

Matematika III – 2. přednáška

Funkce více proměnných: limita, spojitost, parciální a směrové derivace, diferenciál

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

29. 9. 2010

Obsah přednášky

- 1 Literatura
- 2 Zobrazení a funkce více proměnných
 - Zobrazení
- 3 Limita a spojitost funkce
- 4 Parciální a směrové derivace
 - Parciální derivace
 - Směrové derivace
 - Totální diferenciál
 - Tečná nadrovina ke grafu funkce

Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Zobrazení a funkce více proměnných
 - Zobrazení
- 3 Limita a spojitost funkce
- 4 Parciální a směrové derivace
 - Parciální derivace
 - Směrové derivace
 - Totální diferenciál
 - Tečná nadrovina ke grafu funkce

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. <http://www.math.muni.cz/~plch/mapm>).

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. <http://www.math.muni.cz/~plch/mapm>).
- *Předmětové záložky v IS MU*

Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Zobrazení a funkce více proměnných
 - Zobrazení
- 3 Limita a spojitost funkce
- 4 Parciální a směrové derivace
 - Parciální derivace
 - Směrové derivace
 - Totální diferenciál
 - Tečná nadrovina ke grafu funkce

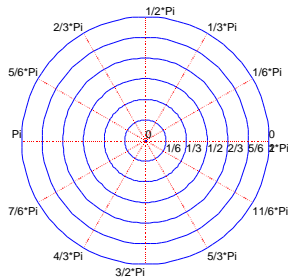


Křivky a funkce jsou speciální případy zobrazení $F : E_m \rightarrow E_n$.
Stejně jako u vektorových prostorů, volba souřadnic, tj. našeho „pohledu na věc“, může zjednodušit nebo zhoršit naše vnímání.
Změna souřadnic – invertibilní zobrazení $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.



Křivky a funkce jsou speciální případy zobrazení $F : E_m \rightarrow E_n$. Stejně jako u vektorových prostorů, volba souřadnic, tj. našeho „pohledu na věc“, může zjednodušit nebo zhoršit naše vnímání. Změna souřadnic – invertibilní zobrazení $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

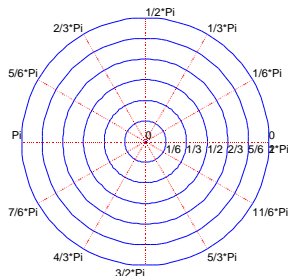
Příklad: polohu P zadáváme jako vzdálenost od počátku souřadnic r a úhel φ mezi spojnicí s počátkem a osou x .





Křivky a funkce jsou speciální případy zobrazení $F : E_m \rightarrow E_n$. Stejně jako u vektorových prostorů, volba souřadnic, tj. našeho „pohledu na věc“, může zjednodušit nebo zhoršit naše vnímání. Změna souřadnic – invertibilní zobrazení $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Příklad: polohu P zadáváme jako vzdálenost od počátku souřadnic r a úhel φ mezi spojnicí s počátkem a osou x .



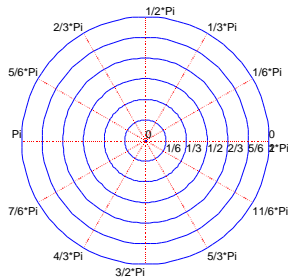
Přechod z polárních souřadnic do standardních je

$$P_{\text{polární}} = (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = P_{\text{kartézské}}$$



Křivky a funkce jsou speciální případy zobrazení $F : E_m \rightarrow E_n$. Stejně jako u vektorových prostorů, volba souřadnic, tj. našeho „pohledu na věc“, může zjednodušit nebo zhoršit naše vnímání. Změna souřadnic – invertibilní zobrazení $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Příklad: polohu P zadáváme jako vzdálenost od počátku souřadnic r a úhel φ mezi spojnici s počátkem a osou x .



Přechod z polárních souřadnic do standardních je

$$P_{\text{polární}} = (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = P_{\text{kartézské}}$$

Graf funkce můžeme také vnímat jako obraz zobrazení $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.



