Zkouška MB101 a MB201, 21.1.2013

Příklad 1. *(5b.) Rozhodněte, za existuje úsečka PQ, kde $P \in p$, $Q \in q$, přičemž přímky p a q jsou dány vztahy*

$$p : [1, -1, 2] + t(1, 0, 1),\ t \in \mathbb{R}, \quad q : [2, -3, 1] + s(-1, -1, 1)\ s \in \mathbb{R}$$

a navíc bod $[0, 1, 3]$ leží na úsečce PQ.

Řešení. Neexistuje. Přímka procházející daným bodem a protínající jak p tak q je daná body $P = [1, -1, 2]$ ($\in p$) a $Q = [2, -3, 1]$ ($\in q$). Daný bod však na úsečce PQ neleží. □

Příklad 2. *(5b.) Určete jedinou posloupnost vyhovující rekurentnímu vztahu*

$$x_n = -x_{n-1} + 6x_{n-2} - 8n + 10, \quad n \geq 2$$

se členy $x_1 = 4$, $x_2 = 20$.

Řešení. $x_n = 2^n + (-3)^n + 2n + 3$. □

Příklad 3. *(5b.) Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení. Jednonásobná vlastní hodnota 2, příslušný vektorový prostor vlastních vektorů $\langle(1, 1, 0)\rangle$, dvojnásobná vlastní hodnota 1, příslušný vektorový prostor vlastních vektorů $\langle(1, 0, -1), (1, 1, 1)\rangle$. □

Příklad 4. *(5b.) Adam, Bedřich a Čeněk si házejí balónem. Adam jej s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ hodí Čeňkovi, s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ Bedřichovi. Bedřich jej s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ hodí Adamovi a s pravděpodobností $\frac{2}{3}$ Čeňkovi. Konečně Čeněk jej hodí s pravděpodobností $\frac{4}{5}$ Adamovi a s pravděpodobností $\frac{1}{5}$ Bedřichovi. Sestavte matici tohoto Markovova procesu a určete, s jakou pravděpodobností se míč bude nacházet po velkém počtu hodů u Bedřicha (každý potřebuje stejný čas na odhození balónu).*

Řešení. Matice procesu je $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$, vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě 1 je $(\frac{13}{9}, 1, \frac{25}{18})$, hledaná pravděpodobnost pak $\frac{1}{13/9+1+25/18} = \frac{6}{23}$.

$\frac{6}{23}$ □

Příklad 5. *(8b.) Osm karet, čtyři esa a čtyři krále rozdělíme po dvou mezi čtyři hráče. Jaká je pravděpodobnost, že někdo dostane alespoň dvě esa? Výsledek vyjádřete ve tvaru podílu dvou dvojciferných čísel.*

Řešení.

$$1 - \frac{4! \cdot 4!}{\frac{8!}{2^4}} = \frac{27}{35}$$

. □