GRAM-SCHMIDTŮV ORTOGONALIZAČNÍ PROCES

→ slouží k nalezení ortogonální báze

z báze $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ vytvoříme bázi $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

1) $v_1 = u_1$

2) $v_2 = u_2 - p_1$

↳ projekce vektoru u_2 na podprostor $W = \langle v_1 \rangle$

$$p_1 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1$$

3) $v_3 = u_3 - p_2$

↳ projekce vektoru u_3 na podprostor $W = \langle v_1, v_2 \rangle$

$$p_2 = \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 + \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} \cdot v_2$$

$\vdots$

n) $v_n = u_n - p_{n-1}$

$$p_{n-1} = \frac{\langle u_n, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 + \frac{\langle u_n, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} \cdot v_2 + \dots + \frac{\langle u_n, v_{n-1} \rangle}{\langle v_{n-1}, v_{n-1} \rangle} \cdot v_{n-1}$$

Projekce vektoru v na podprostor W generovaný !ORTOGONÁLNÍ! bází $(v_1, \dots, v_n)$

$$p = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} \cdot v_2 + \dots + \frac{\langle v, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} \cdot v_n$$

vzdálenost v od W .... $\|v - p\|$

odchylka φ v od W .... $\cos\varphi = \frac{\|p\|}{\|v\|}$

normalizovaný vektor – vektor, jehož velikost je 1

↳ $\frac{1}{\|v\|} \cdot v$

př.1 Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortogonální bázi odvozenou z $\alpha = \left(\underset{u_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{u_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$

1) $v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) $v_2 = u_2 - p_1$

$$p_1 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-3}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

→ můžeme vynásobit v_2 číslem (5), nemá vliv na kolmost

$$\Rightarrow \underline{\underline{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

3) $v_3 = u_3 - p_2$

$$p_2 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$p_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\cancel{8}^{\,4}}{\cancel{30}_{\,15}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

→ ortogonální báze $\beta = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

(př. 2) ortogonální bázi z př. 1 upravte na bázi ORTONORMÁLNÍ γ

každý vektor báze je normalizovaný (jeho velikost je 1)

$$w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{1}{\|v_2\|} \cdot v_2 = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{30} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \frac{1}{\|v_3\|} \cdot v_3 = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} \end{pmatrix}$$

$$\dots \gamma = \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{30} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{15} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} \end{pmatrix} \right)$$