# Matematika III – 3. přednáška
# Funkce více proměnných: derivace vyšších řádů, lokální a absolutní extrémy

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

7. 10. 2009

# Obsah přednášky

# Plán přednášky

# Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.

# Doporučené zdroje


- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.

# Doporučené zdroje


- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).

# Doporučené zdroje


- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- *Předmětové záložky v IS MU*

# Plán přednášky

1. Literatura
2. Derivace vyšších řádů, Taylorova věta
   - Parciální derivace vyšších řádů
   - Hessián – aproximace 2. řádu
   - Taylorova věta
3. Lokální a absolutní extrémy funkcí více proměnných
   - Lokální extrémy
   - Absolutní (globální) extrémy

Pro pevný přírůstek $v \in \mathbb{R}^n$ je vyčíslení diferenciálů na tomto přírůstku opět operace na funkcích $f : E_n \to \mathbb{R}$

$$f \mapsto d_v f = \mathrm{d}f(v).$$

Výsledkem je $\mathrm{d}f(v) : E_n \to \mathbb{R}$. Jestliže je tato funkce opět diferencovatelná, můžeme tento proces opakovat.

Pro pevný přírůstek $v \in \mathbb{R}^n$ je vyčíslení diferenciálů na tomto přírůstku opět operace na funkcích $f : E_n \to \mathbb{R}$

$$f \mapsto d_v f = \mathrm{d}f(v).$$

Výsledkem je $\mathrm{d}f(v) : E_n \to \mathbb{R}$. Jestliže je tato funkce opět diferencovatelná, můžeme tento proces opakovat.
Pro **parciální derivace druhého řádu** píšeme

$$(\frac{\partial}{\partial x_j} \circ \frac{\partial}{\partial x_i})f = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

v případě opakované volby $i = j$ píšeme také

$$(\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \frac{\partial}{\partial x_i})f = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Úplně stejně postupujeme při dalších iteracích a hovoříme o **parciálních derivacích $k$-tého řádu**

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}.$$

### Věta

*Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je $k$-krát diferencovatelná funkce se spojitými parciálními derivacemi až do řádu $k$ včetně v okolí bodu $x \in \mathbb{R}^n$. Pak všechny parciální derivace nezávisí na pořadí derivování.*

Úplně stejně postupujeme při dalších iteracích a hovoříme o **parciálních derivacích $k$-tého řádu**

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}.$$

**Věta**

*Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je $k$-krát diferencovatelná funkce se spojitými parciálními derivacemi až do řádu $k$ včetně v okolí bodu $x \in \mathbb{R}^n$. Pak všechny parciální derivace nezávisí na pořadí derivování.*

Speciálně tedy pro $n = 2$ platí (při alternativním způsobu zápisu parciálních derivací):

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

# Taylorův polynom funkce jedné proměnné – opakování

Viděli jsme, že pro aproximaci funkce pomocí *lineárního polynomu slouží tečna (tedy diferenciál). Lze ale použít i aproximace vyšších řádů. V tomto obecnějším případě potom hovoříme o Taylorově polynomu.*

# Taylorův polynom funkce jedné proměnné – opakování

Viděli jsme, že pro aproximaci funkce pomocí *lineárního polynomu slouží tečna (tedy diferenciál). Lze ale použít i aproximace vyšších řádů. V tomto obecnějším případě potom hovoříme o Taylorově polynomu.*

## Definice

Nechť $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ je bod, ve kterém existují vlastní derivace $f'(x_0)$, $f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ funkce $f(x)$ až do řádu $n$. *Taylorův polynom stupně $n$ funkce $f(x)$ se středem v bodě $x_0$ je polynom*

$$T(x) = T_n(x) = T_n^f(x) = T_n^f(x; x_0)$$

*definovaný jako*

$$T(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

## Věta

*Nechť* $f(x)$ *má spojité derivace* $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ *na uzavřeném intervalu* $[a,b]$ *a nechť existuje vlastní derivace* $f^{(n+1)}(x)$ *na otevřeném intervalu* $(a,b)$. *Potom pro každý bod* $x \in (a,b)$ *existuje bod* $c \in (a,x)$ *tak, že platí rovnost*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \qquad \text{kde } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

*kde* $T_n(x)$ *je Taylorův polynom stupně* $n$ *funkce* $f(x)$ *se středem v bodě* $a$.

