 3)^T$, $v_3 = (0, 1, 1, 0)^T$, $v_4 = (3, 2, 0, 5)^T$ lineárně závislé v \mathbf{R}^4 nad \mathbf{R} . Určete jejich lineární obal.

Řešení: Vektory v_1, v_2, v_3, v_4 jsou lineárně nezávislé, právě když rovnice v neznámých a_1, a_2, a_3, a_4

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0$$

má právě jedno řešení, a to $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Porovnáním souřadnic můžeme tuto rovnici psát jako soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 + 3a_4 &= 0 \\ -a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 &= 0 \\ -a_2 + a_3 &= 0 \\ 2a_1 + 3a_2 + 5a_4 &= 0 \end{aligned}$$

Nyní napíšeme matici soustavy a soustavu řešíme Gaussovou eliminací.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soustava má více řešení, tzn. že vektory jsou lineárně závislé. Vedoucí prvky řádků výsledné matice jsou v prvním, druhém a třetím sloupci, tedy tyto tři vektory (sloupce) jsou lineárně nezávislé. Protože výsledná a původní matice jsou řádkově ekvivalentní, pořadí vektorů ve výsledné matici odpovídá pořadí vektorů v matici původní. Hledané lineárně nezávislé vektory jsou tedy první, druhý a třetí sloupec původní matice, tzn. vektory v_1, v_2, v_3 .

Nyní se ptáme, zda je vektor v_4 lineární kombinací vektorů v_1, v_2, v_3 , neboli zda v_4 patří do lineárního obalu tvořeného vektory v_1, v_2, v_3 . Pokud ano, existují koeficienty c_1, c_2, c_3 splňující rovnici

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = v_4.$$

Matici této soustavy opět převedeme na schodovitý tvar.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Soustava má řešení, tj. vektor v_4 je lineární kombinací vektorů v_1, v_2, v_3 , tedy $v_4 \in [v_1, v_2, v_3]$.

Všimněte si, že poslední řádkové úpravy jsou stejné jako úpravy, při nichž jsme zjišťovali, zda jsou v_1, v_2, v_3, v_4 lineárně závislé.

Příklad: Zjistěte, zda jsou polynomy $1 + x, 1 - x, 2 + x - x^2$ lineárně závislé v $\mathbf{R}_2[x]$.

Řešení: Pokud jsou dané polynomy lineárně nezávislé, musí být rovnice $a_1(1+x) + a_2(1-x) + a_3(2+x-x^2) = 0$ splněna pouze pro koeficienty $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Předpokládejme tedy jejich nezávislost. Pak platí

$$a_1(1+x) + a_2(1-x) + a_3(2+x-x^2) = 0$$

Roznásobením závorek dostaneme rovnici

$$a_1 + a_1x + a_2 - a_2x + 2a_3 + a_3x - a_3x^2 = 0$$

a následným sečtením koeficientů u stejných mocnin x získáme rovnici

$$(a_1 + a_2 + 2a_3) + (a_1 - a_2 + a_3)x + (-a_3)x^2 = 0$$

Z poslední rovnice plyne, že koeficienty u mocnin $x^0 = 1, x^1 = x, x^2$ musí být rovny nule:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + 2a_3 &= 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 &= 0 \\ -a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Řešíme danou soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Soustava má jediné řešení. Tedy polynomy $1 + x, 1 - x, 2 + x - x^2$ jsou lineárně nezávislé.

Příklad: Necht v_1, v_2, v_3 jsou lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru V . Potom $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_2 + v_3$ jsou rovněž lineárně nezávislé. Dokažte.

Řešení: Necht

$$a_1(v_1 - v_2) + a_2(v_2 - v_3) + a_3(v_2 + v_3) = 0$$

Úpravou dostáváme

$$a_1v_1 - a_1v_2 + a_2v_2 - a_2v_3 + a_3v_3 + a_3v_2 = 0$$

a dále

$$a_1v_1 + (-a_1 + a_2 + a_3)v_2 + (-a_2 + a_3)v_3 = 0$$

Z nezávislosti vektorů v_1, v_2, v_3 plyne

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ -a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ -a_2 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Řešíme danou soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Řešením soustavy dostáváme $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Tedy vektory $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_2 + v_3$ jsou lineárně nezávislé.

Cvičení:

1. Zjistěte, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé následující vektory v \mathbf{R}^n . Určete jejich lineární obal.

(a) $u_1 = (1, 0, 2), u_2 = (2, 0, 1), u_3 = (1, 2, 0)$

(b) $u_1 = (-3, 0, 4), u_2 = (3, 2, 5), u_3 = (6, -1, 1)$

(c) $u_1 = (1, -\sqrt{2}, -1), u_2 = (1 - \sqrt{2}, 2, 1 + \sqrt{2}), u_3 = (\sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2})$

(d) $u_1 = (-1, -1, 1, 1), u_2 = (1, -1, 1, -1), u_3 = (-1, 1, 1, -1), u_4 = (1, 1, 1, 1)$

(e) $u_1 = (3, 8, 7, -3), u_2 = (1, 5, 3, -1), u_3 = (2, -1, 2, 6), u_4 = (1, 4, 0, 3)$

(f) $u_1 = (1, 0, -2, 3), u_2 = (-1, 3, 0, 0), u_3 = (2, 0, 1, 1), u_4 = (1, 6, -1, 4)$

2. Z následujících vektorů vyberte maximální podmnožinu lineárně nezávislých vektorů

(a) $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (2, 5, 4), v_3 = (3, 6, 1), v_4 = (1, -1, 0), v_5 = (1, 1, 5)$

(b) $v_1 = (1, 0, 2, 4), v_2 = (2, 3, -1, 0), v_3 = (3, 3, 1, 4), v_4 = (1, 1, 1, 1), v_5 = (2, 2, 0, 3), v_6 = (1, 0, 0, 0)$

3. Zjistěte, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé následující polynomy v $\mathbf{R}_n[x]$.
- (a) $1 - x, x - x^2, x^2 - x^3, x^3 - 1$
 - (b) $1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3 + 1$
 - (c) $2 - x + 4x^2, 3 + 6x + 2x^2, 2 + 10x - 4x^2$
 - (d) $1 + 3x + 3x^2, x + 4x^2, 5 + 6x + 3x^2, 7 + 2x - x^2$
4. Zjistěte, zda vektor $x = (7, 2, -2)$ patří do lineárního obalu množiny vektorů
- (a) $\{(1, 0, -1), (2, 1, 0), (0, 1, 2), (1, 1, 1), (5, 2, -1)\}$
 - (b) $\{(2, 1, -1), (-2, 1, -1), (1, 0, 0), (4, 7, -7)\}$
5. Je dána množina $M = \{1 + 2x - x^2, 2 - x + x^2, 5 + x^2\}$ polynomů v $\mathbf{R}_2[x]$. Zjistěte, zda polynom
- (a) $-6 - 2x$
 - (b) $1 + x + x^2$
- patří do lineárního obalu množiny M .
6. Nechť u, v, w, z jsou lineárně nezávislé vektory vektorového prostoru \mathbf{V} . Zjistěte, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé vektory
- (a) $u + v, u - v, u + v + w$
 - (b) $u - v, v - w, w - u$
 - (c) $u + v + w, v + w + z, w + z + u, z + u + v$

7. BÁZE A DIMENZE VEKTOROVÉHO PROSTORU, SOUŘADNICE, SOUČTY A PRŮNIKY PODPROSTORŮ

Vektorový prostor \mathbf{V} je konečněrozměrný, jestliže v něm existuje konečná podmnožina $\{u_1, \dots, u_n\}$ taková, že každý vektor $u \in \mathbf{V}$ je lineární kombinací vektorů u_1, \dots, u_n . Báze konečnědimenzionálního prostoru \mathbf{V} je množina $\{u_1, \dots, u_n\}$ taková, že

- (1) každý vektor $u \in \mathbf{V}$ je lineární kombinací $\{u_1, \dots, u_n\}$,
- (2) vektory u_1, \dots, u_n jsou lineárně nezávislé.

Tyto dvě vlastnosti jsou ekvivalentní s tím, že každý vektor $u \in \mathbf{V}$ lze psát ve tvaru

$$u = \sum_{i=1}^n x_i u_i \quad (1)$$

právě jedním způsobem.

Je-li \mathbf{V} konečněrozměrný, mají všechny jeho báze stejný počet prvků. Dimenze konečněrozměrného vektorového prostoru \mathbf{V} je číslo $\dim \mathbf{V}$ udávající počet prvků nějaké jeho báze.

Nechť $\alpha = \{u_1, \dots, u_n\}$ je báze prostoru \mathbf{V} a $u \in \mathbf{V}$. Potom u lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru (1).

Sloupcový vektor

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

nazýváme sloupcem souřadnic a skaláry x_1, \dots, x_n souřadnicemi vektoru u v uspořádané bázi α .

Označme $e_i \in \mathbf{K}^n$ vektor skládající se ze samých nul, kromě i -té složky, která je 1. Potom $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$ je báze vektorového prostoru \mathbf{K}^n . Nazýváme ji standardní nebo také kanonickou bází tohoto prostoru.

Pro libovolný vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbf{K}^n$ platí

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

proto $(x)_\varepsilon = x$, tj. každý vektor $x \in \mathbf{V}$ splývá se svými vlastními souřadnicemi ve standardní bázi.

Nechť S, T jsou podprostory vektorového prostoru \mathbf{V} . Množina

$$S + T = \{x + y; x \in S, y \in T\}$$

je opět podprostor vektorového prostoru \mathbf{V} , nazývá se součet podprostorů S a T . Jestliže $S \cap T = \emptyset$, součet $S + T$ se nazývá přímý.

Nechť \mathbf{V} je konečněrozměrný vektorový prostor. Potom platí

$$\dim S + \dim T = \dim(S + T) + \dim(S \cap T)$$

Příklad: Najděte nějakou bázi a určete dimenzi lineárního obalu množiny M ve vektorovém prostoru \mathbf{V} .

(a) $\mathbf{V} = \mathbf{R}^4$, $M = \{(1, 2, 3, 4), (-2, -3, -4, -5), (3, 4, 5, 6), (-4, -5, -6, -7), (5, 6, 7, 8)\}$,

(b) $\mathbf{V} = \mathbf{R}_3[x]$, $M = \{1 + x + x^3, 1 - x, 2x - x^2, 2 - x^2, 2x + x^2 + x^3\}$.

Řešení: (a) Souřadnice vektorů množiny M ve standardní bázi \mathbf{R}^4 zapíšeme do sloupců matice, kterou upravíme řádkovými úpravami na schodovitý tvar, z něhož určíme lineárně nezávislé vektory.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 3 & -4 & 5 & -6 & 7 \\ 4 & -5 & 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 3 & -6 & 9 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Třetí, čtvrtý a pátý vektor jsou lineární kombinací prvních dvou vektorů, které jsou lineárně nezávislé a tvoří tedy bázi množiny M . Tzn. $\alpha_M = \{(1, 2, 3, 4), (-2, -3, -4, -5)\}$, $\dim[M] = 2$.

(b) Souřadnice polynomů množiny M ve standardní bázi prostoru $\mathbf{R}_3[x]$, tj. v bázi $(1, x, x^2, x^3)$, zapíšeme do sloupců matice a provádíme řádkové úpravy.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V tomto případě jsou lineárně nezávislé první tři vektory, tedy $\alpha_M = \{1 + x + x^3, 1 - x, 2x - x^2\}$, $\dim[M] = 3$.

Příklad: Doplňte množinu $M = \{(-1, 1, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, 0, -1, 1)\}$ na bázi \mathbf{R}^4 .

Řešení: Jsou-li vektory množiny M lineárně nezávislé, lze ji doplnit na bázi celého \mathbf{R}^4 a to výběrem z nějaké generující množiny v \mathbf{R}^4 . K daným vektorům tedy doplníme další vektory (nejlépe vektory tvořící standardní bázi \mathbf{R}^4) a pomocí Gaussovy eliminace vybereme bázi \mathbf{R}^4 :

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Vidíme, že vektory množiny M jsou lineárně nezávislé a že doplněním kteréhokoliv z přidávaných vektorů k M získáme bázi \mathbf{R}^4 .

Příklad: Najděte souřadnice vektoru v v bázi α vektorového prostoru \mathbf{V} :

(a) $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3$, $v = (1, 2, 3)$, $\alpha = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$,

(b) $\mathbf{V} = \text{Mat}_2(\mathbf{R})$, $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

Řešení: Vektor v vyjádříme jako lineární kombinaci prvků báze α . Výpočet souřadnic pak převedeme na řešení systému lineárních rovnic, který má vždy jediné řešení, neboť α je báze \mathbf{V} .

