

# Matematika III, 1. cvičení

## Definiční obory

*Poznámka.* Pro kružnici se středem v bodě  $[x, y]$  a poloměrem  $r$  budeme používat označení  $k([x, y]; r)$ .

**Příklad 1.** Určete definiční obor funkce  $f$  a zobrazte ho v rovině:

$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}.$$

*Výsledek.* Mezikružší mezi  $k([0, 0]; 1)$  a  $k([0, 0]; 2)$

**Příklad 2.** Určete definiční obor funkce  $f$  a zobrazte ho v rovině:

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}.$$

*Výsledek.* Je to čtverec se středem v bodě  $[0, 0]$ , jeho vrcholy jsou v bodech  $[\pm 1, \pm 1]$ .

**Příklad 3.** Určete definiční obor funkce  $f$  a zobrazte ho v rovině:

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}.$$

*Výsledek.* Prostor mezi  $k([\frac{1}{2}, 0]; \frac{1}{2})$  a  $k([1, 0]; 1)$ , menší kružnice tam patří, větší ne.

**Příklad 4.** Určete definiční obor funkce  $f$  a zobrazte ho v rovině:

$$f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y} - \frac{1}{|y| - |x|}.$$

*Výsledek.* Prostor mezi přímkami  $y = x$  a  $y = -x$  kromě těchto přímek (do této množiny patří osa  $y$  kromě bodu  $[0, 0]$ , množina vypadá jako přesýpací hodiny).

**Příklad 5.** Určete definiční obor funkce  $f$  a zobrazte ho v rovině:

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}.$$

*Výsledek.* Elipsa (i s vnitřkem) se středem v bodě  $[0, 0]$ , hlavní poloosou  $a = 1$  (prochází bodem  $[1, 0]$ ) a vedlejší poloosou  $b = \frac{1}{2}$  (prochází bodem  $[0, \frac{1}{2}]$ ).

**Příklad 6.** Určete definiční obor funkce  $f$  a zobrazte ho v rovině:

$$f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}.$$

*Výsledek.* Elipsoid (i s vnitřkem) se středem v bodě  $[0, 0, 0]$  a poloosami  $a$  (prochází bodem  $[a, 0, 0]$ ),  $b$  (prochází bodem  $[0, b, 0]$ ) a  $c$  (prochází bodem  $[0, 0, c]$ ).

## Vrstevnice funkcí, polární souřadnice

Máme funkci  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  a nechť  $c \in \mathbb{R}$ . Množinu  $f_c = \{[x, y] \in M; f(x, y) = c\}$  nazýváme vrstevnice funkce  $f$  na úrovni  $c$ . Chápeme-li graf funkce  $f$  jako reliéf krajiny, pak vrstevnice funkce na úrovni  $c$  je množina všech bodů s nadmořskou výškou  $c$ , což se shoduje s pojmem vrstevnice v mapách.

**Příklad 7.** Určete vrstevnice funkce  $z = x^2 + y^2$ .

*Výsledek.* Vrstevnice jsou  $x^2 + y^2 = c$ . Pokud  $c < 0$ , pak  $z_c = \emptyset$ . Pro  $c = 0$  je  $z_0 = [0, 0]$  a pro  $c > 0$  máme  $x^2 + y^2 = \sqrt{c}^2$ , takže vrstevnice jsou kružnice  $k([0, 0]; \sqrt{c})$ .

**Příklad 8.** Pomocí vrstevnic a řezů rovinami  $\varrho_{xz}: y = 0$  a  $\varrho_{yz}: x = 0$  určete v prostoru graf funkce

$$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

*Výsledek.* Graf funkce  $z$  je rotační kužel s vrcholem v bodě  $[0, 0, 2]$  a hlavní osou, která je částí osy  $z$  od 2 do  $-\infty$

**Příklad 9.** Pomocí vrstevnic a řezů rovinami  $\varrho_{xz}, \varrho_{yz}$  určete v prostoru graf funkce

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

*Výsledek.* Grafem je horní polovina kulové plochy (leží v poloprostoru  $z \geq 0$ ), jejímž středem je bod  $[0, 0, 0]$  a poloměr je 1.

**Příklad 10.** Pomocí vrstevnic a řezů rovinami  $\varrho_{xz}, \varrho_{yz}$  určete v prostoru graf funkce

$$z = x^2 + y^2.$$

*Výsledek.* Grafem je rotační paraboloid ležící v poloprostoru  $z \geq 0$ , jeho vrchol („nejnižší“ bod) je  $[0, 0, 0]$ .

## Křivky v $\mathbb{R}^n$ , tečna ke křivce

Křivka v  $\mathbb{R}^n$  je zobrazení  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tedy  $c$  zobrazí reálné číslo  $x$  na bod  $[c_1(x), \dots, c_n(x)]$  v prostoru  $\mathbb{R}^n$ , přičemž  $c_1, \dots, c_n$  jsou funkce  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Derivace funkce  $c$  v bodě  $t_0$ , tj. vektor  $c'(t_0) = (c'_1(t_0), \dots, c'_n(t_0))$ , je tečným vektorem ke křivce  $c$  v bodě  $c(t_0)$ . Přímka

$$p = \{c(t_0) + sc'(t_0); s \in \mathbb{R}\}$$

je tečna ke křivce  $c$  v bodě  $t_0$ .

**Příklad 11.** Určete tečnu křivky dané předpisem  $c(t) = (\ln t, \arctg t, e^{\sin(\pi t)})$  v bodě  $t_0 = 1$ .

*Výsledek.* Tečna  $p = \{[s, \frac{\pi}{4} + \frac{s}{2}, 1 - \pi s]; s \in \mathbb{R}\}$ .

**Příklad 12.** Na křivce  $c(t) = (t^2 - 1, -2t^2 + 5t, t - 5)$  najděte takový bod, že jím procházející tečna je rovnoběžná s rovinou  $\varrho: 3x + y - z + 7 = 0$ .

*Nápověda.* Směrový vektor  $c'(t_0)$  tečny ke křivce  $c(t)$  v bodě  $t_0$  musí být kolmý k normálovému vektoru roviny  $\varrho$ , takže skalární součin těchto dvou vektorů musí být roven 0. Pomocí tohoto skalárního součinu vypočítáme  $t_0$ .

*Výsledek.* Bod  $[3, -18, -7]$ .

**Příklad 13.** Určete parametrickou rovnici tečny v bodě  $[1, 1, \sqrt{2}]$  ke křivce, jež vznikla jako průsečík plochy o rovnici  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  s plochou  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ .

*Nápověda.* Křivku si v okolí daného bodu vyjádřete stejným způsobem jako ve výše uvedených příkladech.

*Výsledek.* Tečna  $p = \{[1 - \sqrt{2}s, 1, \sqrt{2} + s]; s \in \mathbb{R}\}$ .