# Osnovy základních matematických přenášek

Ilustrativní rozpis osnovy všech základních i rozšířených kurzů po jednotlivých přednáškách/týdnech. Skutečná realizace bude samozřejmě závislá na konkrétním vyučujícím, počtu týdnů v daném semestru, apod.

V případě prvního semestru je rozšíření popsáno jako dodatečné dvouhodinové přednášky k dvouhodinovým přednáškám základním, v ostatních případech jsou kurzy popsány zcela odděleně (a jedna položka pak představuje 4 hod. přednášek).

Popis prvních dvou semestrů je vcelku důkladně ověřený prací z výuky, další dva semestry zahrnují změny oproti stávající výuce, které se ještě budou usazovat.

|  |  |
| --- | --- |
| **MB101 - Lineární modely** | Všechny přednášky jsou zaměřeny na řešení konkrétních příkladů, resp. vytváření matematických modelů reálných praktických problémů |
| *Rozcvička* | |
| 1. Skaláry a funkce | počítání s reálnými a komplexními čísly, elementární kombinatorika, diferenční rovnice prvního řádu |
| 2. Pravděpodobnost | množinová algebra, jevy a jejich pravděpodobnost, klasická pravděpodobnost, geometrická pravděpodobnost |
| 3. Geometrie v rovině | analytické vyjádření bodů a přímek v souřadnicích, využití matic pro zápis podobností v rovině, vzdálenost, odchylka |
| 4. Formalizace matematiky | relace, uspořádání, ekvivalence |
| *Vektory a matice* | |
| 5. Vektory a matice | vektory jako *n*-tice skalárů, matice jako nástroj na počítání s vektory, Gaussova eliminace systémů lineárních rovnic, inverzní matice, determinanty, |
| 6. Báze a souřadnice | generování podprostorů, báze, skalární součin, velikost a kolmost vektorů, ortogonalizace |
| 7. Lineární zobrazení | matice zobrazení, hodnost, vlastní čísla, vlastní vektory |
| *Lineární modely* | |
| 8. Modely založené na lineárních rovnicích | systémy lineárních rovnic a nerovnic, problém lineárního programování |
| 9. Lineární diferenční rovnice | homogenní a nehomogenní diferenční rovnice, rovnice s konstantními koeficienty |
| 10. Iterované procesy | Leslieho populační modely, pravděpodobnostní matice, diskrétní Markovovy řetězce |
| *Analytická geometrie* | |
| 11. Afinní geometrie | přímka, rovina, (pod)prostor, konvexní množiny, afinní souřadnice, afinní zobrazení |
| 12. Euklidovská geometrie | vzdálenost, odchylka, objem, viditelnost, kvadriky |
|  | |
| **MB201 - Lineární modely B** | Dodatečné přednášky k základní verzi kurzu rozšiřují teorii potřebnou pro efektivní budování modelů |
| *Rozcvička* | |
| 1. Skaláry a funkce | axiomatika skalárů, vlastnosti komplexních čísel, iracionální a imaginární kořeny polynomů, principy formálních důkazů a důkazy kombinatorických tvrzení |
| 2. Konečná pravděpodobnost | důsledná formalizace pravděpodobnosti, princip inkluze a exkluze, závislost jevů, podmíněná pravděpodobnost |
| 3. Geometrie v rovině | transformace souřadnic, užití maticového počtu pro studium podobností v rovině |
| 4. Formalizace matematiky | rozklad na třídy ekvivalence, formální konstrukce přirozených, celých a racionálních čísel, počítání v okruzích zbytkových tříd |
| *Vektory a matice* | |
| 5. Determinanty | abstraktní pohled na Gaussovu eliminaci a její důsledky, Cauchyova a Laplaceova věta o determinantech, algebraicky adjungované matice |
| 6. Báze a dimenze | abstraktní vektorové prostory, existence báze, dimenze podprostorů, unitární prostory |
| 7. Lineární zobrazení | matice zobrazení, transformace souřadnic, speciální zobrazení (ortogonální, unitární, samoadjungované, projekce apod.) |
| *Lineární modely* | |
| 8. Modely založené na lineárních rovnicích | lineární formy, dualita v lineárním programování, důkaz základní věty o existenci řešení |
| 9. Nezáporné matice, spektrální teorie | Perronova-Frobeniova věta pro nezáporné matice, důsledky pro iterované procesy, diagonalizace unitárních a samoadjungovaných zobrazení |
| 10. Rozklady matic | kanonické tvary matic, rozklady, pseudoinverze |
| *Analytická geometrie* | |
| 11. Afinní a euklidovská geometrie | afinní kombinace bodů, transformace souřadnic, poměry, euklidovská klasifikace kvadrik |
| 12. Projektivní geometrie a kvadriky | kvadratické formy, projektivní rozšíření afinních prostorů, afinní klasifikace kvadrik |