(a) Nechť

$$(1, 2, 3) = a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) + c(0, 1, 1)$$

Potom

$$(1, 2, 3) = (a + b, a + c, b + c)$$

Porovnáním získáme systém

$$a + b = 1$$

$$a + c = 2$$

$$b + c = 3$$

Rozšířenou matici systému upravíme na redukovaný schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Řešením systému je $a = 0, b = 1, c = 2$, tedy

$$(v)_\alpha = (0, 1, 2)^T$$

(b) Postupujeme analogicky jako v (a):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Úpravou dostáváme systém

$$a + b + c + d = 1$$

$$b + c + d = 2$$

$$c + d = 3$$

$$d = 4$$

jehož řešením je $a = -1, b = -1, c = -1, d = 4$. Potom

$$(v)_\alpha = (-1, -1, -1, 4)^T$$

Příklad: Nechť $P_1 = [M_1], P_2 = [M_2]$ v \mathbf{R}^4 , kde

$$\begin{aligned} M_1 &= \{u_1 = (4, 0, -2, 6), u_2 = (2, 1, -2, 3), u_3 = (3, 1, -2, 4)\} \\ M_2 &= \{v_1 = (1, -1, 0, 2), v_2 = (2, 2, -1, 3), v_3 = (0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Najděte $P_1 + P_2, P_1 \cap P_2$, jejich báze a dimenze.

Řešení: Protože $P_1 + P_2 = \{x + y; x \in P_1, y \in P_2\}$, platí $P_1 + P_2 = [M_1 \cup M_2]$. Pomocí EŘO určíme bázi $[M_1 \cup M_2]$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vidíme, že vektory u_1, u_2, u_3, v_2 jsou lineárně nezávislé, tedy $P_1 + P_2 = [u_1, u_2, u_3, v_2] = \mathbf{R}^4$, $\dim(P_1 + P_2) = 4$.

Nyní nechť $x \in P_1 \cap P_2$. Potom platí:

$$\begin{aligned} x &= a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 \in P_1 \\ x &= b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 \in P_2 \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 &= b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 \Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 - b_1 v_1 - b_2 v_2 - b_3 v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Soustavu přepíšeme do matice soustavy, pomocí EŘO upravíme na schodovitý tvar a určíme koeficienty a_1, \dots, b_3 :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 4 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Tedy $a_1 = r, a_2 = -p, a_3 = -r, b_1 = r, b_2 = -p, b_3 = p$, kde $p, r \in \mathbf{R}$ jsou parametry. Podle předchozího to znamená:

$$P_1 \cap P_2 = \{x = ru_1 - pu_2 - ru_3; p, r \in \mathbf{R}\} = \{x = r(u_1 - u_3) - pu_2; p, r \in \mathbf{R}\} = \\ \{x = r(1, -1, 0, 2) + p(-2, -1, 2, -3); p, r \in \mathbf{R}\} = [(1, -1, 0, 2), (-2, -1, 2, -3)]$$

Tentýž výsledek dostaneme s použitím vektorů v_1, v_2, v_3 :

$$P_1 \cap P_2 = \{x = rv_1 - pv_2 + pv_3; p, r \in \mathbf{R}\} = \{x = rv_1 + p(v_3 - v_2); p, r \in \mathbf{R}\} = \\ \{x = r(1, -1, 0, 2) + p(-2, -1, 2, -3); p, r \in \mathbf{R}\} = [(1, -1, 0, 2), (-2, -1, 2, -3)] \\ \dim(P_1 \cap P_2) = 2$$

Cvičení:

1. Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru \mathbf{V} :

(a) $M = \{(1, -2, 0, 0), (2, 1, 1, 3), (0, 1, 0, 1)\}, \mathbf{V} = \mathbf{R}^4$

(b) $M = \{1 - x, 1 + x + x^2, x^2 - x^3\}, \mathbf{V} = \mathbf{R}_3[x]$

(c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \mathbf{V} = \text{Mat}_2\mathbf{R}$

2. Který z vektorů u_1, u_2, u_3, u_4 doplňuje množinu α na bázi prostoru \mathbf{R}^4 ?

(a) $\alpha = ((1, -2, 1, -1), (1, 0, -1, -1), (1, 1, -2, 0)),$
 $u_1 = (-1, 2, -1, 1), u_2 = (3, -1, -2, -1), u_3 = (2, 1, 0, -2), u_4 = (2, 1, -3, -2)$

(b) $\alpha = ((1, 3, 0, -1), (1, 0, 0, -1), (0, 2, 1, 0)),$
 $u_1 = (-1, 1, -1, 1), u_2 = (3, -1, 0, -3), u_3 = (2, 1, 0, -2), u_4 = (1, -2, 0, -1)$

3. Najděte bázi a určete dimenzi lineárního obalu množiny M :

(a) $M = \{(1, 2, 3), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$

(b) $M = \{2x - 1, x^3 + x + 1, x^2 + x, 2x^2 + 1, x^3 + 3x^2 + 2x + 2\}$

(c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

4. Najděte nějakou bázi vektorového prostoru $M = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n; x_1 + \dots + x_n = 0\}$, doplňte ji na bázi celého \mathbf{R}^n a určete $\dim M$.

5. Určete dimenzi podprostoru P vektorového prostoru $\mathbf{R}_n[x]$:

(a) $P = \{f \in \mathbf{R}_n[x]; f(0) = 0\}$

(b) $P = \{f \in \mathbf{R}_n[x]; f(0) = f(1) = 0\}$

6. Nechť

$$P_1 = \{f \in \mathbf{R}_5[x]; f(x) = f(-x)\}$$

$$P_2 = \{f \in \mathbf{R}_5[x]; f(x) = -f(-x)\}$$

$$P_3 = \{f \in \mathbf{R}_5[x]; f(1) = f(2) = 0\}$$

jsou podprostory v $\mathbf{R}_5[x]$.

(a) najděte jejich báze,

- (b) určete $P_1 \cap P_3$,
- (c) určete $P_2 + P_3$,
- (d) ukažte, že součet $P_1 + P_2$ je přímý.
7. Uvažujme vektorový prostor $\text{Mat}_2(\mathbf{R})$ reálných matic typu 2×2 a jeho podmnožimu P všech matic $A = (a_{ij})$ takových, že $a_{11} + a_{22} = 0$.
- (a) Dokažte, že P je vektorový podprostor.
- (b) Napište nějakou bázi podprostoru P .
- (c) Doplněte tuto bázi na bázi prostoru $\text{Mat}_2(\mathbf{R})$ a v této bázi napište souřadnice jednotkové matice.
8. Nechť vektory v_1, v_2, v_3 tvoří bázi vektorového prostoru \mathbf{V} . Ukažte, že vektory $u_1 = v_1, u_2 = v_1 + v_2, u_3 = v_1 + v_2 + v_3$ také tvoří bázi \mathbf{V} .
9. Najděte souřadnice vektoru v v bázi α vektorového prostoru \mathbf{V} .
- (a) $v = (2, 1, 1), \alpha = ((2, 7, 3), (3, 9, 4), (1, 5, 3)), \mathbf{V} = \mathbf{R}^3$
- (b) $v = (2, 1, 1), \alpha = ((1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 1)), \mathbf{V} = \mathbf{R}^3$
- (c) $v = (0, 0, 2, 7), \alpha = ((4, 2, -1, -6), (3, 1, 1, -2), (1, 2, 1, 1), (2, 3, 1, 0)), \mathbf{V} = \mathbf{R}^4$
- (d) $v = (1, 1, 1, 1), \alpha = ((0, 0, 0, -5), (1, 2, 3, 1), (1, 0, -1, 0), (0, 1, 1, 0)), \mathbf{V} = \mathbf{R}^4$
- (e) $v = 4 - 4x - 2x^3, \alpha = (1 - x^2, 1 + x, 1 - x), \mathbf{V} = \mathbf{R}_2[x]$
- (f) $v = x^3 + x^2 + x + 1, \alpha = (1 + x^3, x + x^3, x^2 + x^3, x^3), \mathbf{V} = \mathbf{R}_3[x]$
- (g) $v = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathbf{V} = \text{Mat}_2(\mathbf{R})$.
- (h) $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right\}, \mathbf{V} = \text{Mat}_{2,3}(\mathbf{R})$.
10. Souřadnice vektoru u v bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ jsou $(a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Jaké jsou jeho souřadnice v bázi $\beta = (u_1 + u_4, u_2 + u_3, u_3, u_4)$? Zdůvodněte.
11. Nechť $P_1 = [M_1], P_2 = [M_2]$ ve vektorovém prostoru \mathbf{R}^3 , resp. \mathbf{R}^4 . Najděte nějakou bázi a určete dimenzi podprostorů $P_1 + P_2, P_1 \cap P_2$.
- (a) $M_1 = \{(1, 2, -1), (-1, 0, 2), (2, -1, 0), (1, 1, 1)\}$
 $M_2 = \{(0, 2, 1), (1, 4, 0)\}$
- (b) $M_1 = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (-1, 0, 1)\}$
 $M_2 = \{(2, 0, 3), (3, 1, 5), (1, 3, 3)\}$
- (c) $M_1 = \{(1, -1, 0, 1), (1, 2, 0, 3), (3, 0, 0, 5)\}$
 $M_2 = \{(0, -1, 1, 4), (0, 2, 3, 2), (0, 0, 1, 2)\}$

$$(d) \quad M_1 = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, -1), (1, -1, 1, -1)\}$$

$$M_2 = \{(1, -1, -1, 1), (1, -1, 0, 0), (3, -1, 1, 1)\}$$

12. Ve vektorovém prostoru \mathbf{R}^4 najděte průnik podprostorů V_1 a V_2 , kde $V_1 = [(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)]$, $V_2 = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0)]$.
 Spočtete průnik součtu $V_1 + V_2$ s podprostorem generovaným vektorem $v = (1, -2, 3, -4)$.
13. V prostoru polynomů $\mathbf{R}_6[x]$ uvažte podprostory $V_1 = [x^2 + 2x^3, -x^3 + x^6]$, $V_2 = [2 + x^2, -1 + x^6, x^2 + x^3 + 2x^4]$, $V_3 = [x^2 + x^6, 1 + 3x^3 + x^5, x^3]$. Spočtete jejich součet a průnik.
14. Nechť V je reálný vektorový prostor, $v_1, \dots, v_n \in V$. Označme

$$S = \{(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n; c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0\}.$$

Dokažte následující tvrzení:

- (a) S je lineární podprostor vektorového prostoru \mathbf{R}^n .
- (b) Vektory v_1, \dots, v_n jsou lineárně nezávislé, právě když $\dim S = 0$.

8. LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Nechť \mathbf{U} , \mathbf{V} jsou vektorové prostory nad tímtéž polem \mathbf{K} . Zobrazení $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$ se nazývá lineární, jestliže f zachovává operace vektorového součtu a skalárního násobku, tj.

$$(1) \forall x, y \in \mathbf{U} : f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$(2) \forall a \in \mathbf{K}, \forall x \in \mathbf{U} : f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$$

Jestliže $\mathbf{U} = \mathbf{V}$, lineární zobrazení $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$ se nazývá endomorfismus vektorového prostoru \mathbf{U} .

Nechť \mathbf{U} , \mathbf{V} jsou vektorové prostory, $\{u_1, \dots, u_n\}$ je báze \mathbf{U} a v_1, \dots, v_n jsou vektory ve \mathbf{V} . Potom existuje jediné lineární zobrazení $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$ takové, že $f(u_i) = v_i, i = 1, 2, \dots, n$. Zobrazení f je dané předpisem

$$f(a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n) = a_1f(u_1) + a_2f(u_2) + \dots + a_nf(u_n) = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

Nechť $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$ je lineární zobrazení. Podmnožina

$$\text{Ker } f = \{x \in \mathbf{U}; f(x) = 0\}$$

vektorového prostoru \mathbf{U} se nazývá jádro, podmnožina

$$\text{Im } f = \{y \in \mathbf{V}; y = f(x), x \in \mathbf{U}\}$$

se nazývá obraz lineárního zobrazení f .

Množina $\text{Ker } f$ je podprostor vektorového prostoru \mathbf{U} , množina $\text{Im } f$ je podprostor vektorového prostoru \mathbf{V} .

Lineární zobrazení $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$ je isomorfismus právě tehdy, když $\text{Ker } f = \{0\}$, $\text{Im } f = \mathbf{V}$.

Příklad: Zjistěte, zda je zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ lineární. Jestliže je, najděte $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$.

$$(a) f(x) = (1 + x_1, x_2),$$

$$(b) f(x) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3),$$

$$(c) f(x) = (1, 2),$$

$$(d) f(x) = (x_1^2, -2x_2).$$

Řešení: V případech (a) a (c) není obrazem nulového vektoru nulový vektor, zobrazení f tedy není lineární. Ukážeme, že f není lineární ani v případě (d). Nechť $a = -1, x = (1, 0, 0)$. Potom

$$f(ax) = f(-1, 0, 0) = (1, 0) \neq (-1, 0) = (-1)f(1, 0, 0) = af(x)$$

a první z podmínek lineárního zobrazení není splněna.