Funkce jedné proměnné v polárních souřadnicích

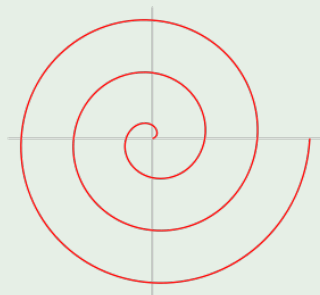
Jak už jsme podotkli, kartézské souřadnice jsou nejběžnější, ale nikoliv jediné možné. Mnohé „objekty“ mají např. v polárních souřadnicích výrazně jednodušší vyjádření (toho využijeme i později zejména pro výpočty obsahů či objemů takových objektů).

Funkce jedné proměnné v polárních souřadnicích

Jak už jsme podotkli, kartézské souřadnice jsou nejběžnější, ale nikoliv jediné možné. Mnohé „objekty“ mají např. v polárních souřadnicích výrazně jednodušší vyjádření (toho využijeme i později zejména pro výpočty obsahů či objemů takových objektů).

Příklad

Archimedova spirála má v polárních souřadnicích rovnici $r(\varphi) = a + b\varphi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry.



Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Zobrazení a funkce více proměnných
 - Zobrazení
- 3 **Limita a spojitost funkce**
- 4 Parciální a směrové derivace
 - Parciální derivace
 - Směrové derivace
 - Totální diferenciál
 - Tečná nadrovina ke grafu funkce

Limita funkce více proměnných

Definici limity funkce v bodě lze takřka slovo od slova přepsat podle situace v případě funkcí jedné proměnné (okolí bodu již ale samozřejmě vypadají jinak).

Limita funkce více proměnných

Definici limity funkce v bodě lze takřka slovo od slova přepsat podle situace v případě funkcí jedné proměnné (okolí bodu již ale samozřejmě vypadají jinak).

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má ve svém **hromadném** bodě $a \in \mathbb{R}^n$ limitu L , jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(a) \setminus \{a\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.

Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Limita funkce více proměnných

Definici limity funkce v bodě lze takřka slovo od slova přepsat podle situace v případě funkcí jedné proměnné (okolí bodu již ale samozřejmě vypadají jinak).

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má ve svém **hromadném** bodě $a \in \mathbb{R}^n$ limitu L , jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(a) \setminus \{a\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.

Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Obdobně jde (při vhodné definici okolí) limitu definovat i v "nevlastních" bodech (kterých je pro $n \geq 1$ již 2^n).

Limita funkce více proměnných

Definici limity funkce v bodě lze takřka slovo od slova přepsat podle situace v případě funkcí jedné proměnné (okolí bodu již ale samozřejmě vypadají jinak).

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má ve svém **hromadném** bodě $a \in \mathbb{R}^n$ limitu L , jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(a) \setminus \{a\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.

Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Obdobně jde (při vhodné definici okolí) limitu definovat i v "nevlastních" bodech (kterých je pro $n \geq 1$ již 2^n).

Má-li mít funkce v daném bodě limitu, nesmí záležet na "cestě", po které k danému bodu konvergujeme (analogie limit zleva a zprava u funkcí jedné proměnné).

Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

Věta

- *jednoznačnost limity,*

^aněkdy také *o dvou policajtech* :)

Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

Věta

- *jednoznačnost limity,*
- *věta o třech limitách^a,*

^aněkdy také *o dvou policaitech* :)

Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

Věta

- *jednoznačnost limity,*
- *věta o třech limitách^a,*
- *linearita, tj.*

$$\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x) + d \cdot g(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) + d \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

^aněkdy také *o dvou policajtech* :)

Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

Věta

- *jednoznačnost limity,*
- *věta o třech limitách^a,*
- *linearita, tj.*

$$\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x) + d \cdot g(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) + d \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

- *multiplikativita, divisibilita,*

^aněkdy také *o dvou policajtech* :)

Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

Věta

- *jednoznačnost limity,*
- *věta o třech limitách^a,*
- *linearita, tj.*

$$\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x) + d \cdot g(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) + d \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

- *multiplikativita, divisibilita,*
- *je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a funkce $g(x)$ je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu x , pak*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0.$$

^aněkdy také o dvou policajtech :)

Příklad

Vypočtete limitu funkce $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ v bodě $(0, 0)$.

