

Matematika III – demonstrační cvičení

Michal Bulant

16. prosince 2010

1. demonstrační cvičení

Příklad 1. *Zobrazte v rovině definiční obory funkcí:*

a) $f(x, y) = \ln\left(\frac{x}{3} + 2y\right),$

b) $f(x, y) = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right)},$

c) $f(x, y) = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)},$

d) $f(x, y) = \arccos \frac{x}{x+y}.$

Příklad 2. Určete definiční obor funkcí:

a) $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln z,$

b) $f(x, y, z) = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Příklad 3. *Načrtněte vrstevnice funkcí:*

a) $f(x, y) = x^2 - y^2,$

b) $f(x, y) = x^y,$

c) $f(x, y) = \sqrt{xy}.$

Příklad 4. *Rozhodněte, zda je daná posloupnost cauchyovská:*

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, kde $n \in \mathbb{N}$,

b) a^n , kde $n \in \mathbb{N}$ (v závislosti na hodnotě parametru $a \in \mathbb{R}$).

c) $\frac{n+1}{n^2}$.

Příklad 5. Určete všechny hromadné body množiny:

a) \mathbb{Z} ,

b) \mathbb{Q} ,

c) $\{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots\}$,

d) $\{3(1 - \frac{1}{n}) + 2(-1)^n; n \in \mathbb{N}\}$.

Příklad 6. *Určete tečnu křivky dané předpisem*

$$f(t) = (2 \cos t + \cos 3t, \sin 2t, t)$$

v bodě $t = \frac{3\pi}{2}$.

Příklad 7. Na křivce (t, t^2, t^3) najděte takový bod, že jím procházející tečna je rovnoběžná s rovinou $x + 2y + z = 1$.

Příklad 8. *Vypočtěte limity:*

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1},$$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy^2 \cos \frac{1}{xy^2},$$

$$d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{x},$$

$$e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},$$

$$f) \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)},$$

$$g) \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, 1)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

2. demonstrační cvičení

Příklad 9. *Dokažte, že následující limity neexistují:*

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2},$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy}.$

Příklad 10. *Vypočtete všechny parciální derivace (i smíšené) funkce*

$$f(x, y) = x^4 + 10x^2y^3 - 2y^6$$

až do řádu 3 včetně.

Příklad 11. *Určete směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$ v bodě $[-1, 1]$ ve směru vektoru $(1, 2)$.*

Příklad 12. *Vypočtete parciální derivace 1. řádu funkcí*

a) $f(x, y) = x^{xy},$

b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}.$

Příklad 13. Určete diferenciál v daném bodě:

a) $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$ v bodě $[1, 1]$,

b) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v bodě $[1, \sqrt{3}]$.

3. demonstrační cvičení

Příklad 14. *Rozhodněte, zda je funkce*

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

diferencovatelná v $[0, 0]$.

Příklad 15. Pomocí diferenciálu přibližně vypočtete:

a) $\arcsin \frac{0,48}{1,05}$,

b) $1,04^{2,02}$.

Příklad 16. Určete rovnici tečné nadroviny ke grafu funkce v daném bodě:

a) $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$, $[x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 4]$,

b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $[x_0, y_0, z_0] = [1, -1, ?]$.

Příklad 17. *Určete Taylorův polynom 2. stupně se středem v daném bodě:*

a) $\ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad [x_0, y_0] = [1, 1],$

b) $x^{\frac{y}{z}}, \quad [x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 1].$

Příklad 18. Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně přibližně vypočtete

a) $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$,

b) $\ln(x^2 + y^2 + 1)$ v bodě $[1, 1; 1, 2]$.

Příklad 19. Pomocí vrstevnic funkce

$$f(x, y) = |x| + |y|$$

určete její největší a nejmenší hodnotu na množině $M : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$.

Příklad 20. *Určete absolutní extrémy funkce*

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

množině $M : x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

4. demonstrační cvičení

Příklad 21. *Určete stacionární body funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y + y^2x - xy$ a rozhodněte, které z těchto bodů jsou lokálními extrémy a jakého druhu.*

Příklad 22. Ukažte, že funkce $f(x, y) = e^x \sin(y) + e^y \sin(x)$ definuje předpisem $f(x, y) = 1$ pro $[x, y] \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ implicitně proměnnou y jako funkci proměnné x . Určete $f'(x)$.

Příklad 23. *Rozhodněte, zda křivka $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ leží v okolí bodu $[1, 1]$ nad (nebo pod) svojí tečnou.*

Příklad 24. *Rozhodněte, zda plocha daná v okolí $[1, 0, 1] \in E_3$ rovnicí $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - x - y - z = 0$ leží v bodě $[1, 0, 1]$ nad nebo pod tečnou rovinou.*

Příklad 25. Najděte lokální extrémy funkce $y = y(x)$ dané implicitně rovnicí $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Příklad 26. Určete parametrickou rovnici tečny v bodě $[x_0, y_0, z_0]$, $z_0 > 0$ ke křivce, jež vznikla jako průsečík kulové plochy $K : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ s válcovou plochou $V : x^2 + y^2 - 2x = 0$ (tzv. Vivianiho křivka).

5. demonstrační cvičení

Nechť $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a předpokládejme, že funkce f, g (tj. složky zobrazení F) mají v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace a že Jacobiho matice $F'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) & f'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ zobrazení F v bodě $[x_0, y_0]$ je regulární, tj. $\det F'(x_0, y_0) \neq 0$ ($\det F'(x_0, y_0)$ se nazývá jacobíán zobrazení F v bodě $[x_0, y_0]$). Pak existuje okolí bodu $[x_0, y_0]$, v němž je zobrazení F prosté, tudíž k němu existuje inverzní zobrazení F^{-1} v okolí bodu $F(x_0, y_0)$, a pro Jacobiho matici tohoto inverzního zobrazení v bodě $[u_0, v_0] = F(x_0, y_0)$ platí $(F^{-1})'(u_0, v_0) = [F'(x_0, y_0)]^{-1}$.