Zobrazení f je v případě (b) lineární, protože pro libovolné $x, y \in \mathbf{R}^3$ a pro libovolné $a, b \in \mathbf{R}$ platí:

$$\begin{aligned} f(ax + by) &= f(ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, ax_3 + by_3) = \\ &= (ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2, ax_1 + by_1 - (ax_3 + by_3)) = \\ &= (ax_1 + ax_2, ax_1 - ax_3) + (by_1 + by_2, by_1 - by_3) = \\ &= af(x) + bf(y) \end{aligned}$$

Určíme $\text{Ker}f$: Nechť $f(x) = 0$. Potom $x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_3 = 0$, úpravou dostáváme $x_2 = -x_1, x_3 = x_1$. Zvolíme-li $x_1 = t$, pak

$$\text{Ker}f = \{(t, -t, t); t \in \mathbf{R}\}$$

Určíme $\text{Im}f$: Obrazy vektorů standardní báze ε_3 ve zobrazení f jsou vektory $(1, 1), (1, 0), (0, -1)$. Podprostor $\text{Im}f$ je lineárním obalem těchto vektorů, tj.

$$\text{Im}f = [(1, 1), (1, 0), (0, -1)] = [(1, 0), (0, 1)] = \mathbf{R}^2$$

Příklad: Ukažte, že násobení maticí $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbf{K})$ je lineární zobrazení.

Řešení: Nechť $f(x) = Ax$. Aby f bylo lineární, musí splňovat oba axiomy uvedené na začátku této kapitoly. Protože

$$(1) \quad \forall x, y \in \mathbf{K}^n : f(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = f(x) + f(y),$$

$$(2) \quad \forall a \in \mathbf{K}, \forall x \in \mathbf{K}^n : f(ax) = A(ax) = aAx = af(x),$$

oba axiomy jsou splněny a tedy zobrazení f je lineární. Znamená to, že pro libovolnou matici $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbf{K})$ je přiřazením $x \mapsto Ax$ definováno lineární zobrazení mezi vektorovými prostory $\mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^m$.

Příklad: Je dáno lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4, f(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, -x_1 - x_2 - x_3 - x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4, -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4)$. Určete $\text{Ker}f, \text{Im}f$ a najděte nějakou bázi $\text{Ker}f$ a $\text{Im}f$.

První řešení: Lineární zobrazení f zapíšeme jako násobení maticí:

$$f(x) = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Určíme jádro: Protože $\text{Ker}f = \{u \in \mathbf{R}^4 : f(u) = Au = 0\}$, řešíme vlastně homogenní soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ze schodovitého tvaru dostáváme: $x_1 = s, x_2 = t, x_3 = -s, x_4 = -t, s, t \in \mathbf{R}$. Tedy $\text{Ker}f = \{s(1, 0, -1, 0) + t(0, 1, 0, -1), s, t \in \mathbf{R}\}, \alpha_{\text{Ker}f} = \{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)\}$.

Nyní určíme obraz: Protože $\text{Im}f = \{f(u) : u \in \mathbf{R}^4\}$, tvoří $\text{Im}f$ obrazy vektorů standardní báze, přesněji jejich lineárně nezávislá podmnožina. Tzn. $\text{Im}f = \{f(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4), a_i \in \mathbf{R}\} = \{a_1f(e_1) + a_2f(e_2) + a_3f(e_3) + a_4f(e_4), a_i \in \mathbf{R}\} =$

$[f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)] = [s_1(A), s_2(A), s_3(A), s_4(A)]$, kde $s_i(A)$ značí i -tý sloupec matice A . Tedy bázi obrazu tvoří lineárně nezávislé sloupce matice A .

$\text{Im}f = \{a_1f(e_1) + a_2f(e_2), a_1, a_2 \in \mathbf{R}\} = \{a_1(1, -1, 1, -2) + a_2(1, -1, -1, 2), a_1, a_2 \in \mathbf{R}\}$, $\alpha_{\text{Im}f} = \{(1, -1, 1, -2), (1, -1, -1, 2)\}$

Druhé řešení: Při řešení využijeme EŘO. Vytvoříme blokovou matici typu 4×8 tak, že do levého bloku zapíšeme souřadnice vektorů standardní báze ε_4 v \mathbf{R}^4 , do pravého bloku zapíšeme souřadnice jejich obrazů ve zobrazení f . Protože f je lineární zobrazení, tato vlastnost zůstane zachována i po vykonání libovolné EŘO.

Jestliže matici upravíme pomocí EŘO tak, aby byl pravý blok ve schodovitém tvaru, pak nenulové řádky pravého bloku budou souřadnice vektorů nějaké báze podprostoru $\text{Im}f \subset \mathbf{R}^4$, řádky levého bloku, které odpovídají nulovým řádkům pravého bloku, budou souřadnice vektorů nějaké báze podprostoru $\text{Ker}f \subset \mathbf{R}^4$.

Tedy

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

a z upravené matice dostáváme:

$$\alpha_{\text{Ker}f} = \{(-1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$$

$$\alpha_{\text{Im}f} = \{(1, -1, 1, -2), (0, 0, -2, 4)\}$$

$$\text{Ker}f = \{a(-1, 0, 1, 0) + b(0, -1, 0, 1); a, b \in \mathbf{R}\}$$

$$\text{Im}f = \{a(1, -1, 1, -2) + b(0, 0, -2, 4); a, b \in \mathbf{R}\}$$

Příklad: Najděte předpis nějakého lineárního zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tak, aby $\text{Ker}f = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$, $\text{Im}f = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$.

Řešení: Doplníme bázi $\alpha_{\text{Ker}f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ vektorem $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ na bázi β prostoru \mathbf{R}^3 .

Definujme f -obrazy vektorů báze β tak, aby byly splněny podmínky úlohy:

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tímto je zobrazení f jednoznačně určeno. Zobrazení f zapíšeme pomocí násobení maticí, tj. ve tvaru $f(x) = Ax$. Protože

$$Ax = f(x_1, x_2, x_3) = x_1f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

potřebujeme pro nalezení matice A ještě určit $f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Platí:

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Proto

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vzhledem k tomu, že

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ 0 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

platí

$$f(x) = (x_2 - x_3, 0, x_2 - x_3)$$

Cvičení:

- Nechť \mathbf{V} je vektorový prostor, $v \in \mathbf{V}$ je pevně zvolený vektor. Zjistěte, zda zobrazení $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ je lineární, jestliže
 - $f(x) = x + v$,
 - $f(x) = v$.
- Zjistěte, zda je zobrazení $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ lineární. Pokud ano, najděte $\text{Ker}f$, $\text{Im}f$ a zapište je pomocí násobení maticí. Zjistěte, zda je f isomorfismus.
 - $f(x, y) = (x, y^2)$
 - $f(x, y) = (2x + 3y, x - y)$
 - $f(x, y) = (x, 1 - y)$
 - $f(x, y, z) = ((x + y)^2, x - y, x + y + z)$
 - $f(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x - y + z, 3y - z)$
- Zjistěte, zda je zobrazení $A : \mathbf{R}_m[x] \rightarrow \mathbf{R}_n[x]$ lineární. Pokud ano, určete $\text{Ker}f$, $\text{Im}f$.
 - $m = n = 2$, $(Af)(x) = f(-x)$,
 - $m = n = 2$, $(Af)(x) = xf'(x)$,
 - $m = 4$, $n = 2$, $(Af)(x) = f'''(x) - 2f''(x)$,

(d) $m = 4, n = 2, (Af)(x) = f''(x) + x^2$.

4. Následující zobrazení napište pomocí násobení maticí, tj. ve tvaru $f(x) = Ax$.

(a) identické zobrazení $\text{id} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$,

(b) kolmá projekce do osy generované vektorem $(1, 0, 0)$ v prostoru \mathbf{R}^3 ,

(c) kolmá projekce do roviny generované vektory $(0, 1, 0), (0, 0, 1)$ v prostoru \mathbf{R}^3 ,

(d) násobení pevně zvoleným skalárem $a \in \mathbf{R}$ v prostoru \mathbf{R}^3 ,

(e) překlopení podle roviny xz v prostoru \mathbf{R}^3 ; najděte obraz vektoru $(2, -5, 3)$ v zobrazení f ,

(f) otočení o úhel -60° v prostoru \mathbf{R}^3 ; najděte obraz vektoru $(3, -4)$ v zobrazení f ,

(g) otočení o úhel 30° kolem osy x ; najděte obraz vektoru $(-2, 1, 2)$ v zobrazení f .

5. Nechť násobení vektoru x maticí A reprezentuje otočení v rovině xy o úhel ψ . Jaký bude výsledek násobení vektoru x maticí A^T ?

6. Zjistěte, zda je lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, f(x) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$ isomorfismus. Pokud ano, najděte předpis pro inverzní isomorfismus.

7. Určete dimenzi obrazu a jádra zobrazení, které je definováno jako násobení maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ v } \text{Mat}_2(\mathbf{R})$$

(a) zprava,

(b) zleva.

8. Nechť $f : \text{Mat}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \text{Mat}_2(\mathbf{R})$ je lineární zobrazení definované předpisem

$$f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zjistěte $\dim \text{Ker } f$ a $\dim \text{Im } f$.

9. Nechť $\alpha = (v_1, v_2)$, kde $v_1 = (-2, 1), v_2 = (1, 3)$, je báze \mathbf{R}^2 a $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ je lineární zobrazení takové, že $f(v_1) = (-1, 2, 0), f(v_2) = (0, -3, 5)$. Najděte předpis pro $f(x_1, x_2)$ a určete $f(2, -3)$.

10. Lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ zobrazuje vektor u_i na vektor $v_i, i = 1, 2, 3$. Najděte matici tohoto zobrazení ve standardních bázích a určete jeho předpis, jestliže

$$u_1 = (-2, 3, -5), u_2 = (0, 1, 3), u_3 = (2, 0, 0),$$

$$v_1 = (-1, 1, 1), v_2 = (1, 1, -1), v_3 = (-2, 1, 2).$$

11. Lineární zobrazení $f : \text{Mat}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ zobrazuje matici A_i na číslo $c_i, i = 1, 2, 3, 4$. Určete $\text{Ker } f, \text{Im } f$ a najděte předpis zobrazení f , jestliže

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 3, c_4 = 0.$$

12. Jsou dány vektory $u = (1, 2, -3)$, $v = (2, 1, -2)$, $w = (1, -4, 5)$ z \mathbf{R}^3 . Zjistěte, zda existuje lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ takové, že
- $f(u) = (1, 2)$, $f(v) = (2, 3)$, $f(w) = (1, 3)$,
 - $f(u) = (-2, 1)$, $f(v) = (1, 1)$, $f(w) = (8, -1)$.
13. Určete jádro a obraz lineárního zobrazení $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4, x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$. Najděte nějakou bázi $\text{Ker} f$ a $\text{Im} f$.
14. Určete předpis lineárního zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$, pro které platí $f(1, 0, 1) = (1, 0, 1, 0)$, $f(1, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$, $f(0, 1, 1) = (0, 1, 0, 1)$.
15. Najděte dimenzi a bázi obrazu průniku podprostorů V_1 a $V_2 \subset \mathbf{R}^4$ při zobrazení $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^5$. Přitom $f(x, y, z, w) = (x + 2y + 3z + w, 2x - 3y - z - 12w, -x + y + 5w, -y - z - 2w, 2x - 3y - z - 12w)$, $V_1 = [(2, -1, -1, 1), (-2, 3, 1, -1)]$, $V_2 = [(0, 2, 0, 0), (1, 1, 1, 1)]$. Dále zjistěte dimenzi vzoru podprostoru $W \subset \mathbf{R}^5$ generovaného vektorem $(1, 1, 1, 1, 1)$.
16. Nechť $\beta = (v_1, v_2)$, kde $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (-1, 4)$, je báze \mathbf{R}^2 a $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ je matice lineárního zobrazení $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ v bázi β .
- Najděte $(f(v_1))_\beta, (f(v_2))_\beta$,
 - najděte $f(v_1), f(v_2)$,
 - určete předpis pro $f(x_1, x_2)$,
 - vypočtěte $f(1, 1)$.