Příklad

Vypočtete limitu funkce $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ v bodě $(0, 0)$.

Příklad

Vypočtete limitu funkce $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ v bodě $(0, 0)$.

Příklad

Vypočtete limitu funkce $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ v bodě $(0, 0)$.

Příklad

Vypočtete limitu funkce $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ v bodě $(0, 0)$.

Příklad

Vypočtete limitu funkce $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ v bodě $(0, 0)$.

Spojitost funkce

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v hromadném bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pokud má v a vlastní limitu a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Spojitost funkce

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v hromadném bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pokud má v a vlastní limitu a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Věta (Weierstrassova)

Spojitá funkce na kompaktní množině zde nabývá maxima i minima.

Spojítost funkce

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v hromadném bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pokud má v a vlastní limitu a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Věta (Weierstrassova)

Spojité funkce na kompaktní množině zde nabývá maxima i minima.

Věta (Bolzanova)

*Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na otevřené **souvislé** množině A . Jsou-li $a, b \in A$ takové, že $f(a) < 0 < f(b)$, pak existuje $c \in A$ tak, že $f(c) = 0$.*

Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Zobrazení a funkce více proměnných
 - Zobrazení
- 3 Limita a spojitost funkce
- 4 **Parciální a směrové derivace**
 - Parciální derivace
 - Směrové derivace
 - Totální diferenciál
 - Tečná nadrovina ke grafu funkce

Parciální derivace jsou nejsnazším rozšířením pojmu derivace funkce jedné proměnné, kdy se na funkci $f(x_1, \dots, x_n)$ více proměnných díváme jako na funkci jedné proměnné x_i a ostatní považujeme za konstantní.

Parciální derivace jsou nejsnazším rozšířením pojmu derivace funkce jedné proměnné, kdy se na funkci $f(x_1, \dots, x_n)$ více proměnných díváme jako na funkci jedné proměnné x_i a ostatní považujeme za konstantní.

Definice

Existuje-li limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^* + t, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*) \right),$$

říkáme, že funkce $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $[x_1^*, \dots, x_n^*]$ parciální derivaci podle proměnné x_i a značíme $f_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ (příp. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ nebo $f'_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$).

Parciální derivace jsou nejsnazším rozšířením pojmu derivace funkce jedné proměnné, kdy se na funkci $f(x_1, \dots, x_n)$ více proměnných díváme jako na funkci jedné proměnné x_i a ostatní považujeme za konstantní.

Definice

Existuje-li limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^* + t, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*) \right),$$

říkáme, že funkce $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $[x_1^*, \dots, x_n^*]$ parciální derivaci podle proměnné x_i a značíme $f_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ (příp. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ nebo $f'_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$).

Podobně jako v případě jedné proměnné, pokud má funkce $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ parciální derivace ve všech bodech nějaké otevřené množiny, jsou tyto derivace rovněž funkcemi z E_n do \mathbb{R} .

Pro funkce v E_2 dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)) = \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.\end{aligned}$$

Pro funkce v E_2 dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)) = \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.\end{aligned}$$

Poznámka

Parciální derivace funkce $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ podle x v bodě $[x_0, y_0]$ udává směrnici tečny v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ ke křivce, která je průsečíkem grafu G_f s rovinou $y = y_0$.

Parciální derivace vs. spojitost

Rozdíl oproti funkcím jedné proměnné!

Protože parciální derivace popisují chování funkce v okolí daného bodu jen velmi omezeně (pouze ve směru souřadných os), může se v jiných směrech chovat velmi divoce.

Poznámka

Z existence všech parciálních derivací v daném bodě **neplyne** spojitost v tomto bodě.

