

# Diferenciální rovnice

## 1. ÚLOHA

Řešte následující diferenciální rovnice metodou separace proměnných (značení:  $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ ):

$$(a) \quad 2xy\dot{y} + 1 + y^2 = 0 \quad [y = \pm\sqrt{\frac{c}{x} - 1}]$$

$$(b) \quad \dot{y} \tan(x) - y = a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad [y = c \sin(x) - a]$$

$$(c) \quad \dot{y} + x^2 y = 0, \quad y(0) = 1 \quad [y = \exp(-\frac{x^3}{3})]$$

$$(d) \quad (\dot{y})^2 = y^2 \quad [y = c \exp(\pm x)]$$

$$(e) \quad \dot{y} = 2\sqrt{y} \quad [y = (x + c)^2]$$

$$(f) \quad \dot{y} \sin(x) + y \cos(x) = 0 \quad [y = \frac{c}{\sin(x)}]$$

## 2. ÚLOHA

Rychlost rozpadu prvku rádiu je přímo úměrná jeho hmotnosti. Určete, kolik procent hmotnosti  $m_0$  rádia se rozpadne za 200 let, jestliže víte, že poločas rozpadu rádia, tj. doba, za níž se rozpadne právě polovina jeho původního množství (resp. hmotnosti), je roven 1590 let.

## 3. ÚLOHA

Teplota chleba vytaženého z pece během 20 minut klesla ze  $100^\circ\text{C}$  na  $60^\circ\text{C}$ . Teplota okolního vzduchu je  $t_0 = 25^\circ\text{C}$ . Za jakou dobu od počátku ochlazování se teplota chleba snížila na  $30^\circ\text{C}$ ?

## 4. ÚLOHA

Vybíjení kondenzátoru (časová změna náboje  $Q$ ) přes rezistor je nepřímo úměrné odporu resistoru  $R$  a přímo úměrné kapacitě kondenzátoru  $C$ . Nalezněte funkci času, která bude popisovat vybíjení kondenzátoru když víte, že v čase  $t = 0$  byl  $Q(0) = Q_0$ .

## 5. ÚLOHA

Řešte následující rovnice metodou variace konstant:

$$(a) \quad 2x\dot{y} + x^2 - 6y = 0 \quad [y = cx^3 + \frac{1}{2}x^2]$$

$$(b) \quad \dot{y} + 4x^3 y = x^2 \exp(-x^4) \quad [y = \exp(-x^4)(\frac{x^3}{3} + c)]$$

$$(c) \quad \dot{y} + \frac{y}{x+1} = \sin(x), \quad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi} \quad [y = -\cos(x)(x+1) + \sin(x) + (\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2})]$$

$$(d) \quad (x+y)dy = ydx + y \ln(y)dy \quad [y = y \left( \ln(y) - \frac{\ln^2(x)}{2} + c \right)]$$

## 6. ÚLOHA

Nádrž o celkovém objemu 1000 litrů obsahuje 100 litrů mořské vody o koncentraci 30 gramů soli na litr. Do nádrže přitéká rychlostí 2 litry za minutu zředěná mořská voda o koncentraci 10 gramů na litr. Po důkladném promíchání vytéká roztok z nádrže

rychlostí 1 litr za minutu. Určete množství soli (v gramech) v nádrži v libovolném čase  $t$  a koncentraci soli v nádrži (v gramech na litr) v okamžiku, když se nádrž zcela naplní.