9. MATICE LINEÁRNÍHO ZOBRAZENÍ, MATICE PŘECHODU

Nechť $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$ je lineární zobrazení, $\alpha = (u_1, \dots, u_n), \beta = (v_1, \dots, v_k)$ jsou uspořádané báze vektorových prostorů \mathbf{U}, \mathbf{V} . Nechť

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^k a_{ij} v_i \quad (2)$$

$j = 1, \dots, n$. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

se nazývá matice lineárního zobrazení $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$ v bázích α, β a značí se $(f)_{\beta, \alpha}$. Všimněte si, že j -tý sloupec matice $(f)_{\beta, \alpha}$ je $(f(u_j))_{\beta}$, tj. sloupec souřadnic vektoru $f(u_j)$ v bázi β . Definiční vztah (2) můžeme přepsat ekvivalentně takto:

$$(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) = (v_1, v_2, \dots, v_k)(f)_{\beta, \alpha} \quad (3)$$

Jestliže $x \in \mathbf{U}$, potom

$$(f(x))_{\beta} = (f)_{\beta, \alpha}(x)_{\alpha}$$

tj. souřadnice vektoru $f(x)$ v bázi β dostáváme vynásobením matice $(f)_{\beta, \alpha}$ zprava sloupcem souřadnic vektoru x v bázi α .

Nechť $\alpha = (u_1, \dots, u_n), \beta = (v_1, \dots, v_n)$ jsou dvě báze vektorového prostoru \mathbf{V} nad polem \mathbf{K} . Potom existuje matice $A = (a_{ij})$ taková, že

$$u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \quad (4)$$

kde $j = 1, \dots, n$. Matice A se nazývá matice přechodu od báze α k bázi β , nebo také matice záměny báze α bází β . Protože A je matice identického zobrazení $\text{id} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ v bázích α, β , značí se $(\text{id}_{\mathbf{V}})_{\beta, \alpha}$. Definiční rovnost (4) můžeme přepsat takto:

$$(u_1, \dots, u_n) = (v_1, \dots, v_n)(\text{id}_{\mathbf{V}})_{\beta, \alpha} \quad (5)$$

Tento vztah hraje důležitou roli při výpočtu matice přechodu.

Matice $(\text{id}_{\mathbf{V}})_{\beta, \alpha}, (\text{id}_{\mathbf{V}})_{\alpha, \beta}$ jsou navzájem inverzní, tj. platí

$$(\text{id}_{\mathbf{V}})_{\beta, \alpha}(\text{id}_{\mathbf{V}})_{\alpha, \beta} = (\text{id}_{\mathbf{V}})_{\alpha, \beta}(\text{id}_{\mathbf{V}})_{\beta, \alpha} = E$$

Souřadnice libovolného vektoru $x \in \mathbf{V}$ v bázích α, β jsou dány vztahy

$$(x)_{\beta} = (\text{id}_{\mathbf{V}})_{\beta, \alpha}(x)_{\alpha}, \quad (x)_{\alpha} = (\text{id}_{\mathbf{V}})_{\alpha, \beta}(x)_{\beta}$$

Nechť $f : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ je lineární zobrazení, α_1, β_1 jsou dvě báze \mathbf{V}_1 , α_2, β_2 jsou dvě báze \mathbf{V}_2 . Potom mezi maticemi $(f)_{\alpha_2, \alpha_1}$ a $(f)_{\beta_2, \beta_1}$ je vztah

$$(f)_{\beta_2, \beta_1} = (\text{id}_{\mathbf{V}_2})_{\beta_2, \alpha_2} (f)_{\alpha_2, \alpha_1} (\text{id}_{\mathbf{V}_1})_{\alpha_1, \beta_1}$$

$$(f)_{\alpha_2, \alpha_1} = (\text{id}_{\mathbf{V}_2})_{\alpha_2, \beta_2} (f)_{\beta_2, \beta_1} (\text{id}_{\mathbf{V}_1})_{\beta_1, \alpha_1}$$

Pokud $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}$, dostáváme

$$(f)_{\beta, \beta} = (\text{id}_{\mathbf{V}})_{\beta, \alpha} (f)_{\alpha, \alpha} ((\text{id}_{\mathbf{V}})_{\beta, \alpha})^{-1}$$

$$(f)_{\alpha, \alpha} = (\text{id}_{\mathbf{V}})_{\alpha, \beta} (f)_{\beta, \beta} ((\text{id}_{\mathbf{V}})_{\alpha, \beta})^{-1}$$

Nechť $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$, $g : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ jsou lineární zobrazení, α, β, γ jsou postupně báze prostorů $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$. Potom složení zobrazení f a g je opět lineární zobrazení a platí

$$(g \circ f)_{\gamma, \alpha} = (g)_{\gamma, \beta} (f)_{\beta, \alpha}$$

Příklad: Určete matici lineárního zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1)$ v bázích α, β , jestliže

(a) $\alpha = \varepsilon_3, \beta = \varepsilon_2$,

(b) $\alpha = ((1, 2, 0), (-2, 10), (3, 1, -1)), \beta = ((2, 1), (0, 2))$.

Najděte obraz vektoru x v lineárním zobrazení f , jestliže $(x)_\alpha = (0, -4, 1)^T$.

Řešení: (a) Určíme obrazy vektorů báze α ve zobrazení f :

$$f(1, 0, 0) = (1, 2), f(0, 1, 0) = (2, 0), f(0, 0, 1) = (-3, 0)$$

Vzhledem k tomu, že $\beta = \varepsilon_2$, platí

$$(f)_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Protože $\alpha = \varepsilon_3$, přímo z předpisu f dostáváme $f(x) = (-11, 0)$.

(b) Postupujeme analogicky jako v (a).

$$f(1, 2, 0) = (5, 2), f(-2, 1, 0) = (0, -4), f(3, 1, -1) = (8, 6)$$

Nyní vyjádříme vypočítané vektory jako lineární kombinaci prvků báze β :

$$(5, 2) = a(2, 1) + b(0, 2) = (2a, a + 2b)$$

Řešením systému

$$\begin{aligned} 2a &= 5 \\ a + 2b &= 2 \end{aligned}$$

dostáváme $a = \frac{5}{2}, b = -\frac{1}{4}$. Analogicky

$$\begin{aligned} (0, -4) &= 0(2, 1) - 2(0, 2) \\ (8, 6) &= 4(2, 1) + 1(0, 2) \end{aligned}$$

Zapsáním koeficientů lineárních kombinací do matice dostáváme

$$(f)_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 4 \\ -\frac{1}{4} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Potom

$$(f(x))_{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 4 \\ -\frac{1}{4} & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

což znamená, že $f(x) = 4(2, 1) + 9(0, 2) = (8, 22)$.

Příklad: V \mathbf{R}^3 jsou dány báze $\alpha = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)), \beta = ((-1, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1))$. Určete matici $(\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\beta, \alpha}$, tj. matici přechodu od báze α k bázi β , a matici $(\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\alpha, \beta}$, tj. matici přechodu od báze β k bázi α . Pomocí těchto matic vypočítejte $(x)_{\beta}, (y)_{\alpha}$, jestliže $(x)_{\alpha} = (-1, 3, 0)^T, (y)_{\beta} = (2, 4, 7)^T$.

Řešení: Nejprve určíme $(\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\beta, \alpha}$. Vyjádříme vektory báze α jako lineární kombinaci vektorů báze β .

$$(1, 0, 0) = a(-1, 1, 0) + b(1, 1, 0) + c(0, 0, 1) = (-a + b, a + b, c)$$

Porovnáním dostáváme

$$-a + b = 0, a + b = 0, c = 0$$

Řešením systému je $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 0$. Analogicky se vypočte, že

$$\begin{aligned} (1, 1, 0) &= 0(-1, 1, 0) + 0(1, 1, 0) + 0(0, 0, 1) \\ (1, 1, 1) &= 0(-1, 1, 0) + 1(1, 1, 0) + 1(0, 0, 1) \end{aligned}$$

Zapsáním koeficientů lineárních kombinací do matice dostáváme

$$(\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

K výpočtu můžeme rovněž použít vztah (5) a vyřešit soustavu

$$A = B(\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\beta, \alpha}$$

kde sloupce matic A a B jsou tvořeny vektory bází α a β . Po úpravě dostáváme

$$(\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\beta,\alpha} = B^{-1}A$$

Matici $(\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\alpha,\beta}$ určíme jako inverzní matici k $(\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\beta,\alpha}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

a proto

$$(\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dále

$$\begin{aligned} (x)_\beta &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ (y)_\alpha &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

tedy $(x)_\beta = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0)^T$, $(y)_\alpha = (-4, -1, 7)^T$.

Příklad: Necht' báze α, β prostoru \mathbf{R}^3 jsou stejné jako v předchozím příkladě.

(a) Necht' $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ je endomorfismus, jehož matice v bázi α je

$$(f)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete jeho matici v bázi β . Určete obrazy vektorů x, y, z v endomorfismu f , jestliže $x = (1, 2, 3)$, $(y)_\alpha = (1, 2, 3)$, $(z)_\beta = (1, 2, 3)$.

(b) Určete matici endomorfismu f ve standardní bázi prostoru \mathbf{R}^3 a najděte jeho předpis.

Řešení: (a) Protože $(f)_{\beta,\beta} = (\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\beta,\alpha}(f)_{\alpha,\alpha}(\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\alpha,\beta}$,

$$(f)_{\beta,\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abychom mohli určit $f(x)$, potřebujeme najít souřadnice vektoru x v bázi α (nebo β).
Necht'

$$(1, 2, 3) = a(1, 0, 0) + b(1, 1, 0) + c(1, 1, 1) = (a + b + c, b + c, c)$$

Porovnáním dostáváme $a = -1, b = -1, c = 3$. Potom

$$(f(x))_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

tedy

$$f(x) = 2(1, 0, 0) - 2(1, 1, 0) + 2(1, 1, 1) = (2, 0, 2)$$

Analogicky

$$(f(y))_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(f(z))_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(y) = 4(1, 0, 0) + 3(1, 1, 0) + 5(1, 1, 1) = (12, 8, 5)$$

$$f(z) = -\frac{1}{2}(-1, 1, 0) + \frac{3}{2}(1, 1, 0) + 3(0, 0, 1) = (2, 1, 3)$$

(b) Určíme matice přechodu $(\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\varepsilon_3, \alpha}, (\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\alpha, \varepsilon_3}$. Přímou dostáváme

$$(\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\varepsilon_3, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matici $(\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\alpha, \varepsilon_3} = ((\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\varepsilon_3, \alpha})^{-1}$ určíme pomocí EŘO:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

tj.

$$(\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\alpha, \varepsilon_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nyní vypočteme $(f)_{\varepsilon_3, \varepsilon_3} = (\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\varepsilon_3, \alpha} (f)_{\alpha, \alpha} (\text{id}_{\mathbf{R}^3})_{\alpha, \varepsilon_3}$.

$$(f)_{\varepsilon_3, \varepsilon_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Protože

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

platí

$$f(x) = (2x_1, x_1 + x_2 - x_3, x_2)$$

Příklad: Nechť $\alpha = ((1, 0, -1, 2, 3), (-2, 1, 4, -3, 1)), \beta = ((0, 1, 2, 1, 7), (-1, 2, 5, 0, 11))$ jsou dvě báze podprostoru P vektorového prostoru \mathbf{R}^5 . Určete matici přechodu

- (a) od báze α k bázi β ,
 (b) od báze β k bázi α .

Řešení: Označme $\alpha = (u_1, u_2), \beta = (v_1, v_2)$.

(a) Vyjádříme vektory u_1, u_2 jako lineární kombinaci vektorů v_1, v_2 :

$$(1, 0, -1, 2, 3) = a(0, 1, 2, 1, 7) + b(-1, 2, 5, 0, 11) = (-b, a + 2b, 2a + 5b, a, 7a + 11b)$$

$$(-2, 1, 4, -3, 1) = c(0, 1, 2, 1, 7) + d(-1, 2, 5, 0, 11) = (-d, c + 2d, 2c + 5d, c, 7c + 11d)$$

Porovnáním dostáváme $a = 2, b = -1, c = -3, d = 2$, tj.

$$(\text{id}_P)_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Matici $(\text{id}_P)_{\alpha, \beta}$ určíme jako inverzní matici k $(\text{id}_P)_{\beta, \alpha}$:

$$(\text{id}_P)_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad: V \mathbf{R}^3 je dána báze $\alpha = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$. Zkonstruuje bázi β tak, aby matice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

byla maticí přechodu

- (a) od báze β k bázi α ,
 (b) od báze α k bázi β .

Řešení: Označme A a B matice, jejichž sloupce tvoří vektory bazí α a β .

(a) Nechť M je maticí přechodu od báze β k bázi α . Pak podle (5) platí $B = AM$, tedy

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Takže $\beta = ((2, 2, 2), (1, 3, 2), (2, 3, 1))$.

(b) Nechť nyní je M maticí přechodu od báze α k bázi β . Pak podle (5) platí $BM = A$, tj. $B = AM^{-1}$. M^{-1} určíme pomocí EŘO a

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tedy $\beta = (\frac{1}{3}(-1, 2, 1), \frac{1}{3}(2, 2, -2), \frac{1}{3}(2, -1, 1))$.