Příklad 27. *Rozhodněte, zda je zobrazení $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, kde $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $g(x, y) = xy$, prosté v nějakém okolí bodu $[0, 1]$. V kladném případě určete Jacobiho matici inverzního zobrazení F^{-1} v bodě $F(0, 1)$.*

Příklad 28. *Spočítejte jacobíán funkce F , která je transformací dvou proměnných do polárních souřadnic, a příslušné inverzní transformace.*

Příklad 29. *Drát délky l je rozdělen na 3 části. Z jedné části je vytvořen kruh, z druhé čtverec a ze třetí rovnostranný trojúhelník (vždy stočením, resp. složením vytvoříme obvod příslušného útvaru). Určete délky jednotlivých částí tak, aby celková plocha omezená těmito útvary byla **maximální**.*

Příklad 30. *Rozhodněte, zda existují maxima a minima funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - 2y$ na křivce dané rovnicí $y - x^3 - 2x - 1 = 0$. Případné extrémů určete. Uvažujte křivku omezenou na interval $x \in \langle 0, 5 \rangle$.*

Příklad 31. Pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů najděte body na průniku ploch $z^2 = x^2 + y^2$ a $z = 1 + x + y$, které leží nejbližší počátku. Zdůvodněte, že jde skutečně o minimum.

Příklad 32. Zjistěte, zda existují maxima a minima funkce $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na elipse $z^2 = x^2 + y^2, x - y + z + 1 = 0$.

Příklad 33. Výrobce uvažuje možnost produkce dvou výrobků V_1 a V_2 . Pro jejich výrobu může počítat s využitím 180 kg surovin, 240 hodin práce speciálních strojů a náklady jsou přitom omezeny částkou 160 tis. Kč. Na základě předpokládaných tržeb byl stanoven očekávaný zisk za 1 kus výrobku V_1 na 7 tis. Kč a za 1 kus výrobku V_2 na 9 tis. Kč. Z předběžného průzkumu zájmu vyplynulo, že oba výrobky lze prodat v libovolném množství.

V rámci přípravy produkce byla stanovena náročnost obou výrobků z hlediska spotřeby zdrojů na 1 kus:

Výrobek	spotřeba surovin [kg]	spotřeba času [h]	náklady [tis.Kč]
V_1	3	5	10
V_2	5	4	2

Vzhledem k uvedeným skutečnostem naplánujte výrobu tak, aby výrobci přinesla nejvyšší zisk.

6. demonstrační cvičení

Příklad 34. Vypočtete $\iint_M xy \, dx \, dy$, kde M je oblast $1 \leq x \leq 4, \frac{1}{x} \leq y \leq \sqrt{x}$.

Příklad 35. *Převeďte dvojný integrál $\iint_A f(x, y) \, dA$ na dvojnásobný (obě možnosti pořadí integrace) pro množinu A ohraničenou přímkami $y = x, y = x - 3, y = 2, y = 4$. Ověřte (přímo nebo s využitím SW např. MAW) rovnost výsledku pro konkrétní funkci $f(x, y) = y$.*

Příklad 36. *Zaměňte pořadí integrace $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x, y) \, dy \, dx$.*

Příklad 37. *Vypočtete integrál*

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin x^2 \, dx \, dy.$$

Příklad 38. *Vypočtete objem tělesa ohraničeného souřadnými rovnicami a plochami $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$.*

Příklad 39. *Vypočtete integrál*

$$\iint_A 2(x^2 + y^2) \, dA,$$

kde $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq |x|\}$.

Příklad 40. *Spočtěte integrál*

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx.$$

7. demonstrační cvičení

Příklad 41. Pomocí vhodné transformace souřadnic vypočtete integrál $\iint_A \sqrt{xy} \, dx \, dy$, kde množina A je ohraničena křivkami

$$y^2 = 2x, \quad y^2 = x, \quad xy = 1, \quad xy = 2.$$

Příklad 42. Vypočtete

1. těžiště,

2. momenty setrvačnosti vzhledem k souřadným osám

tenké homogenní rovinné lichoběžníkové desky s vrcholy v bodech $[-1, 0]$, $[2, 0]$, $[2, 2]$ a $[-1, 1]$.

Řešení. Hustota $\rho(x, y) = 1$ pro libovolná x, y . Integrujeme přes množinu $A : -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{1}{3}(x + 4)$.

Dostaneme $M = \iint_A dA = \frac{9}{2}, T_x = \frac{1}{M} \iint_A x \cdot 1 dA = \frac{2}{3}, T_y = \frac{1}{M} \iint_A y \cdot 1 dA = \frac{7}{9}, J_x(A) = \iint_A y^2 dA = \frac{15}{4}, J_y(A) = \iint_A x^2 dA = \frac{21}{4}$.

Příklad 43. *Hodnotu integrálu*

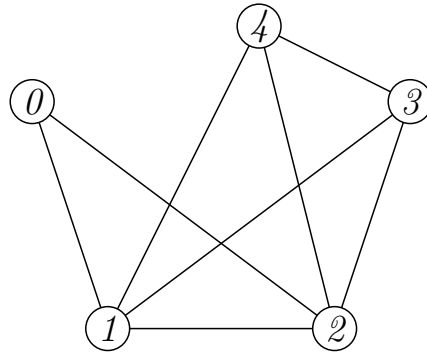
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

odhadněte pomocí

- (a) obdélníkového pravidla,*
- (b) lichoběžníkového pravidla*
- (c) Simpsonova pravidla,*

přičemž zadaný interval rozdělte na 3 intervaly téže délky. Dosažené výsledky porovnejte s přesnou hodnotou a pomocí obrázku zdůvodněte míru nepřesnosti jednotlivých pravidel.

Příklad 44. Pomocí matice souslednosti určete počet sledů délky 4 z vrcholu 0 do vrcholu 1 v následujícím grafu:

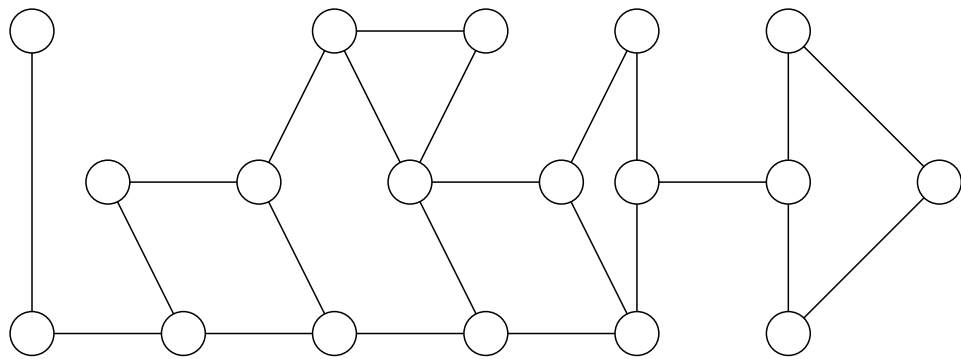


Příklad 45. *Ověřte, zda daná posloupnost je skóre nějakého grafu. Pokud ano, nějaký graf s tímto skóre nakreslete.*

(a) $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$,

(b) $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5)$.

