Skupina A

Příklad 1. *Určete, zda je v rovině z bodu* $[22,31]$ *viditelná strana* AC *neprůhledného rovnostranného trojúhelníku* ABC*, kde* $A=[0,0]$ *a* $B=[4,1]$.

Řešení. Bod C dostame jako obraz bodu B v rotaci o šedesát stupňů kolem bodu A. Protože $A=[0,0]$, souřadnice bodu B odpovídají souřadnicím vektoru $\overrightarrow{AB}=B-A=(4,1)$, v uvažované rotaci pak je

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=(2-\frac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3}+\frac{1}{2}),$$

což jsou i souřadnice bodu C.

Viditelnost strany AB pak můžeme posuzovat buď podle znaménka vhodného determinantu (označme $X=[22,31]$), například:

$$\begin{vmatrix}\overrightarrow{XA}\\ \overrightarrow{XC}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-22 & -31\\ -23-\frac{\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt{3}-31,5\end{vmatrix}<0,$$

vektory $\overrightarrow{XA}$ a $\overrightarrow{XC}$ tedy svírají (v tomto pořadí) úhel větší než $180°$, což znamená, že bod X leží „napravo“ od přímky AC (orientované ve směru $\overrightarrow{AC}$), stranu AC tedy není „přes trojúhelník“ vidět. Viditelnost umíme rozhodnout i podle znaménka jiných determinantů obsahující souřadnice některé dvojice vektorů $\overrightarrow{XA},\overrightarrow{XC},\overrightarrow{AC}$, či vektorů k nim opačným. Stačí mít na paměti, že daný determinant je kladný, právě když v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček) orientovaný úhel mezi prvním a druhým vektorem je menší než $180°$.

Alternativně můžeme posuzovat viditelnost strany AC podle velikosti směrnice přímky AC a AX. Protože $A=[0,0]$, tak stranu AC bude vidět právě když směrnice přímky AC bude menší než směrnice přímky AX. Je však $\frac{2\sqrt{3}+\frac{1}{2}}{2-\frac{\sqrt{3}}{2}}>\frac{31}{22}$ (pro odvození nerovnosti bez kalkulačky stačí použít faktu $1,5<\sqrt{3}<2$), tedy strana AC není vidět. □

Příklad 2. *Z balíčku* 20 *karet očíslovaných čísly* 1 *až* 20 *vytáhnu postupně čtyři karty. Jaká je pravděpodobnost, že čísla na vytažených kartách budou seřazena podle pořadí vytažení od nejmenšího k největšímu?*

Řešení. Každá pořadí každé čtveřice má stejnou pravděpobnost, že bude vytaženo. Daná čtveřice má právě $4!=24$ pořadí, celkem je tedy $1/24$ čtveřic (s pořadím), které vyhovují zadání. Hledaná pravděpodobnost je tedy $1/24$. Úvah vedoucích ke správnému řešení je mnoho. Jednoduše lze spočítat i celkový počet vyhovujících pořadí čtyř prvků. Vyhovující pořadí je dáno čtveřicí prvků, které v daném pořadí vyskytují, tedy $\binom{20}{4}$, všech pořadí vytažených čtveřic (tedy všech elementárních jevů) je $20\cdot19\cdot18\cdot17$. Celkem je tedy hledaná pravděpodobnost

$$\frac{\binom{20}{4}}{20\cdot19\cdot18\cdot17}=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}.$$

□

Příklad 3. *Určete počet surjektivních zobrazení* f *množiny* $\{1,2,3,4,5,6\}$ *na množinu* $\{1,2,3\}$ *takových, že* $f(1)>f(2)$.