|  |  |
| --- | --- |
| **MB102 - Diferenciální a integrální počet** | Přednášky přibližují základní postupy diferencování a integrování a snaží se zároveň ukazovat související matematické modely reálných praktických problémů; výklad bude zaměřen na osvojení praktických dovedností, včetně schopnosti formulovat příslušný model. |
| *Zřízení ZOO* | |
| 1. Polynomy a spliny | interpolace dat polynomy, Lagrangeův problém, derivace polynomu, Hermiteův interpolační problém, kubické spliny |
| 2. Posloupnosti a limity | přehled vlastností reálných a komplexních čísel, hromadné body posloupností, limity |
| 3. Limity funkcí, spojitost a derivace | limita funkcí, spojitost, derivace, základní vlastnosti spojitých a diferencovatelných funkcí |
| 4. Mocninné řady, elementární funkce | mocninné řady, poloměr konvergence, přehled elementárních funkcí |
| *Diferenciální a integrální počet* | |
| 5. Taylorův rozvoj a průběh funkce | derivace vyšších řádů, Taylorův polynom, kritické body, extrémy a asymptoty funkcí |
| 6. Integrace | primitivní funkce, Riemannův integrál, základní vlastnosti |
| 7. Délka, obsah, objem | délka křivek, obsah a objem útvarů, nevlastní integrály |
| 8. Posloupnosti a řady funkcí | stejnoměrná konvergence posloupnosti a řad funkcí, důsledky pro limitní procesy |
| 9. Numerická derivace a integrace | jednoduchá numerická schémata pro diference a numerickou integraci |
| *Spojité modely* | |
| 10. Aproximace funkcí | Využití integrace pro definici vzdálenosti funkcí, ortogonální systémy funkcí, aproximace |
| 11. Fourierovy řady | Fourierovy řady a jejich diskrétní forma |
| 12. Konvoluce | konvoluce funkcí, diskrétní konvoluce |