Parciální derivace vs. spojitost

Rozdíl oproti funkcím jedné proměnné!

Protože parciální derivace popisují chování funkce v okolí daného bodu jen velmi omezeně (pouze ve směru souřadných os), může se v jiných směrech chovat velmi divoce.

Poznámka

Z existence všech parciálních derivací v daném bodě **neplyne** spojitost v tomto bodě.

Příklad

Funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x=0 \text{ nebo } y=0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

má v bodě $[0, 0]$ obě parciální derivace nulové, přitom v tomto bodě neexistuje limita, a tedy není ani spojitá.

Směrové derivace

Zmíněný nedostatek parciálních derivací se pokusíme napravit zavedením derivace v libovolném směru.

Směrové derivace

Zmíněný nedostatek parciálních derivací se pokusíme napravit zavedením derivace v libovolném směru.

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má *derivaci ve směru vektoru* $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + tv) - f(x)).$$

Směrovou derivaci v bodě x často značíme rovněž $f_v(x)$.

Směrové derivace

Zmíněný nedostatek parciálních derivací se pokusíme napravit zavedením derivace v libovolném směru.

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má *derivaci ve směru vektoru* $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + tv) - f(x)).$$

Směrovou derivaci v bodě x často značíme rovněž $f_v(x)$.

Speciální volbou jednotkových vektorů ve směru souřadných os dostáváme právě *parciální derivace funkce* f .

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\varphi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x)$, $d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

① $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, pro libovolné $k \in \mathbb{R}$,

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\varphi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x)$, $d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

- 1 $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, pro libovolné $k \in \mathbb{R}$,
- 2 $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\varphi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x)$, $d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

- 1 $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, pro libovolné $k \in \mathbb{R}$,
- 2 $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
- 3 $d_v(fg)(x) = d_v f(x) g(x) + f(x) d_v g(x)$,

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\varphi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x)$, $d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

- 1 $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, pro libovolné $k \in \mathbb{R}$,
- 2 $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
- 3 $d_v(fg)(x) = d_v f(x) g(x) + f(x) d_v g(x)$,
- 4 pro $g(x) \neq 0$ je $d_v \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g^2(x)} (d_v f(x) g(x) - f(x) d_v g(x))$.

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\varphi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x)$, $d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

- 1 $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, pro libovolné $k \in \mathbb{R}$,
- 2 $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
- 3 $d_v(fg)(x) = d_v f(x) g(x) + f(x) d_v g(x)$,
- 4 pro $g(x) \neq 0$ je $d_v \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g^2(x)} (d_v f(x) g(x) - f(x) d_v g(x))$.

Směrové derivace jsou tedy běžné derivace funkce jedné proměnné $\varphi(t) = f(x + tv)$, proto i pro ně platí obvyklá pravidla pro derivování.

Věta

Existují-li pro $v \in \mathbb{R}^n$ směrové derivace $d_v f(x)$, $d_v g(x)$ funkcí $f, g : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $x \in E_n$, pak:

- 1 $d_{kv} f(x) = k \cdot d_v f(x)$, pro libovolné $k \in \mathbb{R}$,
- 2 $d_v(f \pm g)(x) = d_v f(x) \pm d_v g(x)$,
- 3 $d_v(fg)(x) = d_v f(x) g(x) + f(x) d_v g(x)$,
- 4 pro $g(x) \neq 0$ je $d_v \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g^2(x)} (d_v f(x) g(x) - f(x) d_v g(x))$.

Poznámka

Neplatí ale aditivita vzhledem ke směrům:

$$d_{u+v} f(x) \neq d_u f(x) + d_v f(x).$$

Rovněž je vidět z výše uvedené věty, že směrová derivace nezávisí jen na "směru" vektoru, ale i na jeho velikosti.

Směrové derivace vs. spojitost

Že nám ke spojitosti nepomohlo ani zavedení směrových derivací, ukazuje následující příklad.

