Matematika I – 1a
Skaláry, kombinatorické veličiny a diferenční rovnice

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

19. 9. 2012

Obsah přednášky

Kde je dobré číst?

- vlastní poznámky, předběžné texty nové učebnice „Matematika drsně a svižně“, GOOGLE, atd.
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta.
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na http://www.kolej.mff.cuni.cz/~lmotm275/skripta/).
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.
- František Šik, Lineární algebra zaměřená na numerickou analýzu, MU, 1998, 176 s. ISBN 80-210-1996-2.

Podmínky pro absolvování předmětu MB?01

1. Účast na cvičení (tolerance max 3 absence)
2. První vnitro test (max 10 bodů)
3. Druhý vnitro test (max 10 bodů)
4. Práce na cvičení - minipísemky (max 5 bodů)

Minimum pro připuštění k závěrečné zkoušce je 10 bodů.
Záverečná zkouška pro MB101 bude formou jedné písemky za max 20 bodů. (S opravnými termíny.)
U předmětu MB201 bude navazovat ústní zkouška (dolní limit bodů z písemky?).
Body získané během semestru se započítávají do celkového hodnocení (i pro opravné termíny).

Hodnocení předmětu:

F – nesplněna účast na cvičeních, méně než 10 bodů ze semestrálních hodnocení, méně než 20 bodů celkem (kterákoliv z prvních dvou podmínek již vylučuje účast na závěrečné zkoušce)

E – alespoň 20 bodů celkem

D – alespoň 24 bodů celkem

C – alespoň 28 bodů celkem

B – alespoň 32 bodů celkem

A – alespoň 36 bodů celkem

Uvedené povinnosti společné pro MB201 a MB101.

Při dostatečném celkovém zisku bodů bude u MB201 ještě následovat ústní zkouška, pro kterou bude výše uvedené hodnocení jen východiskem.

Způsob výuky:

- V pondělním termínu je vedena standardní přednáška pokrývající předmět MB101. Půjde hlavně o předvední a využití matematických nástrojů/modelů. Jde o dvouhodinovou přednášku v D3 paralelně přenášenou videokonferenční technikou i do poslucháren D1 a D2.
- Ve středečním termínu bude doplňující přednáška pro MB201, která bude zaměřena na výklad související teorie rozšíření tématiky.
- Seminární skupiny "cvičení"jsou určeny k procvičení, jak řešit úlohy.

Mezi předměty MB201 a MB101 se lze přehlašovat oběmi směry v prvních 14 dnech semestru, poté do lhůty 1 týden před druhou vnitrosemestrální písemkou pouze směrem od složitější k jednodušší. Stejně tak bude možné zapsat MB101 jako náhradu po neúspěšném absolvování MB201.

Míváme (často chorobnou) snahu mít jasno

- kolik něco je
- za kolik to je,
- jak dlouho to je
- kde přesně to je
- ...

a výsledkem takových úvah je většinou nějaké „číslo“, případně spousta čísel.
Budeme učeněji říkat „hodnoty“.

Za číslo se přitom považuje něco, co umíme sčítat a násobit a splňuje to obvyklé zákonitosti, ať už všechny nebo jen některé.

Nejjednodušší příklady jsou přirozená čísla, budeme je značit

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

(v informatice brána včetně nuly, jinde spíše ne), a čísla celá

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Budeme navíc místo s čísly manipulovat s písmeny abecedy, případně jinými znaky, ať už jejich hodnota je nebo není předem známá.

Vlastnosti sčítání

Vyjmenujme takto obvyklé vlastnosti, které sčítání a násobení čísel má:

$$(a+b)+c = a+(b+c), \text{ pro všechny } a, b, c \tag{KG1}$$

$$a+b = b+a, \text{ pro všechny } a, b \tag{KG2}$$

$$\text{existuje prvek } 0 \text{ tak, že pro všechny } a \text{ je } a+0=a \tag{KG3}$$

$$\text{pro všechny } a \text{ existuje } (-a) \text{ tak, že } \ a+(-a)=0. \tag{KG4}$$

Vlastnostem (KG1) – (KG4) říkáme vlastnosti **komutativní grupy**. Celá čísla $\mathbb{Z}$ jsou dobrým příkladem komutativní grupy, přirozená čísla nikoliv, protože nesplňují KG4 (a případně neobsahují nulu pokud ji do $\mathbb{N}$ nezahrnujeme).