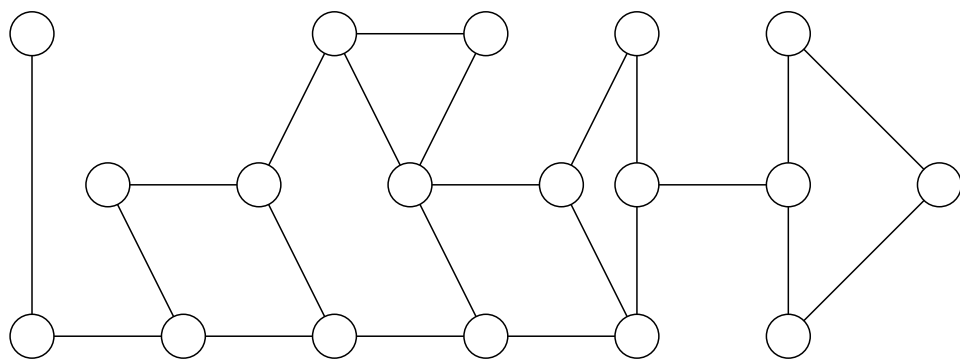
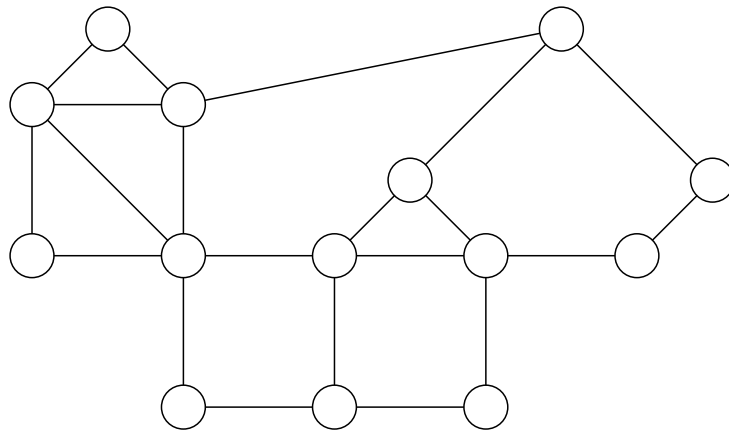
Příklad 46. *V grafu na obrázku najděte všechny mosty a artikulace.*



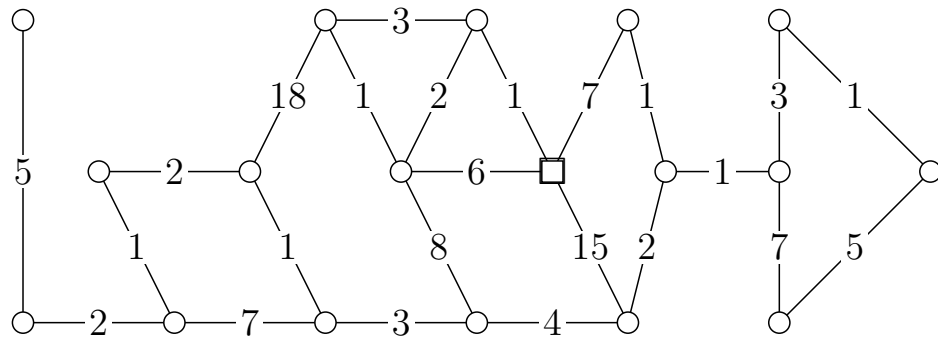
Příklad 47. Udejte příklad grafu, který obsahuje právě

- (a) 8 artikulací a 5 mostů,
- (b) 3 artikulace a 0 mostů,
- (c) 2 artikulace a 11 mostů.

Příklad 48. *Rozhodněte, zda jsou zobrazené grafy (vrcholově) 2-souvislé.*



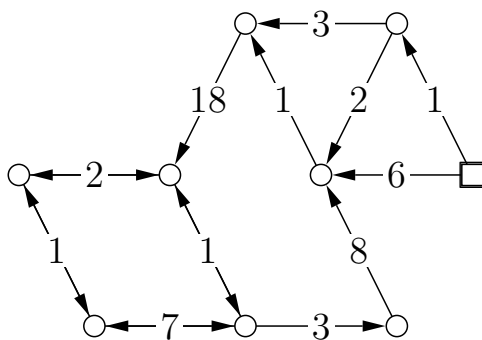
Příklad 49. *Užijte Dijkstrův algoritmus k nalezení nejkratších cest z vyznačeného vrcholu do všech ostatních vrcholů.*



