

# Matematika I – 6a

## Vektorové prostory, báze, ortogonalizace

Jan Slovák

Masarykova univerzita, Fakulta informatiky

22. 10. 2012

# Obsah přednášky

- 1 Vektorové prostory
- 2 Báze a souřadnice
- 3 Transformace souřadnic
- 4 Velikost vektorů a ortonormální báze

Uvažujme systém  $m$  lineárních rovnic pro  $n$  proměnných a předpokládejme, že jde o rovnice tvaru  $A \cdot x = 0$ , tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Díky vlastnosti distributivity pro násobení matic je okamžitě zřejmé, že součet dvou řešení  $x = (x_1, \dots, x_n)$  a  $y = (y_1, \dots, y_n)$  splňuje

$$A \cdot (x + y) = A \cdot x + A \cdot y = 0$$

a je tedy také řešením. Stejně tak zůstává řešením i skalární násobek  $a \cdot x$ .

Množina všech řešení pevně zvoleného systému rovnic s nulovou pravou stranou je proto uzavřená na sčítání vektorů a násobení vektorů skaláry. To byly základní vlastnosti vektorů dimenze  $n$  v  $\mathbb{K}^n$ . Teď ale máme vektory v prostoru řešení s  $n$  souřadnicemi a „dimenze“ tohoto prostoru určitě nemá být  $n$  (pokud matice systému není nulová).

Potřebujeme proto obecnější definici vektorového prostoru a jeho dimenze.

## Vektorové (pod)prostory

**Vektorový prostor**  $V$  nad polem skalárů  $\mathbb{K}$  je množina s operací sčítání, pro kterou jsou splněny axiomy komutativní grupy, a násobení skaláry takové, že platí

$$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \quad (\text{V1})$$

$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \quad (\text{V2})$$

$$a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v \quad (\text{V3})$$

$$1 \cdot v = v \quad (\text{V4})$$

Budeme sice pracovat pouze s podmnožinami  $V \subset \mathbb{R}^n$  majícími všechny vlasti vektorových prostorů, podstatné ale pro nás budou pouze následující vlastnosti, které lze také odvodit z abstraktní definice vektorového prostoru:

### Theorem

*Nechť  $V$  je vektorový prostor nad polem skalárů  $\mathbb{K}$ , dále uvažme  $a, b, a_i \in \mathbb{K}$ , vektory  $u, v, u_j \in V$ . Potom*

- 1  $a \cdot u = 0$  právě když  $a = 0$  nebo  $u = 0$
- 2  $(-1) \cdot u = -u$
- 3  $a \cdot (u - v) = a \cdot u - a \cdot v$
- 4  $(a - b) \cdot u = a \cdot u - b \cdot u$
- 5  $(\sum_{i=1}^n a_i) \cdot (\sum_{j=1}^m u_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \cdot u_j$ .

U matic jsme pracovali s tzv. lineárními kombinacemi řádků matice. S obecnými vektory budeme zacházet zcela analogicky: Výrazy tvaru  $a_1 \cdot v_1 + \dots + a_k \cdot v_k$  nazýváme *lineární kombinace* vektorů  $v_1, \dots, v_k \subset V$ .

Množina vektorů  $M \subset V$  ve vektorovém prostoru  $V$  nad  $\mathbb{K}$  se nazývá *lineárně nezávislá* jestliže pro každou  $k$ -tici vektorů  $v_1, \dots, v_k \in M$  a každé skaláry  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$  platí:

$$a_1 \cdot v_1 + \dots + a_k \cdot v_k = 0 \quad \implies \quad a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$$

Posloupnost vektorů  $v_1, \dots, v_k$  nazveme *lineárně nezávislou* jestliže  $v_1, \dots, v_k$  jsou po dvou různé a  $\{v_1, \dots, v_k\}$  je lineárně nezávislá. Množina  $M$  vektorů je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá.

Přímo z definice pak vyplývá, že neprázdná podmnožina  $M$  vektorů ve vektorovém prostoru nad polem skalárů  $\mathbb{K}$  je závislá právě, když je jeden z jejích vektorů vyjádřitelný jako lineární kombinace ostatních.