Příklad

Funkce definovaná předpisem

$$f(x, y) = \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}$$

mimo počátek a $f(0, 0) = 0$, má v počátku všechny směrové derivace nulové, přitom zde není spojitá (neboť při konvergenci "po různých parabolách" dostáváme různé limity).

Směrové derivace vs. spojitost

Že nám ke spojitosti nepomohlo ani zavedení směrových derivací, ukazuje následující příklad.

Příklad

Funkce definovaná předpisem

$$f(x, y) = \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}$$

mimo počátek a $f(0, 0) = 0$, má v počátku všechny směrové derivace nulové, přitom zde není spojitá (neboť při konvergenci "po různých parabolách" dostáváme různé limity).

Již v případě limit jsme viděli, že nestačí zkoumat chování funkce ve směru souřadných os (parciální derivace), ani po přímkách (směrové derivace), proto by nás uvedené chování nemělo překvapit.

Směrové derivace vs. spojitost

Že nám ke spojitosti nepomohlo ani zavedení směrových derivací, ukazuje následující příklad.


Příklad

Funkce definovaná předpisem

$$f(x, y) = \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}$$

mimo počátek a $f(0, 0) = 0$, má v počátku všechny směrové derivace nulové, přitom zde není spojitá (neboť při konvergenci "po různých parabolách" dostáváme různé limity).

Již v případě limit jsme viděli, že nestačí zkoumat chování funkce ve směru souřadných os (parciální derivace), ani po přímkách (směrové derivace), proto by nás uvedené chování nemělo překvapit.

Ke spojitosti potřebujeme silnější pojem, tzv. *totální diferenciál*, 

Diferenciál funkce jedné proměnné

V minulém semestru jste si říkali, že diferenciál dy funkce jedné proměnné v bodě x_0 je přírůstek na tečně ke grafu funkce $y = f(x)$ v tomto bodě a jeho existence je ekvivalentní existenci derivace tamtéž.

Diferenciál funkce jedné proměnné

V minulém semestru jste si říkali, že diferenciál dy funkce jedné proměnné v bodě x_0 je přírůstek na tečně ke grafu funkce $y = f(x)$ v tomto bodě a jeho existence je ekvivalentní existenci derivace tamtéž.

Ukázali jste si, že diferenciál závislé proměnné dy je **lineární funkcí** diferenciálu nezávislé proměnné dx , splňující

$$dy = f'(x_0) \cdot dx.$$

Diferenciál funkce jedné proměnné

V minulém semestru jste si říkali, že diferenciál dy funkce jedné proměnné v bodě x_0 je přírůstek na tečně ke grafu funkce $y = f(x)$ v tomto bodě a jeho existence je ekvivalentní existenci derivace tamtéž.

Ukázali jste si, že diferenciál závislé proměnné dy je **lineární funkcí** diferenciálu nezávislé proměnné dx , splňující

$$dy = f'(x_0) \cdot dx.$$

Formálně říkáme, že funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v x_0 , pokud existuje $A \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0.$$

(Přitom z definice derivace snadno plyne, že pak $A = f'(x_0)$.)

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Definice

Funkce $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ je *diferencovatelná v bodě* x , jestliže existuje vektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ takový, že pro všechny "směry" $v \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|} (f(x + v) - f(x) - a \cdot v) = 0.$$

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Definice

Funkce $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ je *diferencovatelná v bodě* x , jestliže existuje vektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ takový, že pro všechny "směry" $v \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|} (f(x + v) - f(x) - a \cdot v) = 0.$$

Lineární funkci df definovanou předpisem $v \mapsto a \cdot v$ (závislou na vektorové proměnné v) nazýváme *diferenciál funkce* f .

V literatuře se často také říká *totální diferenciál* df funkce f .

Diferenciál vs. spojitost

Díky tomuto zesílení parciálních a směrových derivací již dostáváme **spojitost**:

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $x \in \mathbb{R}^n$, pak je v tomto bodě spojitá.