Vlastnosti násobení

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \text{ pro všechny } a, b, c \qquad (O1)$$

$$a \cdot b = b \cdot a, \text{ pro všechny } a, b \qquad (O2)$$

$$\text{existuje prvek 1 takový, že pro všechny } a \text{ platí } 1 \cdot a = a \qquad (O3)$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \text{ pro všechny } a, b, c. \qquad (O4)$$

Poslední vlastnosti O4 se říká **distributivita**.
Množiny s operacemi $+$, $\cdot$ a vlastnostmi (KG1)–(KG4), (O1)–(O4) se nazývají **komutativní okruhy**. Potřebujeme však zpravidla ještě další běžnou vlastnost čísel:

$$\text{pro každé } a \neq 0 \text{ existuje } a^{-1} \text{ tak, že platí, } a \cdot a^{-1} = 1. \qquad (P)$$

Když naše objekty splňují navíc i (P), hovoříme o **poli** (často také o **komutativním tělese**). Prvky nějaké množiny s operacemi $+$ a $\cdot$ splňujícími (ne nutně všechny) budeme nazývat **skaláry**.

Budeme pro ně vesměs užívat latinská písmena ze začátku abecedy.

Komplexní čísla a jejich vlastnosti

Komplexní rovina.

$$\mathbb{C} = \{a + i\,b,\ \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

Absolutní hodnota = vzdálenost od počátku

$$|z|^2 = z\bar{z} = (a + i\,b)(a - i\,b)$$

Goniometrický tvar

$$z = |z|\,(\cos\phi + i\,\sin\phi)$$

Moivreova věta

$$z^n = |z|^n\,(\cos(n\phi) + i\,\sin(n\phi))$$

Většinou hodnoty neznáme, místo toho ale něco víme o závislosti naší hodnoty na hodnotách jiných.
Formálně píšeme,

$$y = f(x),$$

tj. „závislá“ veličina y je dána pomocí „nezávislé“ veličiny x.
Přitom bereme f jen *formálně* (jenom víme, že je definována) nebo *operačně* (tj. $f(x)$ je dáno vzorcem poskládaným ze známých operací.
Je-li hodnotou skalár, hovoříme o **skalární funkci**. Hodnoty mohou být také dány pouze přibližně nebo s jistou pravděpodobností.
Matematické úvahy z formálního popisu nachází explicitní vztahy, které funkce popisují. Pracujeme s:

- s přesným a konečným výrazem
- s nekonečným výrazem
- s přiblížením neznámé funkce známým odhadem (většinou s vyčíslenou možnou chybou)
- s odhadem hodnot s vyčíslením jejich pravděpodobnosti apod.

Example

(1) Roční mzda pracovníků (hodnoty nezávislé veličiny jsou jednotliví pracovníci x z nějaké množiny, $f(x)$ je jejich roční mzda za dané období),
(2) měsíční mzda konkrétního pracovníka v čase (nezávislou hodnotou je čas v měsících, závislou příjem).
(3) Plocha obrazce v rovině, objem tělesa v prostoru, rychlost konkrétního auta v čase atd. Dovedeme si jistě představit, že ve všech uvedených případech může být hodnota dána nějakou volně popsanou souvislostí nebo naměřena přibližně nebo odhadnuta atd.
(4) Obyčejné sčítání nebo násobení přirozených čísel
(5) Důležitou operačně definovou skalární funkcí na přirozených číslech je **faktoriál**, který definujeme vztahy

$$f(0) = 1,\ f(n+1) = (n+1) \cdot f(n).$$

Píšeme $f(n) = n!$ a definice zjevně znamená $n! = n \cdot (n-1) \cdots 1$. (To není příliš efektivní formule pro velká n, lepší ale těžko hledat.)

Z množiny n předmětů vytváříme pořadí jejich prvků.
Pro volbu prvního prvku je n možností, další je volen z $n-1$ možností atd., až nám nakonec zbude jediný poslední prvek.
Proto je na dané konečné množině S s n prvky právě $n!$ různých pořadí. Hovoříme o **permutacích** prvků množiny S.
Jestliže si předem prvky v S očíslujeme, tj. ztotožníme si S s množinou $S = \{1, \dots, n\}$ n přirozených čísel, pak permutace odpovídají možným pořadím čísel od jedné do n.

Theorem

Počet různých pořadí na konečné množině s n prvky je dán funkcí faktoriál:

$$f(n) = n!$$

Kombinace

Dalším jednoduchým příkladem hodnoty určené formulí je počet způsobů, kterými lze vybrat k různých rozlišitelných předmětů z množiny n předmětů.
Zjevně máme $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ možných výsledků postupného výběru našich k prvků, přitom ale stejnou výslednou k-tici dostaneme v $k!$ různých pořadích.
Dokázali jsme tedy:

Theorem

*Pro počet **kombinací k-tého stupně** z n prvků platí (samozřejmě je $k \leq n$)*

$$c(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Číslům $c(n,k)$ říkáme **binomická čísla**.