Přímo z definic plyne, že každá podmnožina lineárně nezávislé množiny  $M$  je lineárně nezávislá. Stejně snadno vidíme, že  $M \subset V$  je lineárně nezávislá právě tehdy, když každá konečná podmnožina v  $M$  je lineárně nezávislá.

Podmnožina  $M \subset V$  se nazývá **vektorovým podprostorem** jestliže spolu se zúženými operacemi sčítání a násobení skaláry je sama vektorovým prostorem. Tzn. požadujeme

$$\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall v, w \in M, a \cdot v + b \cdot w \in M.$$

Prostor  $n$ -tic skalárů  $\mathbb{R}^m$  se sčítáním a násobením po složkách je vektorový prostor nad  $\mathbb{R}$ , ale také vektorový prostor nad  $\mathbb{Q}$ . Např. pro  $m = 2$ , jsou vektory  $(1, 0), (0, 1) \in \mathbb{R}^2$  lineárně nezávislé, protože z  $a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = (0, 0)$  plyne  $a = b = 0$ . Dále, vektory  $(1, 0), (\sqrt{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$  jsou lineárně závislé nad  $\mathbb{R}$ , protože  $\sqrt{2} \cdot (1, 0) = (\sqrt{2}, 0)$ , ovšem nad  $\mathbb{Q}$  jsou lineárně nezávislé! Nad  $\mathbb{R}$  tedy tyto dva vektory „generují“ jednorozměrný podprostor, zatímco nad  $\mathbb{Q}$  je dvourozměrný.



Polynomy stupně nejvýše  $m$  tvoří vektorový prostor  $\mathbb{R}_m[x]$ .

Polynomy můžeme chápat jako zobrazení  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a sčítání a

násobení skaláry definujeme takto:  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ,

$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$ . Polynomy všech stupňů také tvoří vektorový

prostor  $\mathbb{R}_\infty[x]$  a  $\mathbb{R}_m[x] \subset \mathbb{R}_n[x]$  je vektorový podprostor pro

všechna  $m \leq n \leq \infty$ . Podprostory jsou např. všechny sudé

polynomy nebo liché polynomy ( $f(-x) = \pm f(x)$ ).

Úplně analogicky jako u polynomů můžeme definovat strukturu

vektorového prostoru na množině všech zobrazení  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nebo

všech zobrazení  $M \rightarrow V$  libovolné pevně zvolené množiny  $M$  do

vektorového prostoru  $V$ .

Protože podmínka v definici podprostoru obsahuje pouze univerzální kvantifikátory, je jistě průnik podprostorů opět podprostor. Snadno to ověříme i přímo: Necht'  $W_i$ ,  $i \in I$ , jsou vektorové podprostory ve  $V$ ,  $a, b \in \mathbb{K}$ ,  $u, v \in \bigcap_{i \in I} W_i$ . Pak pro všechny  $i \in I$ ,  $a \cdot u + b \cdot v \in W_i$ , to ale znamená, že  $a \cdot u + b \cdot v \in \bigcap_{i \in I} W_i$ . Zejména je tedy podprostorem průnik všech podprostorů  $W \subset V$ , které obsahují předem danou množinu vektorů  $M \subset V$ . Říkáme, že takto  $M$  **generuje** podprostor  $\langle M \rangle$ , nebo že prvky  $M$  jsou **generátory** podprostoru  $\langle M \rangle$ .

## Theorem

*Pro každou podmnožinu  $M \subset V$  platí*

- 1  $\langle M \rangle = \{a_1 \cdot u_1 + \dots + a_k \cdot u_k; k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}, u_j \in M, j = 1, \dots, k\}$
- 2  $M = \langle M \rangle$  právě když  $M$  je vektorový podprostor
- 3 jestliže  $N \subset M$  pak  $\langle N \rangle \subset \langle M \rangle$  je vektorový podprostor
- 4  $\langle \emptyset \rangle = \{0\} \subset V$ , triviální podprostor.