Cvičení:

1. Matice lineárního zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ v bázi $\alpha = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0))$ je

$$(f)_{\alpha, \alpha} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Najděte předpis zobrazení f . Zjistěte, zda je f isomorfismus.

2. Nechť $f : \mathbf{R}_1[x] \rightarrow \mathbf{R}_1[x]$ je lineární zobrazení definované předpisem $f(a + bx) = a + b(x + 1)$ a $\gamma = (6 + 3x, 10 + 2x)$, $\delta = (2, 3 + 2x)$ jsou báze prostoru $\mathbf{R}_1[x]$. Najděte matici zobrazení f

(a) v bázi γ ,

(b) v bázi δ .

3. Určete matici endomorfismu $A : \mathbf{R}_3[x] \rightarrow \mathbf{R}_3[x]$, $A(f) = 3f'' + 4f' + f$, v bázi

(a) $\alpha = (1, x, x^2, x^3)$,

(b) $\beta = (1 + x, 1 - x, x^2 + x^3, x^2 - x^3)$.

Zjistěte, zda je A isomorfismus.

4. Vektor $x \in \mathbf{R}^3$ má v bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ souřadnice $(x)_\alpha = (1, -3, 2)^T$. Určete jeho souřadnice v bázi $\beta = (v_1, v_2, v_3)$, jestliže víme, že

(a) $u_1 = 3v_1 + 2v_2 + v_3, u_2 = v_2 - 2v_3, u_3 = v_1 - v_3$,

(b) $v_1 = u_1 + u_2 + u_3, v_2 = u_2 + u_3, v_3 = u_3$.

5. Lineární zobrazení $A : \mathbf{R}_3[x] \rightarrow \mathbf{R}_3[x]$ je ve standardní bázi ε prostoru $\mathbf{R}_3[x]$ dáno maticí

$$(A)_{\varepsilon, \varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Najděte všechny polynomy $f \in \mathbf{R}_3[x]$ s vlastností $A(f) = 1 - x$.

6. Určete matici lineárního zobrazení $f : \text{Mat}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \text{Mat}_2(\mathbf{R})$, $f(X) = AX$ v bázi β , jestliže $\beta = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Najděte matici lineárního zobrazení $\varphi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ daného pomocí nějaké matice A typu 4×3 předpisem $\varphi((x, y, z)^T) = A(x, y, z)^T$ vzhledem k bázi $\gamma = ((0, 0, 1), (0, 1, 0), (4, 5, 3))$ v \mathbf{R}^3 a $\delta = ((2, 0, 2, 5), (1, 0, 0, 0), (2, -4, -6, 7), (0, 1, 0, 0))$ v \mathbf{R}^4 .
8. Uvažujme zobrazení $f : \mathbf{R}_2[x] \rightarrow \mathbf{R}_2[x]$, $f(ax^2 + bx + c) = (a-b)x^2 + (a-c)x + (b-c)$.
- Dokažte, že f je lineární zobrazení.
 - Najděte všechny polynomy, které leží v jeho jádře.
 - Napište matici zobrazení f ve standardní bázi $\varepsilon = (1, x, x^2)$.
9. Najděte předpis lineárního zobrazení $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, které má v bazích $\alpha = ((1, -1), (1, 1))$, $\beta = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ vektorových prostorů \mathbf{R}^2 a \mathbf{R}^3 matici

$$(f)_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

10. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}_3[x]$ jsou dány báze $\alpha = (1, x, x^2, x^3)$, $\beta = (1+x, 1-x, x^2+x^3, x^2-x^3)$. Najděte matici přechodu
- od báze α k bázi β ,
 - od báze β k bázi α .
11. Nechť α a β jsou báze v \mathbf{R}^3 . Najděte matici přechodu od báze α k bázi β . Pomocí této matice určete souřadnice vektoru $w = (-5, 8, -5)$ v bázi β , jestliže
- $\alpha = ((-3, 0, -3), (-3, 2, -1), (1, 6, -1))$, $\beta = ((-6, -6, 0), (-2, -6, 4), (-2, -3, 7))$,
 - $\alpha = ((2, 1, 1), (2, -1, 1), (1, 2, 1))$, $\beta = ((3, 1, -5), (1, 1, -3), (-1, 0, 2))$.
12. Nechť $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ je lineární zobrazení v bazích $\alpha = ((1, 3), (-2, 4))$ a $\beta = ((1, 1, 1), (2, 2, 0), (3, 0, 0))$ definované předpisem

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Najděte matici přechodu od báze α k bázi β .

13. Najděte lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$, které má v bazích α, β matici

$$(f)_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jestliže

- α, β jsou standardní báze prostorů \mathbf{R}^3 a \mathbf{R}^2 ,
 - $\alpha = ((1, 1, 0), (1, -2, 0), (0, 0, 1))$, $\beta = ((2, -1), (0, 1))$.
14. Matice lineárního zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ v bazích $\alpha = ((1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 1))$, $\beta = ((-1, 2), (1, 1))$ je

$$(f)_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Určete obrazy vektorů $x = (1, -2, 3)$, $y = (-1, 0, 4)$ v endomorfismu f .

15. Ve standardních bazích na \mathbf{R}^3 a \mathbf{R}^5 je dáno zobrazení f maticí A a zobrazení g maticí B .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Odkud kam tato zobrazení jdou? Najděte matice jejich kompozic. Zjistěte, zda jde o isomorfismy.

10. AFINNÍ GEOMETRIE

Afinní podprostor prostoru \mathbf{K}^n je množina $M = P + [u_1, \dots, u_k]$, kde $P \in \mathbf{K}^n$, $u_i \in \mathbf{K}^n$. Každý prvek $x \in M$ můžeme jednoznačně napsat ve tvaru

$$x = P + \sum_{i=1}^k t_i u_i$$

kde $t_1, \dots, t_k \in \mathbf{K}$ jsou parametry. Toto vyjádření se nazývá parametrické vyjádření nebo parametrická rovnice podprostoru M .

Afinní podprostor lze popsat soustavou lineárních rovnic

$$Ax = b$$

kde $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbf{K})$, $b \in \mathbf{K}^m$. Množina řešení této soustavy $\{x; Ax = b\}$ je buď \emptyset nebo afinní podprostor. Toto vyjádření se nazývá obecná rovnice afinního podprostoru.

Zaměřením afinního podprostoru $M \subseteq \mathbf{K}^n$ nazýváme vektorový podprostor

$$\text{Dir } M = [u_1, \dots, u_k]$$

Dimenzí afinního podprostoru $M \subseteq \mathbf{K}^n$, ozn. $\dim M$, nazýváme dimenzi jeho zaměření, tedy

$$\dim M = \dim \text{Dir } M$$

Nechť S, T jsou dva podprostory afinního prostoru \mathbf{V} . Řekneme, že podprostory S a T jsou rovnoběžné, jestliže buďto $\text{Dir } S \subseteq \text{Dir } T$ nebo $\text{Dir } T \subseteq \text{Dir } S$ (rovnoběžné podprostory tedy mohou i splývat). Dále řekneme, že tyto podprostory jsou různoběžné, mají-li alespoň jeden společný bod a přitom nejsou rovnoběžné. Konečně řekneme, že tyto podprostory jsou mimoběžné, jestliže nejsou rovnoběžné a nemají žádný společný bod.

Příklad: Určete parametrické rovnice podprostoru M zadaného rovnicemi

$$\begin{aligned} M : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}$$

Řešení: Soustavu přepíšeme do matice, kterou nejprve pomocí EŘO upravíme na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

Z upravené matice získáme parametrický popis následujícím způsobem: Vedoucí členy řádků se nacházejí v prvním a druhém sloupci, proto si neznámé x_3 a x_4 zvolíme za parametry a neznámé x_1 a x_2 pomocí nich vyjádříme. Zvolíme-li $x_4 = t, x_3 = s$, potom $x_2 = 6 - s + t, x_1 = 3$. Parametrická rovnice pak má tvar

$$\begin{aligned} M : x_1 &= 3 \\ x_2 &= 6 - s + t \\ x_3 &= s \\ x_4 &= t \end{aligned}$$

Příklad: Najděte obecné rovnice afinního podprostoru M vektorového prostoru \mathbf{R}^4 , kde $M : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 2, 2) + t_1(1, -1, 0, 0) + t_2(1, 2, 0, -1)$.

Řešení: Parametrické rovnice $x = P + \alpha t$ přepíšeme do tvaru $Ex = \alpha t + P$, kde $P = (1, 0, 2, 2)$ je bod a $\alpha = ((1, -1, 0, 0), (1, 2, 0, -1))$ vektory, které tvoří afinní podprostor M , a $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ je vektor neznámých a $t = (t_1, t_2)$ vektor parametrů. Soustavu rovnic $Ex = \alpha t + P$ přepíšeme do matice tvaru $(E|\alpha|P)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Matici budeme upravovat pomocí EŘO tak, aby prostřední blok ve výsledné matici byl ve schodovitém tvaru.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right)$$

Obecné rovnice podprostoru M určují koeficienty levého a pravého bloku, a to v řádcích, ve kterých jsou v prostředním bloku samé nuly. Tedy

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Dosazením se přesvědčíme, že bod P této soustavě skutečně vyhovuje.

Příklad: V prostoru \mathbf{R}^4 zjistěte vzájemnou polohu podprostorů

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \pi : 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5, \quad 5x_1 - x_2 + 2x_4 = 3, \\ \rho : x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= -3, \quad 2x_2 - x_3 + x_4 = -2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \rho : x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1, \quad x_1 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ p : (3, -1, 0, 0) + t(-3, 2, 1, 1), \end{aligned}$$

$$(c) \quad \rho : (3, -1, 0, 0) + s(-1, 1, 1, 0) + t(2, 1, 0, 1), \\ p : (3, 1, 0, 0) + r(-1, 2, 1, 1).$$

Řešení: (a) Hledáme společný bod podprostorů π a ρ , tj. bod $R = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, jehož souřadnice splňují rovnice podprostoru π i ρ . Řešíme tedy systém rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= -3 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Pomocí EŘO upravíme jeho rozšířenou matici na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

ze kterého dostáváme $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -1$, což je jediné řešení daného systému. Podprostory π, ρ jsou tedy různoběžné a jejich průsečíkem je bod $R = (1, 0, 1, -1)$.

(b) Bod Q leží na přímce p , pokud $Q = (3 - 3t, -1 + 2t, t, t), t \in \mathbf{R}$. Aby bod Q ležel i v rovině ρ , musí jeho souřadnice splňovat rovnici roviny ρ , tedy musí platit

$$\begin{aligned} 3 - 3t + 2(-1 + 2t) + -t &= 1 \\ 3 - 3t + t + 2t &= 3 \end{aligned}$$

Ekvivalentní úpravou dostaneme rovnici

$$0 \cdot t = 0$$

která je splněna pro každé $t \in \mathbf{R}$. To znamená, že každý bod přímky p je zároveň bodem roviny ρ , tedy přímka p leží v rovině ρ .

(c) Bod Q leží v rovině ρ , pokud $Q = (3 - s + 2t, -1 + s + t, s, t)$, a leží na přímce p , pokud $Q = (3 - r, 1 + 2r, r, r)$. Řešíme tedy nehomogenní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -s + 2t + r &= 3 - 3 \\ s + t + 2r &= 1 + 1 \\ s - r &= 0 \\ t - r &= 0 \end{aligned}$$

Její rozšířenou matici upravíme pomocí EŘO na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Soustava nemá řešení, tzn. že $\rho \cap p = \emptyset$. Vyřešíme-li tuto soustavu jako homogenní, zjistíme, že vektory určující zaměření roviny ρ a přímky p jsou lineárně nezávislé, tedy rovina a přímka jsou mimoběžné.

Příklad: V prostoru \mathbf{R}^3 najděte příčku mimoběžek $p : (1, 2, -1) + s(1, -1, 1)$, $q : (0, 9, -2) + t(1, 0, 0)$ rovnoběžnou s vektorem $(1, 2, 0)$.

Řešení: Protože vektory $(1, -1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$ jsou lineárně nezávislé, taková přímka existuje. Stačí nalézt průsečík přímky q s rovinou $\rho : (1, 2, -1) + s(1, -1, 1) + r(1, 2, 0)$. Abychom tento průsečík našli, musíme řešit rovnici

$$(0, 9, -2) + t(1, 0, 0) = (1, 2, -1) + s(1, -1, 1) + r(1, 2, 0)$$

přičemž nám stačí znát hodnotu parametru t . Rozepsáním do složek dostaneme nehomogenní soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} t - s - r &= 1 \\ s - 2r &= -7 \\ -s &= 1 \end{aligned}$$

Odtud spočítáme $t = 3$ ($s = -1, r = 3$) a bod $(3, 9, -2)$ je průsečíkem přímky q s rovinou ρ . Hledaná příčka je pak $(3, 9, -2) + r(1, 2, 0)$.