Řešení. Od počtu všech surjektivních zobrazení šestiprvkové množiny na tříprvkovou (těch je $3^6-\binom{3}{2}(2^6-2)-3$) odečteme ta, pro která je $f(1)=f(2)$ (těch je právě tolik, kolik je surjektivních zobrazení pětiprvkové množiny na tříprvkovou, prvky 1 a 2 totiž můžeme považovat za jeden; celkem $3^5-\binom{3}{2}(2^5-2)-3$). Ve zbylých zobrazení je vzhledem k symetrii stejně těch, ve kterých je $f(1)>f(2)$ jako těch, pro která je $f(2)>f(1)$. Obou typů je tedy právě polovina získaného počtu. Celkem máme

$$\frac{1}{2}\left[\left(3^6-\binom{3}{2}(2^6-2)-3\right)-\left(3^5-\binom{3}{2}(2^5-2)-3\right)\right]=195$$

zobrazení splňující podmínky zadání. □

Skupina B

Příklad 1. *Určete, zda je v rovině z bodu* $[20, 41]$ *viditelná strana* AC *neprůhledného rovnostranného trojúhelníku* ABC, *kde* $A = [0, 0]$ *a* $B = [6, 1]$.

Řešení. $C = [3 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 3\sqrt{3} + \frac{1}{2}]$, porovnáním směrnic přímek AX a AC pak

$$\frac{3\sqrt{3} + \frac{1}{2}}{3 - \frac{\sqrt{3}}{2}} > 2,5 > \frac{41}{20}.$$

(k odhadu stačí použít faktu $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$)

Stranu není vidět. □

Příklad 2. *Z cifer 1, 2, 3, 4, 5 je náhodně sestaveno pěticiferné číslo. Jaká je pravděpodobnost, že v něm budou cify* 1, 2, 3 *seřazené zleva podle velikosti (ne nutně za sebou).*

Řešení. Všechna pěticiferná čísla tvořená nějakým pořadím cifer 1, 2, 3, 4, 5, můžeme rozdělit do šestic takových, že se v dané šestici čísla liší pouze pořadím číslic 1, 2 a 3. V každé šestici je tedy právě jedno vyhovující pořadí. Celková pravděpodobnost je tedy 1/6.

Lze spočítat i vyčíslením celkového počtu vyhovujících čísel ($\binom{5}{3} \cdot 2$). Hledaná pravděpodobnost je pak podílem počtu vyhovujích případů a počtu všech případů (všech daných pěticiferných čísel; těch je 5!):

$$\frac{\binom{5}{3} \cdot 2}{5!} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

□

Příklad 3. *Určete počet surjektivních zobrazení* f *množiny* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *na množinu* $\{1, 2, 3\}$ *takových, že* $f(3) < f(4)$.

Řešení. $\frac{1}{2}\left[\left(3^5 - \binom{3}{2}(2^5 - 2) - 3\right) - \left(3^4 - \binom{3}{2}(2^4 - 2) - 3\right)\right] = 57.$ □

Skupina C

Příklad 1. *Určete, zda je v rovině z bodu* $[20, 31]$ *viditelná strana* AC *neprůhledného rovnostranného trojúhelníku* ABC, *kde* $A = [0, 0]$ *a* $B = [4, -1]$.

Řešení. $C = [2 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}]$,

$$\frac{2\sqrt{3} - \frac{1}{2}}{2 + \frac{\sqrt{3}}{2}} > \frac{31}{20}.$$

Strana není vidět. □

Příklad 2. *Mezi šesti (různými) čísly taženými v loterii byla i čísla* 2, 10, 20 *a* 42. *Jaká je pravděpodobnost, že číslo* 42 *bylo ze jmenovaných vytažené jako první.*

Řešení. 1/4. □

Příklad 3. *Určete počet surjektivních zobrazení* f *množiny* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *na množinu* $\{1, 2, 3\}$ *takových, že* $f(1) \neq f(2)$ *nebo* $f(6) \neq f(2)$.

Řešení. Od počtu všech surjektivních zobrazení odečteme počet surjektivních zobrazení nesplňujících podmínku, tedy takových, že $f(1) = f(2) = f(6)$ (a těch je tolik, co surjektivních zobrazení čtyřprvkové množiny na trojprvkovou). $\big(3^6 - \binom{3}{2}(2^6 - 2) - 3\big) - \big(3^4 - \binom{3}{2}(2^4 - 2) - 3\big) = 504$. □

Skupina D

Příklad 1. *Určete, zda je v rovině z bodu* $[19, 21]$ *viditelná strana* AC *neprůhledného rovnostranného trojúhelníku* ABC*, kde* $A = [0, 0]$ a $B = [4, -2]$.