Příklad 50. *Udejte příklad*

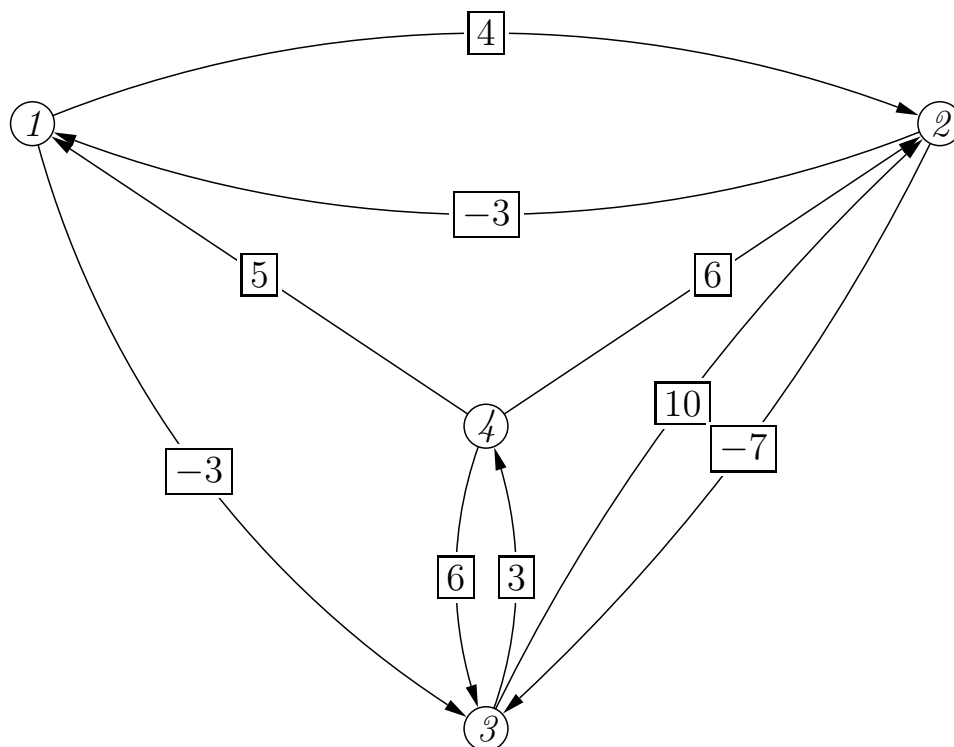
- (a) *grafu s alespoň 4 vrcholy, který neobsahuje cyklus záporné délky a na němž dá Dijkstrův algoritmus chybný výsledek.*
- (b) *grafu s alespoň 4 vrcholy, který obsahuje (alespoň jednu) nezápornou hranu a přesto na něm dá Dijkstrův algoritmus správný výsledek.*

Příklad 51. Užijte Bellman-Fordův algoritmus k nalezení nejkratších cest z vyznačeného vrcholu do všech ostatních vrcholů. Hrany procházejte v pořadí dle počátečního (příp. koncového) vrcholu zprava doleva a shora dolů. Změňte ohodnocení hrany z 18 na -18, algoritmus proveďte s tímto novým grafem a ukažte, jak se detekují záporné cykly.



8. demonstrační cvičení

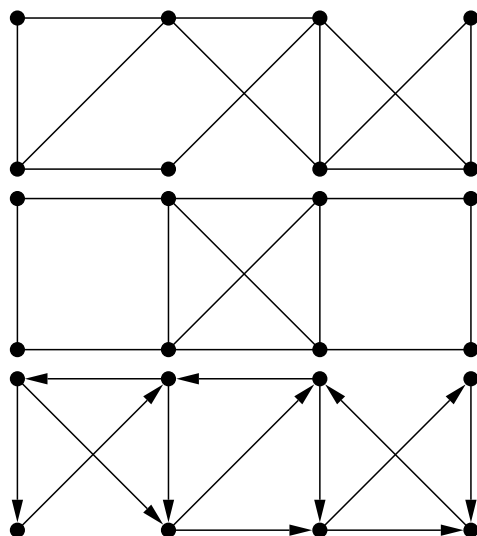
Příklad 52. Uveďte Floydův algoritmus pro nalezení nejkratších cest mezi všemi dvojicemi vrcholů. Tento algoritmus použijte na orientovaný graf na obrázku. Jednotlivé mezivýpočty zapisujte do matic. Uveďte, jak se v průběhu výpočtu detekují cykly záporné délky.



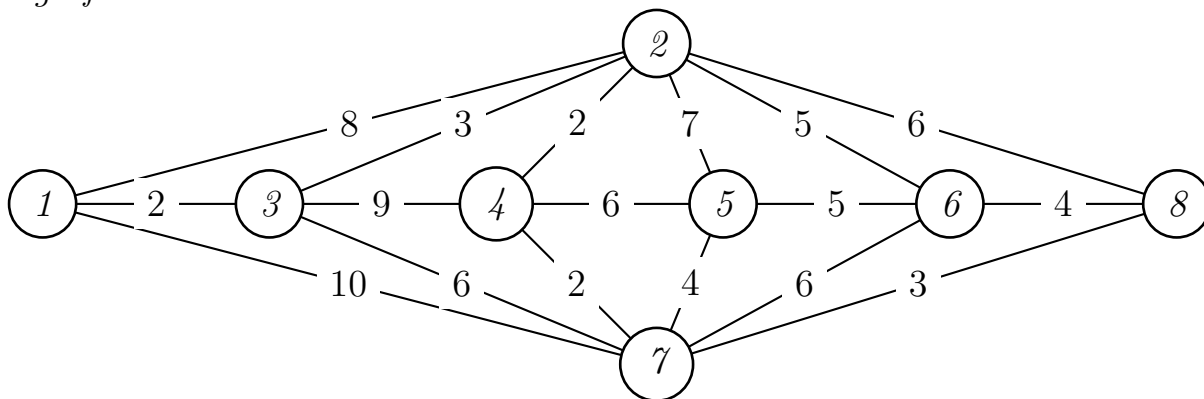
Příklad 53. Rozhodněte, zda jsou následující grafy eulerovské. Pokud nejsou, doplňte je přidáním hran na eulerovské (je-li to možné). Nalezněte eulerovské tahy pomocí

1. algoritmu prodlužování cyklů;
2. Fleuryho algoritmu (prodlužování tahů s vyhýbáním se mostům).

(Očíslujte vrcholy a při průchodu algoritmu číslování dodržujte.)



Příklad 54. *Problém čínského pošťáka v hranově ohodnoceném neorientovaném grafu je problémem nalezení nejkratšího uzavřeného sledu, který obsahuje každou hranu v grafu. Nalezněte řešení tohoto problému pro graf na obrázku.*



Příklad 55 (Nutná podmínka toho, aby graf mohl být hamiltonovský). *Je-li $G = (V, E)$ hamiltonovský a $\emptyset \neq W \subsetneq V$, pak $G \setminus W$ má nejvýše $|W|$ komponent souvislosti.*

Ukažte na konkrétním příkladu grafu, že opak obecně neplatí.

Příklad 56 (Postačující podmínky pro to, aby graf byl hamiltonovský).

Dirac: stupeň každého vrcholu je aspoň $|V|/2$.

Ore: součet stupňů libovolných dvou nesousedních vrcholů je aspoň $|V|$.