Diferenciál vs. spojitost

Díky tomuto zesílení parciálních a směrových derivací již dostáváme **spojitost**:

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $x \in \mathbb{R}^n$, pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz: Z diferencovatelnosti f v bodě x plyne
 $f(x + v) - f(x) = a \cdot v + \tau(v)$, kde $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\tau(v)}{\|v\|} = 0$.

Diferenciál vs. spojitost

Díky tomuto zesílení parciálních a směrových derivací již dostáváme **spojitost**:

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $x \in \mathbb{R}^n$, pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz: Z diferencovatelnosti f v bodě x plyne
 $f(x + v) - f(x) = a \cdot v + \tau(v)$, kde $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\tau(v)}{\|v\|} = 0$.
Proto:

$$\lim_{v \rightarrow 0} (f(x + v) - f(x)) = \lim_{v \rightarrow 0} (a \cdot v + \tau(v)) = 0,$$

a tedy

$$\lim_{v \rightarrow 0} f(x + v) = f(x).$$

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x , pak má v tomto bodě všechny směrové (a tedy i parciální) derivace. Pro libovolné $v \in \mathbb{R}^n$ je přitom $d_v f(x) = df(x)(v)$, tj. v označení z definice diferenciálu

$$d_v f(x) = a \cdot v.$$

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x , pak má v tomto bodě všechny směrové (a tedy i parciální) derivace. Pro libovolné $v \in \mathbb{R}^n$ je přitom $d_v f(x) = df(x)(v)$, tj. v označení z definice diferenciálu

$$d_v f(x) = a \cdot v.$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} d_v f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + tv) - f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (df(x)(tv) + \tau(tv)) = \\ &= df(x)(v) + \|v\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau(tv)}{\|tv\|} = df(x)(v) = a \cdot v. \end{aligned}$$

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x , pak má v tomto bodě všechny směrové (a tedy i parciální) derivace. Pro libovolné $v \in \mathbb{R}^n$ je přitom $d_v f(x) = df(x)(v)$, tj. v označení z definice diferenciálu

$$d_v f(x) = a \cdot v.$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} d_v f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + tv) - f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (df(x)(tv) + \tau(tv)) = \\ &= df(x)(v) + \|v\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau(tv)}{\|tv\|} = df(x)(v) = a \cdot v. \end{aligned}$$

Poznámka

Z předchozího je ihned vidět, že vektor parciálních derivací $f'(x)$ je přímo roven vektoru a .

Uvažujme $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi.

Diferenciál v pevném bodě $[x_0, y_0]$ je lineární funkce $df : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

na přírůstcích se souřadnicemi danými právě parciálními derivacemi.

Uvažujme $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi.

Diferenciál v pevném bodě $[x_0, y_0]$ je lineární funkce $df : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

na přírůstcích se souřadnicemi danými právě parciálními derivacemi.

Příklad

Přímo z definice určete df a funkci τ pro $f(x, y) = x^2 + y^2$ v obecném bodě $[x^*, y^*]$.

Uvažujme $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi.

Diferenciál v pevném bodě $[x_0, y_0]$ je lineární funkce $df : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

na přírůstcích se souřadnicemi danými právě parciálními derivacemi.

Příklad

Přímo z definice určete df a funkci τ pro $f(x, y) = x^2 + y^2$ v obecném bodě $[x^*, y^*]$.

Řešení

Kvůli přehlednosti označme $h := dx, k := dy$. Pak

$$\begin{aligned} f(x^* + dx, y^* + dy) - f(x^*, y^*) &= \\ &= (x^* + h)^2 + (y^* + k)^2 - (x^*)^2 - (y^*)^2 = \\ &= 2x^*h + 2y^*k + h^2 + k^2. \end{aligned}$$

Odtud $df(x^*, y^*)(h, k) = 2x^* \cdot h + 2y^* \cdot k$ a $\tau(h, k) = h^2 + k^2$.