Příklad: V prostoru \mathbf{R}^3 najděte příčku mimoběžek $p : P + su = (3, 3, 3) + s(2, 2, 1)$ a $q : Q + tv = (0, 5, -1) + t(1, 1, 1)$, která prochází bodem $A = (4, 5, 3)$.

Řešení: Snadno zjistíme, že jak vektory $(1, 2, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(1, 1, 1)$ (kde $(1, 2, 0) = A - P$), tak vektory $(4, 0, 4)$, $(2, 2, 1)$, $(1, 1, 1)$ (kde $(4, 0, 4) = A - Q$) jsou lineárně nezávislé, takže příčka existuje. Potřebujeme najít průsečík přímky q s rovinou $\rho : (4, 5, 3) + r(1, 2, 0) + s(2, 2, 1)$. Pro hledaný průsečík tak dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} t - r - 2s &= 4 \\ t - 2r - 2s &= 0 \\ t - s &= 4 \end{aligned}$$

odkud $t = 0$. Průsečík přímky q s rovinou ρ je $R = (0, 5, -1)$ a hledaná příčka je $(0, 5, -1) + a(4, 0, 4) = (0, 5, -1) + a(1, 0, 1)$.

Příklad: V prostoru \mathbf{R}^4 uvažujme roviny $\rho : x_1 + x_2 = 3, x_3 + x_4 = 4$ a $\sigma : x_1 + x_3 = 1, x_2 - x_4 = 3$ a bod $M = (2, -2, 3, -3)$. Najděte přímku q , která prochází bodem M , protíná rovinu σ a je rovnoběžná s rovinou ρ .

Řešení: Nechť τ je rovina procházející bodem M a je rovnoběžná s rovinou ρ . Pak souřadnice bodu M splňují její rovnici, kterou získáme dosazením souřadnic bodu M do rovnice

roviny ρ a dopočítáním příslušných koeficientů.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= c \\x_3 + x_4 &= d\end{aligned}$$

dosazením souřadnic bodu M dostáváme

$$\begin{aligned}2 - 2 &= 0 \\3 - 3 &= 0\end{aligned}$$

tedy $c = d = 0$ a

$$\begin{aligned}\tau : x_1 + x_2 &= 0 \\x_3 + x_4 &= 0\end{aligned}$$

Bod P tvořící druhý bod přímky q je průsečíkem rovin σ a τ . Řešíme systém rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &= 1 \\x_2 - x_4 &= 3 \\x_1 + x_2 &= 0 \\x_3 + x_4 &= 0\end{aligned}$$

jehož matici převedeme pomocí EŘO na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{array} \right)$$

ze kterého dostáváme $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = -2$. Tedy $P = (-1, 1, 2, -2)$ a přímka q má rovnici

$$q : M + t(P - M) = (2, -2, 3, -3) + t(-3, 3, -1, 1)$$

Příklad: Najděte průnik afinních podprostorů $Q_1 : (3, 0, -3, 3) + a(1, 0, -1, 0) + b(0, 2, 0, 1)$, $Q_2 : (4, -2, -4, 2) + s(0, 0, 1, -1) + t(1, 2, 0, 0)$.

Řešení: Necht' $X \in Q_1 \cap Q_2$. Pak platí

$$X = A + au_1 + bu_2 = B + sv_1 + tv_2$$

tedy

$$au_1 + bu_2 - sv_1 - tv_2 = B - A$$

Soustavu přepíšeme do matice a upravíme na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

odkud $a = p, b = p, s = p, t = -p$. Tedy

$$X = B - pv_1 + pv_2 = B + p(v_2 - v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podobně pomocí vektorů u_1, u_2 dostaneme

$$X = A + pu_1 + pu_2 = A + p(u_1 + u_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení:

1. Napište parametrické rovnice roviny, jestliže jsou zadány její

- (a) tři body $A = (-1, 1, 0)$, $B = (2, 1, 6)$, $C = (3, 0, 4)$,
- (b) dva body $A = (1, 2, -3)$, $B = (0, 2, 1)$ a směrový vektor $u = (2, 1, -1)$,
- (c) bod $A = (3, 1, -2)$ a dva lineárně nezávislé směrové vektory $u = (-1, 2, 1)$, $v = (3, -4, 2)$.

2. Najděte obecnou rovnici roviny určené

- (a) třemi body $A = (1, -1, 1)$, $B = (2, 1, -3)$, $C = (1, 4, 2)$,
- (b) dvěma body $A = (4, 1, 2)$, $B = (2, -2, 3)$ a směrovým vektorem $u = (3, -2, 1)$,
- (c) bodem $A = (3, 3, 3)$ a směrovými vektory $u = (1, -1, 1)$, $v = (-1, 1, 1)$.

3. Zjistěte, které z bodů $A = (1, 2, -1)$, $B = (1, 2, 2)$, $C = (3, 1, 2)$, $D = (-4, 2, 0)$ leží v rovině

- (a) $(x, y, z) = (6, 2, -2) + t(5, 0, -1) + s(1, 1, 0)$,
- (b) $x = 1 + 2t$, $x = 3 - 2t + s$, $z = 4 - 2t + 2s$,
- (c) $x + 17y + 5z - 30 = 0$.

4. Najděte parametrické vyjádření přímky v \mathbf{R}^3 zadané $p : \begin{cases} 2x - y + z - 9 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$. Jak vypadají rovnice všech rovin procházejících danou přímkou p (tzv. svazek rovin)?

5. Najděte parametrické vyjádření podprostoru v \mathbf{R}^4 zadaného obecnými rovnicemi.
- (a) $x_1 + x_2 - 2x_4 = 6$, $x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 11$, $x_1 + x_2 - x_4 = 8$,
 (b) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$, $x_2 + x_3 + x_4 = 5$, $2x_1 + 4x_2 - x_3 = 11$.
6. Určete vzájemnou polohu přímek v prostoru \mathbf{R}^2 , resp. \mathbf{R}^3 ; v případě, že jsou různoběžné, najděte jejich průsečík.
- (a) $p : 3x + 4y - 20 = 0$, $q : x = 4 - 8t, y = 2 + 6t$,
 (b) $p : (x, y) = (2, -9) + t(1, -1)$, $q : (x, y) = (1, -1) + t(5, 2)$,
 (c) $p : x = 3 - 6t, y = -1 + 4t, z = t$, $q : x = -2 + 3t, y = 4, z = 3 - t$,
 (d) $p : \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ 3x + y - z + 13 = 0 \end{cases}$, $q : \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$,
7. Určete vzájemnou polohu rovin v \mathbf{R}^3 ; v případě, že jsou různoběžné, napište parametrické rovnice jejich průsečíku.
- (a) $\rho : x + y + 2z - 3 = 0$, $\sigma : x - y + z - 1 = 0$,
 (b) $\rho : (x, y, z) = (-1, 3, -2) + t(0, 1, 1) + s(1, -1, -2)$, $\sigma : x - y + z + 6 = 0$.
8. V prostoru \mathbf{R}^3 , resp. \mathbf{R}^4 , zjistěte vzájemnou polohu přímky a roviny; v případě různoběžnosti určete jejich průsečík.
- (a) $p : x = 2 + 4t, y = -1 + t, z = 2 - t$, $\sigma : 4x + y - z + 13 = 0$,
 (b) $p : \begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0 \\ x - 2y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$, $\sigma : 4x - 5y - z + 8 = 0$,
 (c) $p : x_1 + x_2 = 0, x_2 + x_3 = 0, x_3 + x_4 = 0$,
 $\rho : (0, 3, 0, 1) + s(1, 0, -1, 0) + t(1, 2, -2, 0)$,
 (d) $p : x_1 + x_2 = 0, x_2 + x_3 = 0, x_3 + x_4 = 3$,
 $\rho : (1, -1, 1, 2) + s(-1, 1, 0, 0) + t(0, 0, -2, 2)$,
 (e) $p : (4, -2, 3, -1) + t(1, -1, 1, -1)$, $\rho : x_1 + x_3 + x_4 = 4, x_1 + x_2 + x_3 = 3$.
9. V prostoru \mathbf{R}^4 zjistěte vzájemnou polohu
- (a) roviny $(1, 0, 2, 2) + r(1, -1, 0, 0) + s(1, 2, 0, -1)$
 a přímky $(0, 0, -6, 5) + t(1, 2, -3, 0)$,
 (b) nadroviny $(2, 1, 1, 1) + r(1, 1, 1, 1) + s(1, 1, 1, -1) + t(1, 1, -1, -1)$
 a přímky $(3, 2, 0, -2) + u(1, 1, -1, 1)$,
 (c) rovin $(2, 3, 1, 3) + s(-1, 1, 0, 2) + (0, 2, -3, 2)$,
 $(-1, 0, 2, 1) + u(2, 4, -9, 2) + v(1, 1, 1, 1)$

10. V prostoru \mathbf{R}^4

- (a) určete parametry a, b tak, aby přímka $(1, 2, 1, 2) + r(1, a, 0, 2)$ ležela v rovině $(1, 1, 2, b) + s(1, 2, 1, 2) + t(1, 1, 2, 2)$,
- (b) v závislosti na parametru a určete vzájemnou polohu rovin $(3, -1, -1, 6) + s(-2, 1, -2, 1) + t(4, -1, -1, 0)$, $(4, 1, 3, a) + u(0, -2, 0, 1) + v(2, 2, -1, -1)$.

11. V prostoru \mathbf{R}^5 určete vzájemnou polohu podprostorů:

- (a) $(1, 1, 1, 1, 1) + r(2, -8, 3, -5, -9)$,
 $(1, 1, 2, -1, 3) + s(1, -1, 0, 2, 3) + t(0, 2, -1, 3, 5)$,
- (b) $(-2, 10, -1, 2, -1) + r(2, -8, 3, -5, 1)$,
 $(1, 1, 2, -1, 3) + s(1, -1, 0, 2, 3) + t(0, 2, -1, 3, 5)$.

12. V prostoru \mathbf{R}^3 najděte příčku mimoběžek

- (a) $(x, y, z) = (1, -1, 2) + t(1, -1, 3)$, $(x, y, z) = (3, -1, 1) + t(2, 1, 4)$, která prochází bodem $M = (3, -2, 13)$.
- (b) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-2}$, $(x, y, z) = (2, 0, 1) + t(1, -1, 1)$ rovnoběžnou s přímkou $x - y + z + 11 = 0$, $x - 3y - z - 6 = 0$.
- (c) $x - 2 = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{2}$, $x - 3 = y = \frac{z+58}{3}$, která je rovnoběžná s průsečnicí rovin $2x - z - 15 = 0$, $x - y + 324 = 0$.
- (d) $(1, 3, 4) + t(1, 0, 2)$ a $2x - z + 2 = 0$, $y - 3 = 0$, která prochází bodem $(13, 17, 29)$.

13. V prostoru \mathbf{R}^3 napište parametrické rovnice přímky, která prochází bodem $A = (3, -2, -4)$ rovnoběžně s rovinou $\rho : 3x - 2y - 3z - 7 = 0$ a protíná přímku $p : 2x + 3y + 8 = 0$, $y + z + 3 = 0$.14. V prostoru \mathbf{R}^3 určete přímku q , která prochází bodem $M = (3, 2, 1)$, protíná přímku $p : x_1 - x_2 = 1$, $x_1 + x_3 = 6$ a je rovnoběžná s rovinou $\rho : 2x_1 + x_2 + x_3 = 5$.15. V prostoru \mathbf{R}^4 určete přímku q , která

- (a) prochází bodem $M = (8, 9, -11, -15)$ a protíná přímky $p : (1, 0, -2, 1) + s(1, 2, -1, -5)$, $r : (0, 1, 1, -1) + t(2, 3, -2, -4)$,
- (b) prochází bodem $M = (1, 2, -1, -2)$, protíná rovinu $\sigma : x_1 + x_2 = 1$, $x_3 - x_4 = 3$ a je rovnoběžná s rovinou $\rho : x_1 + x_3 = -5$, $x_2 + x_4 = 3$,
- (c) prochází bodem $M = (1, 0, 3, 1)$, protíná přímku $p : (7, 0, 0, 0) + t(0, 1, 0, 1)$ a je rovnoběžná s nadrovinou $\rho : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

16. V prostoru \mathbf{R}^5 určete přímku q , která prochází bodem $M = (5, 3, 4, 6, 2)$ a protíná roviny $\rho : (3, 1, 0, 4, 0) + a(0, 1, 0, 0, 0) + b(0, 0, 1, 0, 1)$ a $\pi : (0, 1, -2, 1, 0) + c(1, 0, 0, 0, 0) + d(0, 0, 0, 1, 0)$.17. Najděte příčku mimoběžek $p : (1, 5, 2, -1) + t(1, 2, 1, 0)$, $q : (0, -1, 1, 1) + t(3, 1, 0, 1)$ procházející bodem $M = (0, 1, -5, -3)$.

