Pomocí Hornerova schématu rozložte polynom

$R_4(x) = x^4 - 1 \quad \rightarrow \quad \frac{r}{q} = \{\pm 1\}$

	1	0	0	0	-1
1	1	1	1	1	0
1	1	2	3	4	
-1	1	0	1	0	
-1	1	-1	2		

→ 1 je kořen

↵ musíme otestovat znovu (mohla by být dvojnásobný kořen)

není

(−1) je kořen → nutno otestovat, jestli není dvojnásobný

není

(tím jsme vyčerpali všechny racionální kořeny, 1 již není nutné znovu testovat, protože pokud nebyla kořenem x^3+x^2+x+1 nebude kořenem ani x^2+1)

$R_4(x) = (x+1)\cdot(x-1)\cdot(x^2+1)$

↳ má komplexní kořeny (když jsme vyřadili racionální)

$x^2 = -1$

$x = \pm i$

Řešte ~~diferenciální~~ rovnici
diferenční

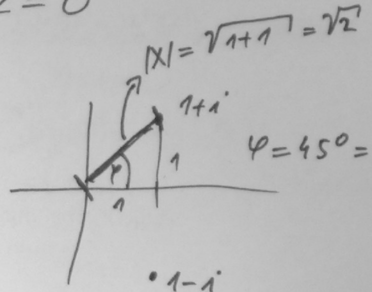
$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_n + 3$$ s poč. podmínkou $x_0 = 2$, $x_1 = 1$.

→ zhomogenizujeme ... $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$

→ char. rce : $x^2 - 2x + 2 = 0$

$$D = 4 - 4\cdot 1\cdot 2 = -4$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$



$$\varphi = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$x_{1,2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow \quad x_n = \underbrace{\overbrace{a\cdot(\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} + b\cdot(\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}}^{\text{řešení zhomogenizované dif. rce}} + k}_{\text{řešení nehomog. rce}}$$

$y_n = k$

$$k = 2k - 2k + 3$$

$$\boxed{k = 3}$$

$x_0 = 2$: $2 = a\cdot 1\cdot \cos 0 + b\cdot 1\cdot \sin 0 + 3$

$$2 = a + 3 \quad \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$x_1 = 1$ $$1 = 1\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4} + b\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4} + 3$$

$$1 = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} + b\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} + 3$$

$$\boxed{-3 = b}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_n = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} - 3(\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4} + 3}$$

Určete kolmou projekci vektoru $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ do podprostoru W.

$$W = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_2} \right\rangle$$

- nejdříve musíme určit ortogonální bázi podprostoru W

→ G.-S. proces: $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - p \qquad p = \frac{\langle a_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1$$

$$p = \frac{3}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- teprve nyní můžeme použít vzorec na projekci:

$$p = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1 + \frac{\langle v, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} \cdot w_2$$

$$p = \frac{\cancel{9}\,3}{\cancel{3}\,1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{2}\,1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ -3 - 1 \\ 3 + 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$