Nechť  $V_i$ ,  $i \in I$ , jsou podprostory ve  $V$ . Pak podprostor generovaný jejich sjednocením, tj.  $\langle \cup_{i \in I} V_i \rangle$ , nazýváme **součtem podprostorů**  $V_i$ . Značíme  $\sum_{i \in I} V_i$ . Zejména pro  $V_1, \dots, V_k \subset V$ ,

$$V_1 + \dots + V_k = \langle V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k \rangle.$$

Viděli jsme, že každý prvek v uvažovaném součtu podprostorů můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z podprostorů  $V_i$ . Protože však je sčítání vektorů komutativní, lze k sobě poskládat členy patřící do stejného podprostoru a pro konečný součet  $k$  podprostorů tak dostáváme

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k = \{v_1 + \dots + v_k; v_i \in V_i, i = 1, \dots, k\}.$$

Součet  $W = V_1 + \cdots + V_k \subset V$  se nazývá **přímý součet** podprostorů, jsou-li průniky všech dvojic triviální, tj.  $V_i \cap V_j = \{0\}$  pro všechny  $i \neq j$ . V takovém případě lze každý vektor  $w \in W$  napsat právě jedním způsobem jako součet

$$w = v_1 + \cdots + v_k,$$

kde  $v_i \in V_i$ . Pro přímé součty píšeme

$$W = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k = \bigoplus_{i=1}^k V_i.$$

Podmnožina  $M \subset V$  se nazývá **báze vektorového prostoru**  $V$ , jestliže  $\langle M \rangle = V$  a  $M$  je lineárně nezávislá. Vektorový prostor, který má konečnou bázi nazýváme **konečněrozměrný**, mohutnost báze nazýváme **dimenzí**  $V^1$ . Nemá-li  $V$  konečnou bázi, říkáme, že  $V$  je **nekonečněrozměrný**. Píšeme  $\dim V = k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , případně  $k = \infty$ . Bázi  $k$ -rozměrného prostoru budeme obvykle zapisovat jako  $k$ -tici  $\underline{v} = (v_1, \dots, v_k)$  bázevých vektorů. Jde tu především o zavedení konvence: U konečněrozměrných podprostorů budeme totiž vždy uvažovat bázi včetně zadaného pořadí prvků i když jsme to takto, striktně vzato, nedefinovali.

Zjevně, je-li  $(v_1, \dots, v_n)$  bazí  $V$ , je celý prostor  $V$  přímým součtem jednorozměrných podprostorů

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle.$$

---

<sup>1</sup>Všimněme si, že triviální podprostor je generován prázdnou množinou, která je "prázdnou" bazí. Má tedy triviální podprostor dimenzi nulovou.

Intuitivně lze jistě věřit následujícímu tvrzení. S přesným důkazem (ukazujícím, proč je k tomu třeba vlastností pole skalárů se vrátíme v rozšířené přednášce). Pro vektory coby  $n$ -tice skalárů je možné i formálně ověřit postupy, které jsme potkali u Gausovy eliminace minule.

### Theorem

*Z libovolné konečné množiny generátorů vektorového prostoru  $V$  lze vybrat bázi. Každá báze  $V$  má přitom stejný počet prvků.*

Zapamatujme si:

### Vlastnosti bazí

- 1 Každé dvě báze konečněrozměrného vektorového prostoru mají stejný počet vektorů, tzn. že naše definice dimenze nezávisí na volbě báze.
- 2 Má-li  $V$  konečnou bázi, lze každou lineárně nezávislou množinu doplnit do báze.
- 3 Báze konečněrozměrných vektorových prostorů jsou právě maximální lineárně nezávislé množiny
- 4 Báze prostoru s konečnou dimenzí jsou právě minimální množiny generátorů



## Theorem

*Nechť  $W, W_1, W_2 \subset V$  jsou podprostory v prostoru konečné dimenze. Pak platí*

- 1  $\dim W \leq \dim V$
- 2  $V = W$  právě když  $\dim V = \dim W$
- 3  $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$ .

Když je množina  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  báze, můžeme každý vektor  $v \in V$  vyjádřit jako lineární kombinaci  $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ .  
Předpokládejme, že to uděláme dvěma způsoby:

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n.$$

Potom ale

$$0 = (a_1 - b_1) \cdot v_1 + \dots + (a_n - b_n) \cdot v_n$$

a proto  $a_i = b_i$  pro všechna  $i = 1, \dots, n$ . Lze tedy každý vektor zadat právě jediným způsobem jako lineární kombinaci bázových vektorů.

Koeficienty této jediné lineární kombinace vyjadřující daný vektor  $v \in V$  ve zvolené bázi  $(v_1, \dots, v_n)$  se nazývají **souřadnice vektoru**  $v$  v této bázi.