18. Najděte parametrickou a implicitní rovnici nadroviny σ v \mathbf{R}^4 určenou body $B_1 = (-1, 0, -1, 0)$, $B_2 = (0, 2, 0, 1)$, $B_3 = (0, -2, 2, 0)$, $B_4 = (1, 0, 0, -1)$. Určete její zaměření.
19. V \mathbf{R}^4 najděte obecné rovnice afinního podprostoru
- (a) $M : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 0, 0) + s(1, -1, 1, 0) + t(3, -2, 0, 1)$,
- (b) $M : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 3, 1, 3) + s(1, 1, -2, -2) + t(1, 5, -4, 0)$.
20. Najděte průnik afinních podprostorů
- (a) $P_1 : (2, 3, 1, 3) + a(-1, 1, 0, 2) + b(0, 2, -3, 2)$,
 $P_2 : (-1, 0, 2, 1) + s(2, 4, -9, 2) + t(1, 1, 1, 1)$,
- (b) $P_1 : (-9, 2, 1, -5) + a(5, -1, 0, 2) + b(3, 1, 2, 0)$,
 $P_2 : (1, 2, 3, 4) + r(1, 0, 0, 0) + s(0, 1, 0, 0) + t(0, 0, 1, 0)$.
21. V \mathbf{R}^2 je dán trojúhelník ABC . Označme po řadě A' , B' , C' středy jeho stran BC , AC , AB . Dokažte, že platí

$$(A' - A) + (B' - B) + (C' - C) = 0.$$

ŘEŠENÍ KE CVIČENÍM:

1. OPAKOVÁNÍ, POČÍTÁNÍ S KOMPLEXNÍMI ČÍSLY

1. (a) $-486 - 702i$; (b) $-28 + 24i$; (c) $-\frac{4}{17} + \frac{18}{17}i$. **2.** (a) $-59 + 17i$; (b) $8 + 5i$; (c) $\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$; (d) $-\frac{1}{25} + \frac{7}{25}i$; (e) $-\frac{15}{2} + 5i$; (f) $-1 - i$. **3.** (a) $x = 0, y = 0$; (b) $x = -\frac{1}{29}, y = \frac{66}{29}$. **4.** (a) $1 + i$; (b) $\frac{8-3\sqrt{2}}{73} + \frac{3+8\sqrt{2}}{73}i$; (c) $\frac{69}{2210} + \frac{123}{2210}i$. **5.** (a) $2(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi)$; (b) $2(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi)$; (c) $2\sqrt{3}(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi)$. **6.** (a) $x_0 = 2, x_1 = -1 + i\sqrt{3}, x_2 = -1 - i\sqrt{3}$; (b) $x_0 = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}(1 + i), x_1 = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}(-1 + i), x_2 = -\frac{\sqrt[4]{8}}{2}(1 + i), x_3 = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}(1 - i)$; (c) $x_0 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$; (d) $x_0 = 1, x_1 = \cos \frac{2}{5}\pi + i \sin \frac{2}{5}\pi, x_2 = \cos \frac{4}{5}\pi + i \sin \frac{4}{5}\pi, x_3 = \cos \frac{6}{5}\pi + i \sin \frac{6}{5}\pi, x_4 = \cos \frac{8}{5}\pi + i \sin \frac{8}{5}\pi$; (e) $x_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{7}}(1 + i\sqrt{3}), x_1 = -2\sqrt[3]{\frac{3}{7}}, x_2 = \sqrt[3]{\frac{3}{7}}(1 - i\sqrt{3})$.

2. POLE A VEKTOROVÉ PROSTORY

2.1 ZBYTKOVÉ TŘÍDY.

1. $p = 3 : x = 2, p = 5 : x = 3, p = 7 : x = 4$. **2.** $p = 11 : x = 3, p = 13 : x = 11$. **3.** $p = 5 : x = 3, p = 7 : x = 1, p = 11 : x = 2$. **4.** (a) nemá řešení; (b) $x = 1, 3, 5, 7$. **5.** (a) $x = 3$; (b) $x = 6$. **6.** (a) např. $2x = 0, 2x = 2, 2x = 4, 3x = 0, 3x = 3$; (b) $5x = c, c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; (c) např. $2x = 1, 2x = 3, 3x = 4, 3x = 5, 4x = 3$. **7.** (a) $x = 1, 2, 4$; (b) $x = 3, 5, 6$. **8.** (a) $x = 4, 6$; (b) $x = 2, 7$. **9.** (a) $x = 2, 4$; (b) nemá řešení; (c) $x = 4, 5$.

2.2 VEKTOROVÉ PROSTORY

1. (a) ne, není splněn axiom (8); (b) ne, není splněn axiom (5) a (6); (c) ne, není splněn axiom (4); (d) ne, není splněn axiom (7) a (8); (e) ano; (f) ano; (g) ano; (h) ne, není splněn axiom (3) a (4); (i) ano. **2.** ne, $o_1 = o_1 + o_2 = o_2$. **3.** ne, $(-u)_1 = (-u)_1 + [u + (-u)_2] = [(-u)_1 + u] + (-u)_2 = (-u)_2$.

3. MATICE A OPERACE S MATICEMI

1. (α) zleva B, F, G , zprava C, D, H ; (β) (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -14 & 28 \end{pmatrix}$; (b) (29); (c) $\begin{pmatrix} 12 & -20 \\ 26 & -92 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & -14 \end{pmatrix}$; (e) není definováno; (f) $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 59 \\ -7 & -13 \end{pmatrix}$; (g) (113). **2.** (a) není definováno; (b) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; (d) viz (c); (e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{pmatrix}$;

(g) viz (f); (h) 5; (i) -25 ; (j) 168; (k) není definována; (l) 61; (m) $\begin{pmatrix} 15 & 3 & 12 \\ 14 & 0 & 7 \\ 12 & 12 & 13 \end{pmatrix}$.

3. (a) $\begin{pmatrix} -1 & 23 & -10 \\ 37 & -13 & 8 \\ 29 & 23 & 41 \end{pmatrix}$; (b) $A_{11}B_{11}$ nelze vynásobit; (c) $\begin{pmatrix} -3 & -15 & -11 \\ 21 & -15 & 44 \end{pmatrix}$. **6.** (a)

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. **7.** pro $n = 4$ (a) $A =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ v B vynásobí a -krát druhý sloupec, v C vynásobí a -krát druhý řádek; (b)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ v B přehodí první a třetí sloupec, v C přehodí první a třetí řádek;

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ v B přičte k prvnímu sloupci a -násobek třetího sloupce, v C přičte

k prvnímu řádku a -násobek třetího řádku. **8.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. **9.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **10.** (a)

jedna: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (b) žádná. **11.** (a) $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $4 : \begin{pmatrix} \pm\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \pm 3 \end{pmatrix}$; (c) ne, např.

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **12.** (a) ano, např. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; (b) ano, např. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **15.** $A^k = (a_{ij}^k)$, $a_{ij}^k =$ počet cest z i do j délky k .

4. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

1. v \mathbf{R} : nemá řešení; v \mathbf{Z}_5 : $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1$. **2.** v \mathbf{R} : $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = \frac{5}{3}, x_4 = -\frac{4}{3}$; v \mathbf{Z}_5 : $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 2$; v \mathbf{Z}_7 : $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 1$. **3.** $x_1 = \frac{3t-3}{2}, x_2 = t, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = -\frac{2}{3}, x_5 = 0, t \in \mathbf{R}$; homogenní soustava: $x_1 = 3s - 39t, x_2 = 2s, x_3 = 2t, x_4 = -4t, x_5 = 2t, s, t \in \mathbf{R}$. **4.** (a) $x = 3 + 2i, y = 1 - i, z = 1 + i$; (b) $x = 1 - 2i, y = i$; (c) $x = 3 - i, y = 2i$. **5.** $x_1 = -3r - 4s - 2t, x_2 = r, x_3 = -2s, x_4 = s, x_5 = t, x_6 = \frac{1}{3}, r, s, t \in \mathbf{R}$. **6.** $x_1 = -s - t, x_2 = s, x_3 = -t, x_4 = 0, x_5 = t, s, t \in \mathbf{R}$. **7.** nemá řešení. **8.** $x_1 = a - \frac{1}{3}c, x_2 = a - \frac{1}{2}b, x_3 = -a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c$. **9.** $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$. **10.** nemá řešení; homogenní soustava: $x_1 = 3t, x_2 = 23t, x_3 = 45$. **11.** (a) (i) $a \neq -1 : x = \frac{a+b}{(1+a)^2}, y = \frac{b}{1+a} + \frac{b-1}{(1+a)^2}, z = \frac{b-1}{1+a}$; (ii) $a = -1, b = 1 : x =$

$t - 1, y = t, z = -1, t \in \mathbf{R}$; (iii) $a = -1, b \neq 1$; (b) (i) $a \neq 0 : x = \frac{-3a^2 - ab - 4a + 2b + 4}{a}, y = \frac{-2b + 3a + 4}{a}, z = \frac{b + 2}{a}$; (ii) $a = 0, b = -2 : x = -2 + 2p, y = -3 - 2p, z = p, p \in \mathbf{R}$; (iii) $a = 0, b \neq -2$. **12.** (i) nikdy; (ii) $b = 1, a$ lib.: $x = 2 + 2ap, y = 4 + 2ap, z = p, p \in \mathbf{Z}_5$; (iii) $b \neq 1, a$ lib. **13.** $[1, 0, 1], [2, 4, 2], [3, 3, 3], [4, 2, 4], [0, 1, 0]$. **14.** právě jedno řešení pro $a \neq 4 : x = \frac{4 + a^2 b - 2ab}{a^3 + 1}, y = \frac{2a^2 b - 4a + b}{a^3 + 1}, z = \frac{4a^2 - ab + 2b}{a^3 + 1}$; více řešení pro $a = 4, b = 2 : [4, 1, 0], [0, 2, 1], [1, 3, 2], [2, 4, 3], [3, 0, 4]$; žádné řešení pro $a = 4, b \neq 2$. **15.** $a = \pm c, b = 0$. **16.** právě jedno řešení pro $a \neq 1, a \neq -2, b \neq 0 : x = \frac{a - b}{(a - 1)(a + 2)}, y = \frac{ab + b - 2}{b(a - 1)(a + 2)}, z = \frac{a - b}{(a - 1)(a + 2)}$; více řešení pro $a = 1, b = a : x = t, y = 1 - 2t, z = t, t \in \mathbf{R}$ nebo pro $a = -2, b = a : x = t, y = -\frac{1+t}{2}, z = t, t \in \mathbf{R}$; žádné řešení pro $a = 1, b \neq a$ nebo $a = -2, b \neq a$.

5. INVERZNÍ MATICE

$$1. A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -11 & 8 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, F^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}, G^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 154 & -179 & -205 & 235 \\ -36 & 42 & 48 & -55 \\ 6 & -7 & -8 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. 2. (a) A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$3. K^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}, L^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, M^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-3} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. 4. A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1+i}{3} & -\frac{i}{3} \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 2i \end{pmatrix},$$

$$C^{-1} = \frac{1}{1+9i} \begin{pmatrix} 4 & -1+i \\ -2+3i & 1 \end{pmatrix}, D^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, E^{-1} = \frac{1}{-i} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

6. VEKTOROVÉ PODPROSTORY, LINEÁRNÍ ZÁVISLOST A NEZÁVISLOST, LINEÁRNÍ OBALY

6.1 VEKTOROVÉ PODPROSTORY

1. (a) ne, neplatí (1); (b) ne, neplatí (1), (2). **2.** (a) ne, neplatí (1), (2); (b) ano. **3.** (a) ano; (b) ano. **4.** (a) ano; (b) ne, neplatí (2).

6.2 LINEÁRNÍ ZÁVISLOST A NEZÁVISLOST, LINEÁRNÍ OBALY

1. (a) LNZ; (b) LNZ; (c) LZ, $[u_1, u_2, u_3] = [u_1, u_2]$; (d) LNZ; (e) LNZ; (f) LZ, $[u_1, u_2, u_3, u_4] = [u_1, u_2, u_3]$. **2.** (a) v_1, v_2, v_3 ; (b) v_1, v_2, v_4, v_6 . **3.** (a) LZ; (b) LZ; (c) LNZ; (d) LZ. **4.** (a) ne; (b) ano. **5.** (a) ano; (b) ne. **6.** (a) LNZ; (b) LZ; (c) LZ.