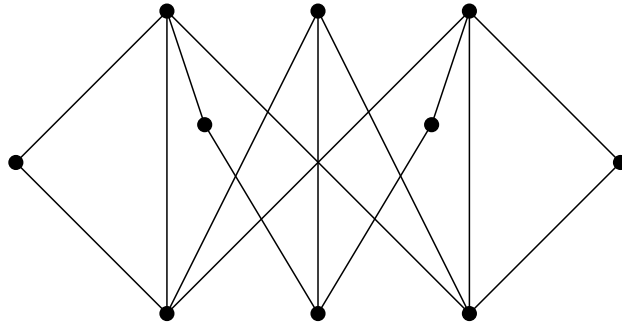
Bondy-Chvátal: G je hamiltonovský právě když $G + uv$ je hamiltonovský (u, v jsou nesousední vrcholy, jejichž součet stupňů je aspoň $|V|$ – opakováním přidáváním takových hran, dokud to jde, získáme tzv. uzávěr grafu $cl(G)$).

1. Dokažte, že z Bondy-Chvátalovy věty plyne Oreho a z ní Diracova.
2. Udejte příklad hamiltonovského grafu, který splňuje podmínku Oreho věty ale ne věty Diracovy.
3. Udejte příklad hamiltonovského grafu, jehož uzávěr není úplný graf.

Příklad 57. *Rozhodněte (a zdůvodněte), zda v Petersenově grafu existuje*

- 1. hamiltonovská cesta,*
- 2. hamiltonovská kružnice.*

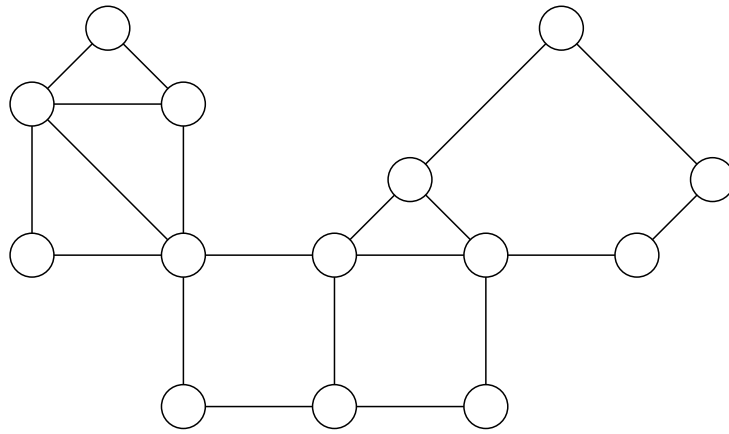
Příklad 58. *Rozhodněte, zda je daný graf*



rovinný. Zdůvodněte.

Příklad 59. *Rozhodněte, zda existuje graf mající skóre (6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8).
Pokud ano, existuje i rovinný graf daného skóre?*

Příklad 60. *Rozhodněte, zda je daný rovinný graf maximální. Doplňte co nejvíce hran při zachování rovinnosti.*



9. demonstrační cvičení

Příklad 61. *Každé z následujících tvrzení dokažte nebo ukažte vhodný protipříklad.*

- (a) *Každý graf s méně než 9 hranami je rovinný.*
- (b) *Graf, který není rovinný, není hamiltonovský.*
- (c) *Graf, který není rovinný, je hamiltonovský.*
- (d) *Graf, který není rovinný, není eulerovský.*
- (e) *Graf, který není rovinný, je eulerovský.*
- (f) *Každý hamiltonovský graf je rovinný.*
- (g) *Žádný hamiltonovský graf není rovinný.*
- (h) *Každý eulerovský graf je rovinný.*
- (i) *Žádný eulerovský graf není rovinný.*

Příklad 62. *Určete všechny (neizomorfní) stromy*

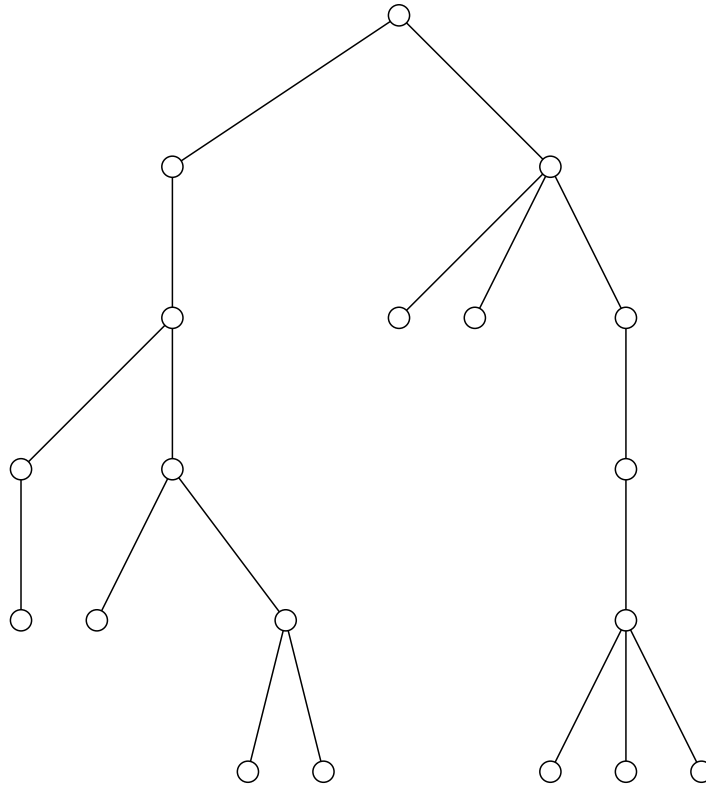
1. na čtyřech vrcholech.

2. na šesti vrcholech.

Příklad 63. *Určete kód grafu na obrázku jako*

1. pěstěného stromu,

2. stromu



Příklad 64. *Rozhodněte, zda existují stromy s následujícími kódy. V případě, že ano, potom daný strom nakreslete.*

- 00011001111001,
- 00000110010010111110010100001010111111.