Pokud nám ale záleží i na pořadí vybrané k-tice prvků, hovoříme o **variaci k-tého stupně**. Jak jsme si již ověřili:

Theorem

Pro počet variací platí

$$v(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

pro všechny $0 \le k \le n$ *(a nula jinak).*

Binomická čísla dostala svůj název od tzv. binomického rozvoje:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

protože koeficient u mocniny $a^k b^{n-k}$ je roven právě počtu možností, jak vybrat k-tici z n závorek v součinu.

Pascalův trojúhelník

Všechna kombinační čísla si můžeme sestavit do tzv. **Pascalova trojúhelníku**, kde každé číslo obdržíme jako součet dvou bezprostředně nad ním ležících sousedů:

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0: & & & & 0 & & 1 & & 0 & & & & \\
n=1: & & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & & \\
n=2: & & 0 & & 1 & & 2 & & 1 & & 0 & & \\
n=3: & & & 0 & 1 & 3 & & 3 & 1 & 0 & & & \\
n=4: & 0 & & 1 & & 4 & 6 & 4 & & 1 & & 0 & \\
n=5: & & & 1 & 5 & 10 & & 10 & 5 & 1 & & &
\end{array}
$$

V jednotlivých řádcích máme právě koeficienty u jednotlivých mocnin z binomického rozvoje, např.

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Pořadí n prvků, z nichž mezi některými nerozlišujeme, nazýváme **permutace s opakovaním**. Nechť je mezi n danými prvky p_1 prvků prvního druhu, p_2 prvků druhého druhu, ..., p_k prvků k-tého druhu, $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$, potom počet pořadí těchto prvků s opakováním budeme značit $P(p_1, \ldots, p_k)$. Zřejmě platí:

Theorem

$$P(p_1, \ldots, p_k) = \frac{n!}{p_1! \cdots p_k!}.$$

Volný výběr prvků z n možností, včetně pořadí, nazýváme **variace k-tého stupně s opakováním**, jejich počet budeme značit $V(n,k)$. Předpokládáme, že stále máme pro výběr stejně možností, např. díky tomu, že vybrané prvky před dalším výběrem vracíme nebo třeba házíme pořád stejnou kostkou. Zřejmě platí:

Theorem

$$V(n,k) = n^k.$$

Pokud nás výběr zajímá bez zohlednění pořadí, hovoříme o **kombinacích s opakováním** a pro jejich počet píšeme $C(n, k)$.

Theorem

Počet kombinací s opakováním k-té třídy z n prvků je pro všechny $0 \leq k$ a $0 < n$

$$C(n, k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Obecnou **diferenční rovnicí prvního řádu** rozumíme výraz

$$f(n+1) = F(n, f(n)),$$

kde F je známá skalární funkce závislá na dvojicích přirozených čísel.

Je zřejmé, že takový vztah, spolu s volbou pro $f(0)$, zadává jednoznačně celou nekonečnou posloupnost hodnot $f(0), f(1), \dots, f(n), \dots$. Jako příklad může sloužit definiční formule pro faktoriál, tj.

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Vidíme, že skutečně vztah pro $f(n+1)$ závisí na n i na hodnotě $f(n)$.

lineární diferenční rovnice

Po konstantní závislosti je nejjednodušší

$$f(n+1) = a \cdot f(n) + b,$$

kde a, $b \in \mathbb{N}$. Takovou rovnici umíme snadno řešit. Je-li $b = 0$, pak zjevně

$$f(n) = a^n f(0).$$

To je např. vztah pro tzv. Malthusiánský model populačního růstu, který vychází z představy, že za zvolený časový interval vzroste populace s konstantní úměrou a vůči předchozímu stavu. Rovnice s b nenulovým se objeví při úročení (ať už vkladu nebo půjčky – jde jen o znaménko . . .)

Theorem

Obecné řešení lineární diferenční rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty $a \neq 1$, b a počáteční podmínkou $f(0) = y_0$ je

$$f(n) = a^n y_0 + \frac{1 - a^n}{1 - a} b.$$

Uveďme si praktický příklad na řešení diferenčních rovnic prvního řádu:

Example

Mirek si chce koupit nové auto. Auto stojí 300 000 Kč. Mirek by chtěl auto koupit na měsíční splátky. Prodávající společnost mu nabízí půjčku na koupi auta s ročním úrokem 6%. Mirek bych chtěl auto splatit za tři roky. Jak vysoká bude měsíční splátka?