Obecněji v případě funkcí více proměnných píšeme obdobně

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad (*)$$

a platí:

Věta

Nechť $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce n proměnných, která má v okolí bodu $x \in E_n$ spojitě parciální derivace. Pak existuje její diferenciál df v bodě x a jeho souřadné vyjádření je dáno rovnicí ().*

Přibližné výpočty

Podobně jako v případě diferenciálu funkcí jedné proměnné lze i diferenciál funkce více proměnných využít k (velmi) přibližným výpočtům.

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočteme $e^{0,05^3 - 0,02}$.

Přibližné výpočty

Podobně jako v případě diferenciálu funkcí jedné proměnné lze i diferenciál funkce více proměnných využít k (velmi) přibližným výpočtům.

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočteme $e^{0,05^3 - 0,02}$.

Řešení

Využijeme diferenciál funkce $f(x, y) = e^{x^3+y}$ v bodě $x = [0, 0]$ s diferenciemi $v = (0,05; -0,02)$. Máme

$$df(x, y) = e^{x^3+y} \cdot 3x^2 dx + e^{x^3+y} dy,$$

a tedy $df(0, 0) = 0 dx + 1 dy$, což celkem dává odhad $e^{0,05^3 - 0,02} = f(0,05; -0,02) \approx f(0, 0) + df(0,05; -0,02) = 1 - 0,02 = 0,98$.

Tečná nadrovina ke grafu funkce

Pro $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ a pevný bod $[x_0, y_0] \in E_2$ uvažme rovinu v E_3 :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Je to jediná rovina procházející (x_0, y_0) , ve které leží derivace a tedy i tečny všech křivek $c(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. Říkáme jí *tečná rovina* ke grafu funkce f .

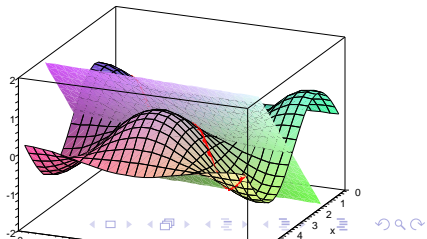
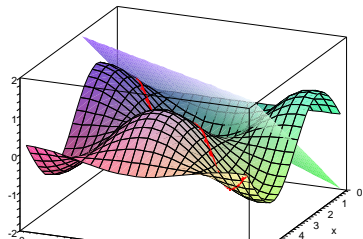
Tečná nadrovina ke grafu funkce

Pro $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ a pevný bod $[x_0, y_0] \in E_2$ uvažme rovinu v E_3 :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Je to jediná rovina procházející (x_0, y_0) , ve které leží derivace a tedy i tečny všech křivek $c(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. Říkáme jí *tečná rovina* ke grafu funkce f .

Na obrázku jsou zobrazeny dvě tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$. Červená čára je obrazem křivky $c(t) = (t, t, f(t, t))$.



Obecně pro $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ je *tečnou rovinou* afinní nadrovina v E_{n+1} .

Obecně pro $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ je *tečnou rovinou* afinní nadrovina v E_{n+1} .

Tato nadrovina

- 1 prochází bodem $(x, f(x))$
- 2 její zaměření je grafem lineárního zobrazení $df(x) : E_n \rightarrow \mathbb{R}$,
tj. diferenciálu v bodě $x \in E_n$.

Obecně pro $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ je *tečnou rovinou* afinní nadrovina v E_{n+1} .
Tato nadrovina

- 1 prochází bodem $(x, f(x))$
- 2 její zaměření je grafem lineárního zobrazení $df(x) : E_n \rightarrow \mathbb{R}$, tj. diferenciálu v bodě $x \in E_n$.

Analogie s funkcemi jedné proměnné

Diferencovatelná funkce f má na E_n v bodě $x \in E_n$ nulový diferenciál tehdy a jen tehdy, když její složení s libovolnou křivkou procházející tímto bodem zde má stacionární bod.

To ovšem neznamená, že v takovém bodě musí mít f aspoň lokálně buď maximum nebo minimum. Stejně jako u funkcí jedné proměnné můžeme rozhodovat teprve podle derivací vyšších.