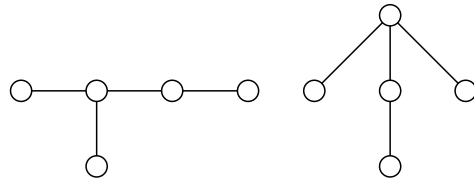
Příklad 65. *Určete počet koster*

1. K_4, K_5
2. C_{2010} ,
3. vějíře V_n (kde vějířem v_n řádu n nazveme graf na $n+1$ vrcholech $0, 1, \dots, n$, který má následujících $2n-1$ hran: vrchol 0 je spojen hranou s každým ze zbylých vrcholů a každý vrchol k je spojen hranou s vrcholem $k+1$ pro $1 \leq k < n$), z odvozeného rekurentního vztahu vypočtete několik prvních hodnot, všimněte si souvislosti s Fibonacciho posloupností a tuto souvislost dokažte;
4. žebříku \check{Z}_n (tvořeného dvěma cestami délky n a příslušnými dvojicemi vrcholů spojenými hranou) – odvoďte pouze rekurentní vztah.

[Návod: Uvažte vrchol n a jeho napojení na "zbytek" kostry. Rekurence je $f_n = f_{n-1} + f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + \dots + f_1 + 1 = f_{n-1} + \sum_{k < n} f_k + [n > 0]$, odkud dostaneme později $f_n = F_{2n}$, kde F_k je k -té Fibonacciho číslo.]

10. demonstrační cvičení

Příklad 66. *Pomocí kódu dokažte izomorfismus stromů:*



Příklad 67. Huffmanovo kódování Pracujeme s pěstěnými binárními stromy, kde máme navíc každou hranu obarvenou některým symbolem z dané výstupní abecedy A (často $A = \{0, 1\}$). Kódovými slovy C jsou slova nad abecedou A , na která převádíme symboly vstupní abecedy. Naším úkolem je reprezentovat daný text pomocí vhodných kódových slov nad výstupní abecedou.

Je snadno vidět, že je užitečné chtít, aby seznam kódových slov byl bezprefixový (v opačném případě může nastat problém s dekódováním).

Ke konstrukci binárních prefixových kódů (tj. nad abecedou $A = \{0, 1\}$) využijeme binárních stromů. Označíme-li hrany vycházející z každého uzlu 0, resp. 1, a označíme-li navíc listy stromu symboly vstupní abecedy, dostaneme prefixový kód nad A pro tyto symboly zřetězením označení hran na cestě z kořene do příslušného listu.

Takto vytvořený kód je zřejmě prefixový. Uděláme-li tuto konstrukci navíc tak, abychom odrazili četnost symbolů vstupní abecedy v kódovaném textu, dosáhneme tak dokonce bezztrátové komprese dat.

Nechť M je seznam četností symbolů vstupní abecedy v textu. Algoritmus postupně zkonstruuje optimální binární strom (tzv. minimum-weight binary tree) a přiřazení symbolů listům.

- Vyber dvě nejmenší četnosti w_1, w_2 z M . Vytvoř strom se dvěma listy označenými příslušnými symboly a kořenem označeným $w_1 + w_2$, odeber z M hodnoty w_1, w_2 a nahraď je hodnotou $w_1 + w_2$.
- Tento krok opakuj; pouze v případě, že vybraná hodnota z M je součtem, pak nevytvářej nový list, ale "připoj" příslušný již existující podstrom.
- Kód každého symbolu urči cestou od kořene (např. vlevo="0", vpravo="1").

Nalezněte Huffmanův kód pro vstupní abecedu s frekvencemi [$'A'$:16, $'B'$:13, $'C'$:9, $'D'$:12, $'E'$:45, $'F'$:5].

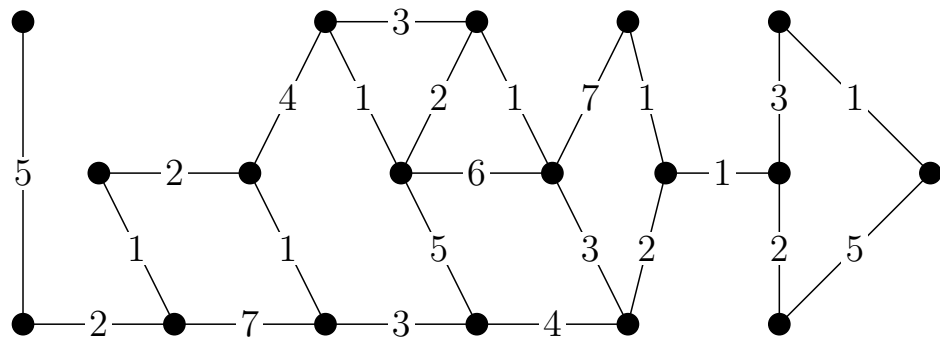
Příklad 68. Najděte minimální kostru grafu na obrázku pomocí

(a) Kruskalova

(b) Jarníkova (Primova) algoritmu.

(c) Borůvkova algoritmu.

Jak se výpočet změní, pokud hledáme maximální kostru?



Příklad 69. Najděte minimální kostru pomocí maticové verze Jarník-Primova algoritmu v grafu zadaném maticí ohodnocení hran

$$\begin{pmatrix} - & 12 & - & 16 & - & - & - & 13 \\ 12 & - & 16 & - & - & - & 14 & - \\ - & 16 & - & 12 & - & 14 & - & - \\ 16 & - & 12 & - & 13 & - & - & - \\ - & - & - & 13 & - & 14 & - & 15 \\ - & - & 14 & - & 14 & - & 15 & - \\ - & 14 & - & - & - & 15 & - & 14 \\ 13 & - & - & - & 15 & - & 14 & - \end{pmatrix}$$

Příklad 70. Udejte příklad, na němž ukážete nefunkčnost "naivního" algoritmu pro nalezení nejkratší cesty:

1. nalezněte minimální kostru,
2. za nejkratší cestu prohlásíme tu jedinou cestu spojující zadané 2 vrcholy, která leží v nalezení minimální kostře.

Příklad 71. Maximální párování v bipartitním grafu

- perfektní párování v obecném grafu (viz CPP - chinese postman problem)
- Tutteho věta – graf má perfektní párování, právě když pro každé $S \subset V$ počet lichých komponent $G \setminus S$ nepřevyšuje $|S|$.