|  |  |
| --- | --- |
| **MB202 - Diferenciální a integrální počet B** | Přednášky podávají teoretický i praktický výklad diferencování a integrování; snaží se zároveň poukazovat na související matematické modely reálných praktických problémů; absolventi by měli získat teoretické i praktické dovednosti, včetně schopnosti navrhovat příslušné modely. |
| *Zřízení ZOO* | |
| 1. Polynomy a spliny, axiomatika reálných a komplexních čísel | interpolace dat polynomy, Lagrangeův problém, derivace polynomu, Hermiteův interpolační problém, kubické spliny; axiomatika a konstrukce reálných a komplexních čísel, hromadné body posloupností, Cauchyovské posloupnosti, uspořádání, suprema a infima |
| 2. Topologie reálných a komplexních čísel, posloupnosti a limity | intervaly, otevřené, uzavřené a kompaktní množiny, limity posloupností a funkcí, rozšířená reálná osa, základní vlastnosti limit |
| 3. Spojitost a derivace | spojitost, derivace, základní vlastnosti spojitých a diferencovatelných funkcí |
| 4. Mocninné řady, elementární funkce | definice mocninných a exponenciálních funkcí (vycházející ze spojitosti), mocninné řady, komplexní exponenciála a goniometrické funkce, poloměr konvergence |
| *Diferenciální a integrální počet* | |
| 5. Taylorův rozvoj a průběh funkce | derivace vyšších řádů, Taylorův polynom, kritické body, extrémy a asymptoty funkcí, diferenciál, křivost křivky, analytické a hladké funkce |
| 6. Integrace | primitivní funkce, vztah Newtonova a Riemannova integrálu, základní vlastnosti integrace |
| 7. Délka, obsah, objem | délka křivek, obsah a objem útvarů, měřitelnost množin, nevlastní integrály |
| 8. Posloupnosti a řady funkcí | stejnoměrná konvergence posloupnosti a řad, důsledky pro limitní procesy, Laurantovy řady v komplexní proměnné, silnější koncepty integrace |
| 9. Numerická derivace a integrace | jednoduchá numerická schémata pro diference a numerickou integraci, včetně odhadů chyb |
| *Spojité modely* | |
| 10. Aproximace funkcí | Využití integrace pro definici vzdálenosti funkcí, ortogonální systémy funkcí, aproximace pomocí ortogonálních projekcí |
| 11. Fourierovy řady | Abstraktní Fourierovy řady a jejich diskrétní formy, poznámky k waveletům |
| 12. Konvoluce a Fourierova transformace | konvoluce funkcí, odvození Fourierovy transformace pro Riemannovsky integrovatelné funkce, dekonvoluce, diskrétní transformace, konvoluce a dekonvoluce. |

|  |  |
| --- | --- |
| **MB103 - Spojité modely a statistika** | Přednášky rozšiřují postupy diferencování a integrování na problémy s více parametry, včetně problematiky diferenciálních rovnic; druhá polovina semestru je věnována statistice a pravděpodobnosti; výklad se v obou částech omezí na elementární aspekty a snaží se zároveň průběžně ukazovat související matematické modely reálných praktických problémů; výklad bude zaměřen na osvojení praktických dovedností, včetně schopnosti formulovat příslušný model. |
| *Diferenciální a integrální počet více proměnných* | |
| 1. Funkce více proměnných, diferenciál | parciální derivace, diferenciál funkce, parciální derivace vyšších řádů, |
| 2. Derivace zobrazení, Taylorův polynom | Taylorova věta pro funkce více proměnných, geometrický význam derivace zobrazení (Jacobiho matice), implicitní funkce |
| 3. Extrémy a vázané extrémy funkcí | kritické body, Hessián, extrémy funkcí více proměnných, vázané extrémy |
| 4. Násobné integrály | integrace funkcí více proměnných (Riemannův integrál), násobné integrály, záměna mezí integrace (Fubiniho věta) |
| *Diferenciální rovnice* | |
| 5. Obyčejné diferenciální rovnice (ODE) | řešení obyčejných diferenciálních rovnic, rovnice se separovanými proměnnými, homogenní a nehomogenní lineární ODE (algoritmus pro rovnice s konstantními koeficienty) |
| 6. Numerické metody pro řešení ODE | přehled základních numerických metod pro řešení ODE |
| *Popisná statistika* | |
| 7. Statistika dat | základní číselné charakteristiky (průměr, medián, percentil, rozptyl), příklady prezentace a analýzy dat (krabicové diagramy) |
| *Pravděpodobnost* | |
| 8. Náhodné jevy a veličiny | přehled základních rozdělení náhodných veličin (diskrétní i spojité), |
| 9. Číselné charakteristiky rozdělení, korelace náhodných veličin | náhodné vektory, střední hodnota, rozptyl, korelace, matice kovariance, nezávislost veličin |
| 10. limitní přechody | srovnání spojitých a diskrétních veličin (praktické úlohy a náznak centrální limitní věty) |
| *Statistika* | |
| 11. Výběry a nestranné odhady | výběr z populace, číselné charakteristiky a jejich nestranné odhady |
| 12. Odhady parametrů a testování hypotéz | kvantilové funkce a kritické hodnoty, příklady testování hypotéz |