7. BÁZE A DIMENZE VEKTOROVÉHO PROSTORU, SOUŘADNICE, SOUČTY A PRŮNIKY PODPROSTORŮ

1. Stačí přidat např. (a) $(0, 0, 0, 1)$; (b) x ; (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **2.** (a) u_3 ; (b) žádný. **3.** (a) $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 3)$, $\dim M = 3$; (b) $2x-1, x^3+x+1, x^2+x$, $\dim M = 3$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\dim M = 3$. **4.** např. $M = [(-1, 1, 0, \dots, 0), (-1, 0, 1, \dots, 0), \dots, (-1, 0, 0, \dots, 1)]$, $\dim M = n-1$, $\mathbf{R}^n = M \cup (1, 0, \dots, 0)$. **5.** (a) $\dim P = n-1$; (b) $\dim P = n-2$. **6.** (a) $P_1 = [x^4, x^2, 1]$, $P_2 = [x^5, x^3, x]$, $P_3 = [(x-1)(x-2)x^3, (x-1)(x-2)x^2, (x-1)(x-2)x, (x-1)(x-2)]$; (b) $[x^4 - 5x^2 + 4]$; (c) $[P_1] \cup [P_3]$. **7.** (b) např. $[P] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$; (c) $\alpha = [P] \cup \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(E)_\alpha = (1, 0, -1, 2)$. **9.** (a) $(-5, 4, 0)^T$; (b) $(0, 1, 1)^T$; (c) $(11, -3, 67, -51)^T$; (d) $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$; (e) $(2, -1, 3)^T$; (f) $(1, 1, 1, -2)^T$; (g) $(1, 0, 2, 3)^T$; (h) $(1, 1, -1, -1, 3, -4)^T$. **10.** $(u)_\beta = (a_1, a_2, a_3 - a_2, a_4 - a_1)^T$. **11.** ozn. β - báze $P_1 + P_2$, γ - báze $P_1 \cap P_2$. (a) např. $\beta = \varepsilon_3$, $\dim(P_1 + P_2) = 3$, $\gamma = [(0, 2, 1), (1, 4, 0)]$; (b) např. $\beta = \varepsilon_3$, $\dim(P_1 + P_2) = 3$, $\gamma = [(3, 5, 7)]$; (c) např. $\beta = \varepsilon_4$, $\dim(P_1 + P_2) = 4$, $\gamma = \emptyset$; (d) např. $\beta = \varepsilon_4$, $\dim(P_1 + P_2) = 4$, $\gamma = [(1, -1, 1, -1), (1, 0, 1, 0)]$. **12.** $V_1 \cap V_2 = [(1, 2, 1, 2)]$, $(V_1 + V_2) \cap v = [(1, -2, 3, -4)]$. **13.** $V_1 + V_2 + V_3 = [x^2 + 2x^3, -x^3 + x^6, 2 + x^2, x^2 + x^3 + 2x^4, x^2 + x^6, 1 + 3x^3 + x^5]$, $V_1 \cap V_2 = [x^2 + x^6]$, $V_1 \cap V_3 = [x^2 + x^3 + x^6]$, $V_2 \cap V_3 = \emptyset \Rightarrow V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$.

8. LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

1. (a), (b) ano pro $v = 0$, ne pro $v \neq 0$. **2.** (a), (c), (d) ne; (b) ano, $\text{Ker} f = \{\emptyset\}$, $\text{Im} f = [(2, 1), (3, -1)]$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; (e) ano, $\text{Ker} f = [(1, -1, -3)]$, $\text{Im} f = [(1, 2, 0), (-2, -1, 3)]$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **3.** (a) ano, $\text{Ker} A = \{\emptyset\}$, $\text{Im} A = \mathbf{R}_2[x]$; (b) ano, $\text{Ker} A = \mathbf{R}_0[x]$, $\text{Im} A = \{a_1x + a_2x^2, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\}$; (c) ano, $\text{Ker} f = \{a + bx; a, b \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}_1[x]$; (d) ne. **4.** (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(2, -5, 3) =$

$(2, 5, 3)$; (f) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $f(3, -4) = (\frac{3-4\sqrt{3}}{2}, -\frac{3\sqrt{3}+4}{2})$; (g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, $f(-2, 1, 2) = (-2, \frac{\sqrt{3}-2}{2}, \frac{1+2\sqrt{3}}{2})$. **5.** otočení o úhel $-\psi$. **6.** f je isomorfismus, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$. **7.** (a), (b) $\dim \text{Ker } f = 2$, $\dim \text{Im } f = 2$. **8.** $\dim \text{Ker } f = 1$, $\dim \text{Im } f = 3$. **9.** $f(x_1, x_2) = \frac{1}{7}(3x_1 - x_2, -9x_1 - 4x_2, 5x_1 + 10x_2)$, $f(2, -3) = \frac{1}{7}(9, -6, -20)$. **10.** $(f)_{\varepsilon_3, \varepsilon_3} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{11}{14} & \frac{1}{14} \\ 1 & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$, $f(x) = (-x_1 - \frac{2}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_3, \frac{1}{2}x_1 + \frac{11}{14}x_2 + \frac{1}{14}x_3, x_1 + \frac{2}{7}x_2 - \frac{3}{7}x_3)$. **11.** $f \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + 2a_3 - a_4$. **12.** (a) neexistuje; (b) existuje, $f(x) = \frac{1}{3}((4+a)x_1 + (-5+4a)x_2 + 3ax_3, (1+b)x_1 + (1+4b)x_2 + 3bx_3)$, $a, b \in \mathbf{R}$. **13.** $\alpha_{\text{Ker } f} = \{(9, -10, -7, 8)\}$, $\alpha_{\text{Im } f} = \{(5, 0, 0, 1), (0, 5, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$. **14.** $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$. **15.** $\dim \text{Im}(V_1 \cap V_2) = 1$, $\alpha_{\text{Im}(V_1 \cap V_2)} = \{(2, -3, 1, -1, -3)\}$, $\dim(f^{-1}(W)) = 0$. **16.** (a) $(f(v_1))_\beta = (1, -2)^T$, $(f(v_2))_\beta = (3, 5)^T$; (b) $f(v_1) = (5, -5)^T$, $f(v_2) = (-2, 29)^T$; (c) $f(x_1, x_2) = \frac{1}{7}(18x_1 + x_2, -107x_1 + 24x_2)$; (d) $\frac{1}{7}(19, -83)$.

9. MATICE LINEÁRNÍHO ZOBRAZENÍ, MATICE PŘECHODU

1. $f(x) = (-2x_1 + x_2, x_2 - x_3, -x_3)$, f je isomorfismus. **2.** $(f)_{\gamma, \gamma} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$, $(f)_{\delta, \delta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **3.** (a) $(A)_{\alpha, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $(A)_{\beta, \beta} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 16 & -2 \\ 2 & -1 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, A je isomorfismus. **4.** (a) $(x)_\beta = (5, -1, 5)^T$; (b) $(x)_\beta = (1, -4, 5)^T$. **5.** $f \in \{-s + \frac{1}{2} + (-t + \frac{1}{2})x + sx^2 + tx^3; s, t \in \mathbf{R}\}$. **6.** $(f)_{\beta, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **7.** $(\varphi)_{\delta, \gamma} = D^{-1}AC$, kde sloupce matic C a D jsou tvořeny vektory bazí γ a δ . **8.** (b) $\text{Ker } f = \{x^2 + x + 1\}$; (c) $(f)_{\varepsilon, \varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **9.** $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(4x_1 - 2x_2, 2x_1 + 2x_2, x_1 - x_2)$. **10.** (a) $(f)_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; (b) $(f)_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **11.** (a) $(f)_{\beta, \alpha} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{12} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{17}{12} & -\frac{17}{12} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $(w)_\beta = (\frac{19}{12}, -\frac{43}{12}, \frac{4}{3})^T$; (b)

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & \frac{5}{2} \\ -2 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $(w)_\beta = (-\frac{7}{2}, \frac{23}{2}, 6)^T$. **12.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. **13.** (a) $f(x) = (x_1 + 2x_3, -x_1 + x_2)$;
 (b) $f(x) = (4x_1 + 2x_2 + 12x_3, -3x_1 - 3x_2 - 6x_3)$. **14.** $f(x) = (3, -12)$, $f(y) = (-3, -21)$.
15. $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^5$, $g: \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^3$; zobrazení $f \circ g: \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^5$ je dáno maticí AB , nejedná se
 o isomorfismus, zobrazení $g \circ f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ je dáno maticí BA , jedná se o isomorfismus.

10. AFINNÍ GEOMETRIE

1. (a) $(x, y, z) = (-1, 1, 0) + t(1, 0, 2) + s(4, -1, 4)$; (b) $(x, y, z) = (1, 2, -3) + t(-1, 0, 4) + s(2, 1, -1)$; (c) $(x, y, z) = (3, 1, -2) + t(-1, 2, 1) + s(3, -4, 2)$. **2.** (a) $22x - y + 5z - 28 = 0$;
 (b) $x - 5y - az + 27 = 0$; (c) $x + y - 6 = 0$. **3.** (a) A, D ; (b) B, C ; (c) A, C, D . **4.**
 $p: (x, y, z) = (3, -3, 0) + t(0, 1, 1)$, svazek rovin: $a(2x - y + z - 9) + b(x + y - z) = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$. **5.** (a) $(7, 3, 0, 2) + t(1, -1, 1, 0)$; (b) $(3, 2, 3, 0) + t(-2, -1, 0, 1)$. **6.** (a)
 totožné; (b) různoběžné, $R = (-4, -3)$; (c) mimoběžné; (d) různoběžné, $R = (-3, 0, 4)$. **7.** (a) $x = 2 + 3t, y = 1 + t, z = -2t$; (b) totožné. **8.** (a) $(-2, -2, 3)$; (b) přímka leží
 v rovině; (c) mimoběžné; (d) přímka leží v rovině; (e) různoběžné, $P = (2, 0, 1, 1)$. **9.**
 (a) protínají se v bodě $(-\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}, 2, 5)$; (b) přímka leží v nadrovině; (c) protínají se v
 přímce $(1, 2, 3, 4) + t(2, 4, -9, 2)$. **10.** (a) $a = 3, b = 2$; (b) pro $a = \frac{11}{4}$ se protínají v
 přímce $(4, -\frac{21}{10}, 3, \frac{43}{10}) + t(10, -2, -5, 1)$, pro $a \neq \frac{11}{4}$ mimoběžné. **11.** (a) rovnoběžné; (b)
 protínají se v bodě $(0, 2, 2, -3, 0)$. **12.** (a) $x = 3 + t, y = -2, z = 13 + 8t$; (b) $x = 1 + 2t, y = -2 + t, z = 3 - t$;
 (c) $x - 4 = y - 1 = \frac{z+5}{2}$; (d) příčka neexistuje, přímky jsou totožné. **13.** $x = 3 + 5t, y = -2 + 10t, z = -4 + 9t$. **14.** $q: (3, 2, 1) + t(-1, -1, 3)$.
15. (a) $(8, 9, -11, -15) + t(6, 7, -8, -11)$; (b) $q: (1, 2, -1, -2) + t(-2, 0, 2, 0)$; (c) $q: (1, 0, 3, 1) + s(6, -1, -3, -2)$. **16.** $q: (5, 3, 4, 6, 2) + t(2, 1, 3, 2, 1)$. **17.** příčka neexistuje. **18.**
 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 0, -1, 0) + r(1, 2, 1, 1) + s(1, -2, 3, 0) + t(2, 0, 1, -1)$, $-10x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 12x_4 = 2$. **19.** (a) $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, -x_1 - x_2 + x_4 = -1$; (b) $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, 4x_1 + x_3 + x_4 = 4$. **20.** (a) $X = (-1, 0, 2, 1)^T + p(2, 4, -9, 2)^T = (2, 3, 1, 3)^T + p(2, 4, -9, 2)^T$;
 (b) $X = (-9, 2, 1, -5)^T + p(3, 1, 2, 0)^T = (1, 2, 3, 4)^T + p(3, 1, 2, 0)^T$.

LITERATURA

- [1] H. Anton, C. Rorres: Elementary Linear Algebra, 8th Edition, Applications Version, Willey, 2000.
- [2] L. Bican: Lineární algebra, Matematický seminář SNTL, Praha, 1979.
- [3] P. Kaprálik, J. Tvarožek: Zbierka riešených príkladov z lineárnej algebry a analytickej geometrie, Alfa, Bratislava, 1987.
- [4] J. Slovák: Lineární algebra, elektronický učební text, <http://www.math.muni.cz/~slovak>, Brno, 1995.
- [5] P. Zlatoš: Lineárna algebra a geometria, skripta MFF UK v Bratislavě, 1999.