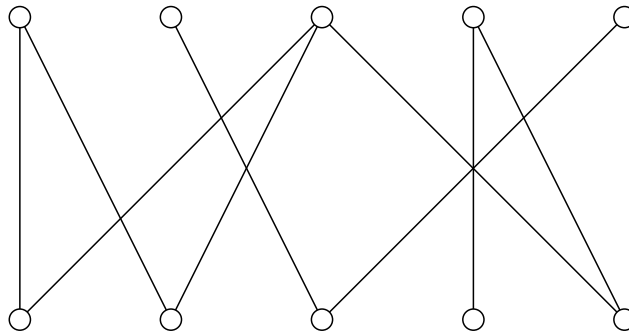
Maďarský algoritmus (König, Egerváry, Kuhn)

Označujme kvůli jednoduchosti popisu vrcholy jedné skupiny v bipartitním grafu jako **červené**, vrcholy druhé skupiny jako **modré**. Budeme předpokládat, že vrcholy jsou obarveny tak, že počet červených vrcholů nepřevyšuje počet modrých.

Nechť je dán bipartitní graf $G = (V, E)$ a párování $M \subseteq E$. M -alternující cestou v G nazveme takovou cestu v G , jejíž hrany tvoří střídavě hrany z M a z $E \setminus M$. M -rozšiřující cestou v G nazveme M -alternující cestu, která spojuje dosud nepřřiřazený červený vrchol u s dosud nepřřiřazeným modrým vrcholem v .

1. Nalezneme libovolné párování M . Označíme všechny červené vrcholy jako přípustné.
2. Vyberme některý dosud nepřřiřazený přípustný červený vrchol v (pokud neexistuje, jsme hotovi) a nalezněme pro něj (např. prostřednictvím prohlédávání do hloubky) M -alternující strom s kořenem ve v (pokud neexistuje, označme v jako nepřípustný a proces opakujme s jiným vrcholem). Pokud strom obsahuje nějakou M -rozšiřující cestu, odstraníme M -hrany v této cestě z M a ostatní hrany této cesty do M přidáme. Označme všechny červené vrcholy jako přípustné a proces opakujme.

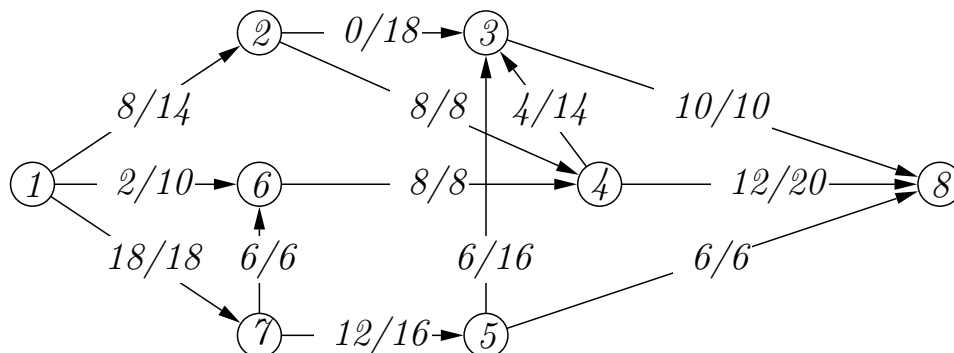
V bipartitním grafu na obrázku najděte takovou maximální podmnožinu hran, že žádné dvě z nich nesdílejí společný vrchol.



Příklad 72. *Určete hodnotu maximálního toku a najděte minimální řez v síti dané maticí kapacit A , kde vrchol 1 je zdroj a vrchol 8 stok.*

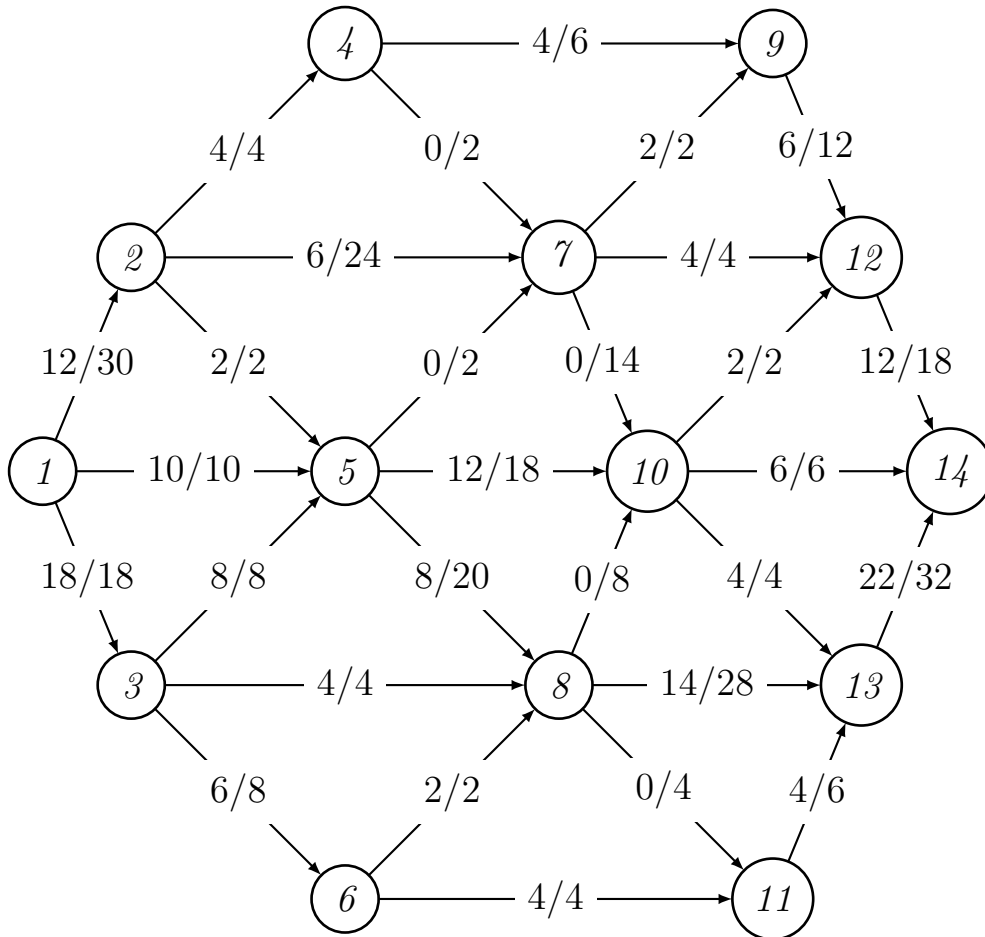
$$A = \begin{pmatrix} - & 16 & 24 & 12 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 30 & - & - & - \\ - & - & - & - & 9 & 6 & 12 & - \\ - & - & - & - & - & - & 21 & - \\ - & - & - & - & - & 9 & - & 15 \\ - & - & - & - & - & - & - & 9 \\ - & - & - & - & - & - & - & 18 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

Příklad 73. Na obrázku je uveden tok v dané síti (čísla f/c udávají současný tok a kapacitu dané hrany). Zjistěte, je-li uvedený tok maximální, pokud ano, své tvrzení zdůvodněte. Pokud maximálním tokem není, maximální tok najděte a svůj postup podrobně popište. Uveďte některý minimální řez v dané síti.