|  |  |
| --- | --- |
| **MB203 - Spojité modely a statistika B** | Přednášky rozšiřují postupy diferencování a integrování na problémy s více parametry, včetně problematiky diferenciálních rovnic a poznámek k variačnímu počtu; druhá polovina semestru je věnována statistice a pravděpodobnosti a jejich teoretickým souvislostem; snaží se zároveň průběžně ukazovat související matematické modely reálných praktických problémů; výklad bude zaměřen na osvojení praktických dovedností, včetně schopnosti formulovat příslušný model. |
| *Diferenciální a integrální počet více proměnných* | |
| 1. Funkce více proměnných, diferenciál | parciální derivace, diferenciál funkce, parciální derivace vyšších řádů, souvislosti s lineární algebrou |
| 2. Derivace zobrazení, Taylorův polynom | Taylova věta pro zobrazení, geometrický význam derivace zobrazení (Jacobiho matice), věta o inverzním zobrazení, věta o implicitní funkci |
| 3. Extrémy a vázané extrémy funkcí | kritické body, Hessián, extrémy funkcí více proměnných, vázané extrémy |
| 4. Násobné integrály | integrace funkcí více proměnných (Riemannův integrál), násobné integrály, záměna mezí integrace (Fubiniho věta) |
| *Diferenciální rovnice a variační počet* | |
| 5. Diferenciální rovnice | existence a jednoznačnost řešení systémů obyčejných diferenciálních rovnic, rovnice se separovanými proměnnými, homogenní a nehomogenní lineární ODE (algoritmus pro rovnice s konstantními koeficienty), poznámky k parciálním diferenciálním rovnicím, přehled elementárních numerických metod pro řešení obyčejných i parciálních diferenciálních rovnic |
| 6. Variační počet | elementární úvod do variačního počtu, řešené příklady |
| *Popisná statistika* | |
| 7. Statistika dat | základní číselné charakteristiky (průměr, medián, percentil, rozptyl), příklady prezentace a analýzy dat (krabicové diagramy), náznak souvislostí s pravděpodobností |
| *Pravděpodobnost* | |
| 8. Náhodné jevy a veličiny | přehled základních rozdělení náhodných veličin (diskrétní i spojité), distribuční funkce, transformace veličin |
| 9. Číselné charakteristiky rozdělení, korelace náhodných veličin | náhodné vektory, střední hodnota, rozptyl, korelace, matice kovariance, nezávislost veličin |
| 10. limitní přechody | srovnání spojitých a diskrétních veličin, centrální limitní věty, příklady |
| *Statistika* | |
| 11. Výběry a nestranné odhady | výběr z populace, číselné charakteristiky a jejich nestranné odhady |
| 12. Odhady parametrů a testování hypotéz | kvantilové funkce a kritické hodnoty, příklady testování hypotéz |

