

Zkouška MB101, 31.1.2013

Příklad 1.(5b.) V prostoru \mathbb{R}^3 je dána zrcadlová rovina $y = 0$. Určete délku dráhy, kterou urazí světelný paprsek při cestě z bodu $[1, 2, 3]$ odrazem o zrcadlovou rovinu do bodu $[2, 1, 2]$.

Řešení. $\sqrt{11}$ □

Příklad 2.(5b.) Určete jedinou posloupnost vyhovující rekurentnímu vztahu

$$x_n = 2x_{n-1} + 8x_{n-2} - 9, \quad n \geq 2$$

se členy $x_1 = 1$, $x_2 = 25$.

Řešení. $x_n = 4^n + 2 \cdot (-2)^n + 1$. Což je mimochodem $(2^n + (-1)^n)^2$, takže úloha by mohla znít: dokažte, že každý člen této posloupnosti je čtvercem přirozeného čísla .. :-). □

Příklad 3.(5b.) Určete jaké zobrazení v \mathbb{R}^3 zadává matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení. Zrcadlení podle roviny $\langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$. □

Příklad 4. (5b.) Jistá populace malých hlodavců se množí následujícím způsobem: hlodavci stáří do jednoho měsíce splodí v průměru jednoho hlodavce, na jednoho hlodavce stáří mezi jedním a dvěma měsíci připadá v průměru 12 nově narozených hlodavců. Starší hlodavci neplodí. Umírá polovina hlodavců stáří do jednoho měsíce i polovina hlodavců stáří mezi měsícem a dvěma měsíci. Více než tři měsíců se nedožije žádný. Na jakém poměru se ustálí počet hlodavců stáří do jednoho měsíce ku počtu hlodavců stáří mezi jedním a dvěma měsíci ku počtu hlodavců stáří mezi dvěma a třemi měsíci.

Řešení. $36 : 6 : 1$. □

Příklad 5.(5b.) Aleš má dvě speciální hrací kostky, na jedné padá vždy šestka, na druhé padá pouze čtyřka, pětka, či šestka, každé číslo se třetinovou pravděpodobností. Jaká je pravděpodobnost, že mu při hodu těmito dvěma kostkami padne vyšší součet než Martinovi, který hází se dvěma poctivými kostkami. Výsledek vyjádřete ve tvaru podílu dvou dvouciferných čísel.

Řešení. $\frac{49}{54}$. □