11. demonstrační cvičení

Příklad 74. Nalezněte maximální tok a minimální řez v síti na obrázku (zdroj=1, stok=14).



Příklad 75. Pomocí Ford-Fulkersonova algoritmu (prohledávání do hloubky, vrcholy volte vzestupně podle čísel) nalezněte maximální tok v síti na množině vrcholů $\{1, 2, \dots, 9\}$ se zdrojem 1 a stokem 9. Nalezněte minimální řez v této síti. Jednotlivé kroky svého postupu podrobně popište. Hrany $e \in E$, **dolní** omezení, resp. **horní** omezení na tok danou hranou ($d(e)$, resp. $h(e)$) a současný tok na dané hraně $f(e)$ jsou uvedeny v tabulce:

e	$d(e)$	$h(e)$	$f(e)$
$(1,2)$	0	6	0
$(1,3)$	0	6	0
$(1,6)$	0	4	0
$(2,3)$	0	2	0
$(2,4)$	0	3	0
$(3,4)$	0	4	0
$(3,5)$	0	4	0
$(4,5)$	3	5	4
$(4,8)$	0	3	0

e	$d(e)$	$h(e)$	$f(e)$
$(5,1)$	0	3	0
$(5,6)$	0	6	0
$(5,7)$	0	5	4
$(5,8)$	0	5	0
$(6,9)$	0	5	0
$(7,4)$	1	6	4
$(7,9)$	0	3	0
$(8,9)$	0	9	0

Příklad 76. *Kolika způsoby je možné koupit 12 balíčků kávy, mají-li v prodejně kávu pěti druhů?*

Dále tuto úlohu řešte s následujícími modifikacemi:

- (a) od každé kávy je třeba koupit aspoň 2 balíčky;*
- (b) od každé kávy má být koupen sudý počet balíčků;*
- (c) jedné z káv (např. arabské) jsou k dispozici pouze 3 balíčky.*

12. demonstrační cvičení

Příklad 77. *Určete kolika způsoby je možné naplnit tašku n kusy uvedených druhů ovoce, přičemž jednotlivé kusy téhož druhu nerozlišujeme, nemusí být využity všechny druhy a navíc:*

- *jablek může být libovolný počet,*
- *banánů musí být sudý počet,*
- *hrušek musí být násobek 4,*
- *pomeranče mohou být nejvýše 3 a*
- *pomelo může být pouze jedno (nebo žádné),*

Příklad 78. *Rozviňte do mocninné řady funkci*

(a) $\frac{x}{x+2}$,

(b) $\frac{x^2+x+1}{2x^3+3x^2+1}$.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce $a(x)$ monomem x^k odpovídá posunutí posloupnosti doprava o k míst a její doplnění nulami.
- Pro posunutí posloupnosti doleva o k míst (tj. vynechání prvních k míst posloupnosti) nejprve od $a(x)$ odečteme polynom $b_k(x)$ odpovídají posloupnosti $(a_0, \dots, a_{k-1}, 0, \dots)$ a poté podělíme vytvořující funkci x^k .
- Substituci polynomu $f(x) = \alpha x$ za x odpovídá vynásobení k -tého členu posloupnosti skalárem α^k , podobně dosazení $f(x) = x^n$ nám do posloupnosti mezi každé dva členy vloží $n - 1$ nul.

Příklad 79. (a) *Určete vytvořující funkci posloupnosti*

$$(1, 2, 3, 4, 5, \dots).$$

(b) *Určete vytvořující funkci posloupnosti*

$$(1, 4, 9, 16, \dots).$$

(c) *Určete vytvořující funkci posloupnosti*

$$(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots).$$

(d) *Určete vytvořující funkci posloupnosti*

$$(9, 0, 0, 2 \cdot 16, 0, 0, 4 \cdot 25, 0, 0, 8 \cdot 36, \dots).$$

(e) *Určete vytvořující funkci posloupnosti*

$$(9, 1, -9, 32, 1, -32, 100, 1, -100, \dots).$$

Příklad 80. Vyřešte rekurenci

$$a_0 = a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$$

[Návod:

- Krok 1: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n [n \geq 0] + [n = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = xA(x) + 2x^2A(x) + \frac{1}{1+x} + x$.
- Krok 3:

$$A(x) = \frac{1+x+x^2}{(1-2x)(1+x)^2}$$

- Krok 4: $a_n = \frac{7}{9}2^n + (\frac{1}{3}n + \frac{2}{9})(-1)^n$.

]

Příklad 81. *Řešte rekurenci*

$$a_n = \frac{3}{2}a_{n-1} - \frac{1}{2}a_{n-3}, a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 13/2.$$

Příklad 82. *S využitím vytvořující funkce pro Fibonacciho posloupnost $F(x) = x/(1 - x - x^2)$ určete vytvořující funkci “poloviční” Fibonacciho posloupnosti (F_0, F_2, F_4, \dots) .*

[Odpověď: $x/(1 - 3x + x^2)$]

Příklad 83 (viz. Příklad 65). Vějířem řádu n nazveme graf na $n + 1$ vrcholech $0, 1, \dots, n$, který má následujících $2n - 1$ hran: vrchol 0 je spojen hranou s každým ze zbylých vrcholů a každý vrchol k je spojen hranou s vrcholem $k + 1$ (pro $1 \leq k < n$). Kolik koster má takový graf? (Návod: Využijte dříve odvozené rekurence

$$v_n = v_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_k + 1, v_0 = 0.)$$