Přiřazení, které vektoru  $u = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$  přiřadí jeho souřadnice v bázi  $\underline{v}$ , budeme značit stejným symbolem  $\underline{v} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Má tyto vlastnosti:<sup>2</sup>

- $\underline{v}(u + w) = \underline{v}(u) + \underline{v}(w); \forall u, w \in V$
- $\underline{v}(a \cdot u) = a \cdot \underline{v}(u); \forall a \in \mathbb{K}, \forall u \in V.$

---

<sup>2</sup>Všimněme si, že operace na levých a pravých stranách těchto rovnic nejsou totožné, naopak, jde o operace na různých vektorových prostorech! Při této příležitosti se také můžeme zamyslet nad obecným případem báze  $M$  (možná nekonečněrozměrného) prostoru  $V$ . Báze pak nemusí být spočetná, pořád ale ještě můžeme definovat zobrazení  $\underline{M} : V \rightarrow \mathbb{K}^M$  (tj. souřadnice vektoru jsou zobrazení z  $M$  do  $\mathbb{K}$ ).

Nechť  $V$  a  $W$  jsou vektorové prostory nad týmž polem skalárů  $\mathbb{K}$ .  
Zobrazení  $f : V \rightarrow W$  se nazývá **lineární zobrazení**  
(**homomorfismus**) jestliže platí:

- 1  $f(u + v) = f(u) + f(v), \forall u, v \in V$
- 2  $f(a \cdot u) = a \cdot f(u), \forall a \in \mathbb{K}, \forall u \in V.$

Samozřejmě, že jsme taková zobrazení již viděli ve formě násobení matic:

$$\mathbb{K}^n \ni x \mapsto A \cdot x \in \mathbb{K}^m$$

s maticí typu  $m/n$  nad  $\mathbb{K}$ .

Je tomu i naopak – v souřadnicích je každé lineární zobrazení dané pomocí násobení vhodnou maticí:

Uvažujme libovolné vektorové prostory  $V, W$  nad  $\mathbb{K}$  s  $\dim V = n$ ,  $\dim W = m$  a mějme lineární zobrazení  $f : V \rightarrow W$ . Pro každou volbu bází  $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$  na  $V$ ,  $\underline{v} = (v_1, \dots, v_m)$  na  $W$ , máme k dispozici příslušná přiřazení souřadnic:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \underline{u} \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow \underline{v} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f_{\underline{u}, \underline{v}}} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Přitom je každé lineární zobrazení jednoznačně určeno svými hodnotami na libovolné množině generátorů, zejména tedy na bázi  $\underline{u}$ . Odtud přímo vidíme, že  $f_{\underline{u}, \underline{v}}$  je dáno jako násobení maticí, do jejichž sloupců jsou vepsány souřadnice hodnot zobrazení  $f(u_i)$  v bázi  $\underline{v}$ .

Jestliže za  $V$  i  $W$  zvolíme tentýž prostor, ale s různými bazemi, a za  $f$  identické zobrazení, vyjadřuje náš postup vektory báze  $\underline{u}$  v souřadnicích vzhledem k  $\underline{v}$ . Označme výslednou matici  $T$ . Když pak zadáme vektor  $u$

$$u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$$

v souřadnicích vzhledem k  $\underline{u}$  a dosadíme za  $u_i$ , obdržíme souřadné vyjádření  $\bar{x}$  téhož vektoru v bázi  $\underline{v}$ . Stačí k tomu přeskádat pořadí sčítanců a vyjádřit skaláry u jednotlivých vektorů báze. Podle výše uvedeného postupu musí vyjít  $\bar{x} = T \cdot x$ . Tuto matici nazýváme *matice přechodu* od báze  $\underline{u}$  k bázi  $\underline{v}$ . Matice  $T$  zadávající transformaci souřadnic z báze  $\underline{u}$  do báze  $\underline{v}$  je tedy maticí identického zobrazení  $\text{id}_V : V \rightarrow V$ :

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\text{id}_V} & V \\
 \underline{u} \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow \underline{v} \\
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{(\text{id}_V)_{\underline{u}, \underline{v}}} & \mathbb{K}^n
 \end{array}$$