Řešení. $C = [2 + \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1]$, $\frac{2\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}} < \frac{21}{19}$. Strana je vidět. □

Příklad 2. *Mezi šesti (různými) čísly taženými v loterii byla i čísla* 2, 10, 20 a 42. *Jaká je pravděpodobnost, že čísla* 2 a 10 *byla tažena před čísly* 20 a 42.

Řešení. $1/6$. □

Příklad 3. *Určete počet surjektivních zobrazení* f *množiny* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *na množinu* $\{1, 2, 3\}$ *takových, že* $f(1) \neq f(2)$ *nebo* $f(5) \neq f(2)$. Úvaha obdobná jako ve skupině C.

Řešení. $\big(3^5 - \binom{3}{2}(2^5 - 2) - 3\big) - 3! = 144$. □

Skupina E

Příklad 1. *Určete, zda je v rovině z bodu* $[-17,-18]$ *viditelná strana* AB *neprůhledného rovnostranného trojúhelníku* ABC*, kde* $A=[0,0]$ *a* $C=[-4,1]$.

Řešení. $B=[\frac{\sqrt{3}}{2}-2, 2\sqrt{3}+\frac{1}{2}]$, porovnáním směrnic přímek AX a AB ($X=[-17,-18]$) máme

$$\frac{2\sqrt{3}+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-2}<0<\frac{18}{17}.$$

Strana není vidět. □

Příklad 2. *Z balíčku* 20 *karet očíslovaných čísly* 1 *až* 20 *vytáhnu postupně čtyři karty. Jaká je pravděpodobnost, že největší číslo na vytažených kartách bude vytaženo jako poslední?*

Řešení. 1/4. □

Příklad 3. *Určete počet surjektivních zobrazení* f *množiny* $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ *na množinu* $\{1,2,3,4,5\}$ *takových, že* $f(1)>f(2)>f(3)$. Pro každou z možných čtyř tříprvkových množin $\{f(1),f(2),f(3)\}$, kterých je $\binom{5}{3}$ (výběrem této množiny jsou vzhledem k nerovnostem již pevně dány obrazy prvků 1, 2, 3). Zbylé prvky 4, 5, 6, 7 se zobrazují libovolně, avšak tak, aby v množině $\{f(4),f(5),f(6),f(7)\}$ ležely ty dva prvky, které nejsou v $\{f(1),f(2),f(3)\}$. Celkem

Řešení. $\binom{5}{3}(5^4-2\cdot4^4+3^4)$. □

Skupina F

Příklad 1. *Určete, zda je v rovině z bodu* $[-11, -21]$ *viditelná strana* AB *neprůhledného rovnostranného trojúhelníku* ABC*, kde* $A = [0, 0]$ a $C = [-1, 4]$*. (Vrcholy trojúhelníka popisujeme v kladném smyslu.)*

Řešení. $B = [2\sqrt{3} - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 2]$, $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+2}{2\sqrt{3}-\frac{1}{2}} < \frac{3}{2{,}5} < \frac{21}{11}$. Strana je vidět. □

Příklad 2. *Z balíčku* 20 *karet očíslovaných čísly* 1 *až* 20 *vytáhnu postupně pět karet. Jaká je pravděpodobnost, že největší číslo na vytažených kartách nebude vytaženo mezi posledními dvěma kartami?*

Řešení. 2/5. □

Příklad 3. *Určete počet surjektivních zobrazení* f *množiny* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *na množinu* $\{1, 2, 3, 4\}$ *takových, že* $f(1) > f(2) > f(3)$. Podobně jako ve skupině E.

Řešení. $4(4^3 - 3^3)$. □