|  |  |
| --- | --- |
| **MB104 – Diskrétní matematika** | Přednášky poskytnou základní nástroje teorie čísel a elementární kombinatoriky spolu s využitím některých nástrojů matematické analýzy pro řešení praktických úloh diskrétní matematiky. Teoretické poznatky budou demonstrovány na konkrétních aplikačních úlohách. |
| *Teorie čísel* | |
| 1. Dělitelnost | gcd, rozšířený Euklidův algoritmus (Bezout); počítání s velkými čísly (zejména gcd, modulární umocňování) |
| 2. Prvočísla | vlastnosti, základní věta aritmetiky, faktorizace, testování prvočíselnosti a složenosti (Rabin-Miller, Mersenneho prvočísla); |
| 3. Kongruence | základní vlastnosti; Malá Fermatova věta; Eulerova věta, řád čísla |
| 4. Řešení kongruencí | řešení lineárních kongruencí a jejich soustav, čínská zbytková věta |
| 5. Kongruence vyšších řádů | binomické kongruence a primitivní kořeny, problém diskrétního logaritmu |
| *Aplikace teorie čísel* | |
| 6. Úvod do asymetrické kryptografie | RSA, DH, ElGamal, DSA |
| 7. Základy teorie kódování | lineární a polynomiální kódy |
| *Kombinatorické výpočty* | |
| 8. Základy kombinatoriky | binomická věta a zobecněná binomická věta; základní kombinatorické identity a jejich odvozování |
| 9. Odvozování kombinatorických identit | základní způsoby řešení kombinatorických úloh, Catalanova čísla |
| 10. Vytvořující funkce | algebra formálních mocninných řad; (obyčejné) vytvořující funkce; exponenciální vytvořující funkce; pravděpodobnostní vytvořující funkce; řešení kombinatorických úloh pomocí vytvořujících funkcí |
| 11. Řešení základních rekurencí | Fibonacciho čísla, Cayleyho formule a další |
| 12. Určování složitosti rekurentního algoritmu | využití vytvořujících funkcí, asymptotické odhady |

|  |  |
| --- | --- |
| **MB204 – Diskrétní matematika B** | Přednášky poskytnou základní nástroje abstraktní algebry, teorie čísel a elementární kombinatoriky spolu s využitím některých nástrojů matematické analýzy pro řešení praktických úloh diskrétní matematiky. Teoretické poznatky budou demonstrovány na konkrétních aplikačních úlohách. |
| *Úvod do počítačové algebry* | |
| 1. Grupy | permutace, symetrie, modulární grupy, homomorfismy a faktorgrupy, akce grupy – Burnsideovo lemma |
| 2. Okruhy a tělesa | polynomy a jejich kořeny, dělitelnost v oborech integrity, zejména dělitelnost v Z a v okruhu polynomů (nad tělesem), ideály. |
| 3. Algebra v computer science | Konečná tělesa a jejich základní vlastnosti, využití v computer science. Polynomy více proměnných – Gröbnerova báze. |
| *Teorie čísel* | |
| 4. Dělitelnost | gcd, rozšířený Euklidův algoritmus (Bezout); počítání s velkými čísly (zejména gcd, modulární umocňování); prvočísla - vlastnosti, základní věta aritmetiky, faktorizace, testování prvočíselnosti a složenosti (Rabin-Miller, Mersenneho prvočísla); |
| 5. Kongruence | kongruence - základní vlastnosti, Malá Fermatova věta; Eulerova věta; řešení lineárních kongruencí a jejich soustav; |
| 6. Kongruence vyšších řádů | binomické kongruence a primitivní kořeny; diskrétní logaritmus; kvadratické kongruence - Legendreův symbol a zákon kvadratické reciprocity |
| 7. testování prvočíselnosti a faktorizace | testování prvočíselnosti až po AKS, hledání dělitele, eliptické křivky (úvod); |
| *Aplikace teorie čísel* | |
| 8. Kryptografie a kódování | stručný úvod do asymetrické kryptografie (RSA, DH, ElGamal, DSA, ECC); základy teorie kódování - lineární a polynomiální kódy; aplikace Fourierovy transformace pro rychlé výpočty (např. Schönhage-Strassen) |
| *Kombinatorické výpočty* |  |
| 9. Základy kombinatoriky | binomická věta a zobecněná binomická věta; základní kombinatorické identity a jejich odvozování; základní způsoby řešení kombinatorických úloh, Catalanova čísla |
| 10. Vytvořující funkce | algebra formálních mocninných řad; (obyčejné) vytvořující funkce; exponenciální vytvořující funkce; pravděpodobnostní vytvořující funkce; řešení kombinatorických úloh pomocí vytvořujících funkcí |
| 11. Řešení základních rekurencí | Fibonacciho čísla, Cayleyho formule a další; určování složitosti rekurentního algoritmu |
| 12. Kombinatorické úlohy computer science | grafové aplikace, složitost, analýza hashování |