## Theorem

*Matici  $T$  přechodu (od báze  $\underline{u}$  k bázi  $\underline{v}$ ) získáme tak, že souřadnice vektorů báze  $\underline{u}$  v bázi  $\underline{v}$  napíšeme do sloupců matice  $T$ .*

Funkce matice přechodu je taková, že známe-li souřadnice  $x$  vektoru v bázi  $\underline{u}$ , pak jeho souřadnice v bázi  $\underline{v}$  se obdrží vynásobením sloupce  $x$  maticí přechodu (zleva). Protože inverzní zobrazení k identickému je opět totéž identické zobrazení, je matice přechodu vždy invertibilní a její inverze je právě matice přechodu opačným směrem, tj. od báze  $\underline{v}$  k bázi  $\underline{u}$ .

V geometrii roviny jsem již pracovali nejen s bázemi a lineárními zobrazeními, ale také s velikostí vektorů a jejich úhly. Pro zavedení těchto pojmů jsme použili souřadného vyjádření pro velikost  $v = (x, y)$ :

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

zatímco úhel  $\varphi$  dvou vektorů  $v = (x, y)$  a  $v' = (x', y')$  byl dán

$$\cos \varphi = \frac{xx' + yy'}{\|v\| \|v'\|}.$$

Povšimněme si, že výraz v čitateli posledního výrazu je lineární v každém ze svých argumentů, značíme jej  $\langle v, v' \rangle$  a říkáme mu skalární součin vektorů  $v$  a  $v'$ . Skalární součin je také symetrický ve svých argumentech a platí

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle.$$

Zejména platí, že  $\|v\| = 0$  právě, když  $v = 0$ . Z našich úvah je také vidět, že v Euklidovské rovině jsou dva vektory kolmé právě, když je jejich skalární součin nulový. Zobecníme si tento postup pro libovolné (zatím konečné) dimenze.



# Lineární a multilineární formy

Speciálním případem lineárních zobrazení jsou tzv. **lineární formy**. Jde o lineární zobrazení z vektorového prostoru  $V$  nad polem skalárů  $\mathbb{K}$  do skalárů  $\mathbb{K}$ . Jsou-li dány souřadnice na  $V$ , je přiřazení jednotlivé  $i$ -té souřadnice vektorům právě takovou lineární formou. Při pevně zvolené bázi  $\{1\}$  na  $\mathbb{K}$  jsou s každou volbou báze na  $V$  lineární formy ztotožněny s maticemi typu  $1/n$ , tj. s řádky. Vycházení takové formy na vektoru je pak dáno vynásobením příslušného řádkového vektoru se sloupcem souřadnic.

Množina všech lineárních forem na daném prostoru  $V$  je opět vektorový prostor, značíme jej  $V^*$ . Pokud je  $V$  konečněrozměrný, je  $V^*$  izomorfní prostoru  $V$ . Realizace takového izomorfismu je dána např. volbou tzv. **duální báze** k zvolené bázi na  $V$ , jejímiž prvky  $\alpha_i$  jsou právě formy zadávající  $i$ -tou souřadnici.

Podobně budeme pracovat i se zobrazeními ze součinu  $k$  kopií vektorového prostoru  $V$  do skalárů lineárních v každém argumentu. Hovoříme o  **$k$ -lineárních** formách. Budeme se setkávat (a již jsme je viděli v dimenzi 2) zejména s  $n$ -lineárními antisymetrickými formami (formy objemu) a symetrickými bilineárními formami.

## Definition

**Skalární součin** na vektorovém prostoru  $V$  nad reálnými čísly je bilineární symetrická forma  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že  $\langle v, v \rangle \geq 0$  a je roven nule pouze při  $v = 0$ .

Pro skalární součin se často používá také obvyklé tečky, tj.  $\langle u, v \rangle = u \cdot v$ . Z kontextu je pak třeba poznat, zda jde o součin dvou vektorů (tedy výsledkem je skalár) nebo něco jiného.

## Definition

Vektory  $v$  a  $w \in V$  se nazývají **ortogonální**, jestliže  $\langle v, w \rangle = 0$ .  
Vektor  $v$  se nazývá **normovaný**, jestliže  $\|v\| = 1$ . Báze prostoru  $V$  složená z ortogonálních vektorů se nazývá **ortogonální báze**.  
Jsou-li bázevé vektory navíc i normované, je to **ortonormální báze**.

Úhel  $\varphi$  dvou vektorů  $v$  a  $w$  je dán vztahem

$$\cos \varphi = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

## Theorem

*Skalární součin je v každé ortonormální bázi dán výrazem*

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot y.$$

*V obecné bázi  $V$  existuje symetrická matice  $S$  taková, že*

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot S \cdot y.$$

## Existence ortonormální báze

Přímočaré početní využití kolmých projekcí vede k tzv.

**Grammovu–Schmidtovu ortogonalizačnímu procesu.** Cílem procedury je z dané posloupnosti nenulových generátorů  $v_1, \dots, v_k$  konečněrozměrného prostoru  $V$  vytvořit ortogonální množinu nenulových generátorů pro  $V$ .

Začneme prvním (nenulovým) vektorem  $v_1$  a spočteme kolmou projekci  $v_2$  do

$$\langle v_1 \rangle^\perp \subset \langle \{v_1, v_2\} \rangle.$$

Výsledek bude nenulový právě, když je  $v_2$  nezávislé na  $v_1$ . Ve všech dalších krocích budeme postupovat obdobně.

V  $\ell$ -tém kroku tedy chceme, aby pro  $v_{\ell+1} = u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell$  platilo  $\langle v_{\ell+1}, v_i \rangle = 0$ , pro všechny  $i = 1, \dots, \ell$ . Odtud plyne

$$0 = \langle u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell, v_i \rangle = \langle u_{\ell+1}, v_i \rangle + a_i \langle v_i, v_i \rangle$$

a je vidět, že vektory s požadovanými vlastnostmi jsou určeny jednoznačně až na násobek.

Dokázali jsme tedy následující tvrzení:

### Theorem

*Nechť  $(u_1, \dots, u_k)$  je lineárně nezávislá  $k$ -tice vektorů prostoru  $V$  se skalárním součinem. Pak existuje ortogonální systém vektorů  $(v_1, \dots, v_k)$  takový, že  $v_i \in \langle u_1, \dots, u_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Získáme je následující procedurou:*

- *Z nezávislosti vektorů  $u_i$  plyne  $u_1 \neq 0$ . Položíme  $v_1 = u_1$ .*
- *Máme-li již vektory  $v_1, \dots, v_\ell$  potřebných vlastností klademe*

$$v_{\ell+1} = u_{\ell+1} + a_1 v_1 + \dots + a_\ell v_\ell, \quad a_i = -\frac{\langle u_{\ell+1}, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$$

Kdykoliv máme ortogonální bázi vektorového prostoru  $V$ , stačí vektory vynormovat a získáme bázi ortonormální. Dokázali jsme proto také:

### Corollary

*Na každém vektorovém prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.*

V ortonormální bázi se obzvlášť snadno spočtou souřadnice a kolmé projekce. Skutečně, mějme ortonormální bázi  $(e_1, \dots, e_n)$  prostoru  $V$ . Pak každý vektor  $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  splňuje

$$\langle e_i, v \rangle = \langle e_i, x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \rangle = x_i$$

a platí tedy vždy

$$v = \langle e_1, v \rangle e_1 + \dots + \langle e_n, v \rangle e_n.$$



Pokud máme zadán podprostor  $W \subset V$  a jeho ortonormální bázi  $(e_1, \dots, e_k)$ , jde ji jistě doplnit na ortonormální bázi  $(e_1, \dots, e_n)$  celého  $V$ . Kolmá projekce obecného vektoru  $v \in V$  do  $W$  pak bude dána vztahem

$$v \mapsto \langle e_1, v \rangle e_1 + \dots + \langle e_n, v \rangle e_k.$$

Pro kolmou projekci nám tedy stačí znát jen ortonormální bázi podprostoru  $W$ , na nějž promítáme.

Povšimněme si také, že obecně jsou projekce  $f$  na podprostor  $W$  podél  $U$  a projekce  $g$  na  $U$  podél  $W$  svázány vztahem  $g = \text{id}_V - f$ . Je tedy u kolmých projekcí na daný podprostor  $W$  vždy výhodnější počítat ortonormální bázi toho z dvojice  $W, W^\perp$ , který má menší dimenzi.