## Definice

Je-li $f : E_n \to \mathbb{R}$ libovolná dvakrát diferencovatelná funkce v bodě $x$, nazýváme symetrickou matici

$$Hf(x) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Hessovou maticí (příp. Hessiánem) funkce $f$ v bodě $x$. Často bývá Hessián značen $f''(x)$.

## Definice

Je-li $f : E_n \to \mathbb{R}$ libovolná dvakrát diferencovatelná funkce v bodě $x$, nazýváme symetrickou matici

$$Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Hessovou maticí (příp. Hessiánem) funkce $f$ v bodě $x$. Často bývá Hessián značen $f''(x)$.

## Poznámka

Analogicky jako v případě parciálních derivací lze definovat i směrové derivace vyšších řádů v bodě $x \in E_n$. Pak platí (za předpokladu spojitosti jedné ze stran v $x$)
$f_{uv}(x) = f_{vu}(x) = u^T Hf(x) v = (Hf(x)u) \cdot v$.

Pro křivku $c(t) = (x(t), y(t)) = (x_0 + \xi t, y_0 + \eta t)$ mají funkce

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= f(x(t), y(t)) \\ \beta(t) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left( f_{xx}(x_0, y_0)\xi^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\xi\eta + f_{yy}(x_0, y_0)\eta^2 \right) \end{aligned}$$

v bodě $(x_0, y_0)$ stejné derivace do druhého řádu včetně.

Pro křivku $c(t) = (x(t), y(t)) = (x_0 + \xi t, y_0 + \eta t)$ mají funkce

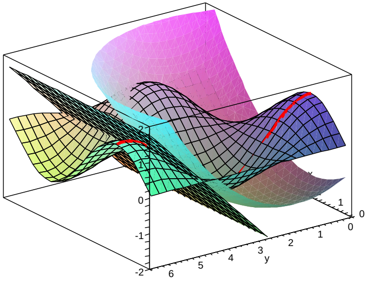
$$\begin{aligned}\alpha(t) &= f(x(t), y(t))\\ \beta(t) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta\\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0, y_0)\xi^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\xi\eta + f_{yy}(x_0, y_0)\eta^2\right)\end{aligned}$$

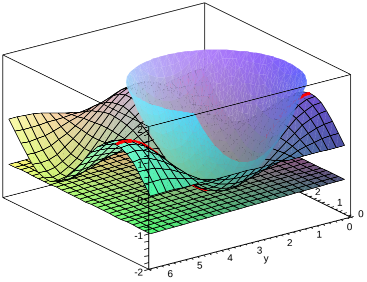
v bodě $(x_0, y_0)$ stejné derivace do druhého řádu včetně.
Funkci $\beta$ lze psát vektorově takto:

$$\beta(t) = f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\xi, \eta) \cdot Hf(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

nebo $\beta(t) = f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(v) + \frac{1}{2}Hf(x_0, y_0)(v, v)$, kde $v = (\xi, \eta) = c'(t)$ je přírůstek zadaný derivací křivky $c(t)$ a Hessián symetrická 2–forma.

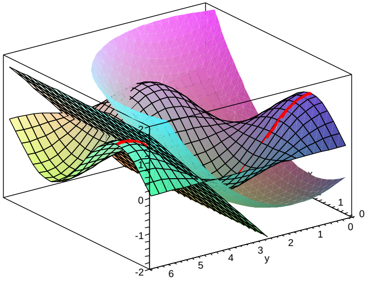
# Použití Hessiánu připomíná Taylorovu větu funkcí jedné proměnné!

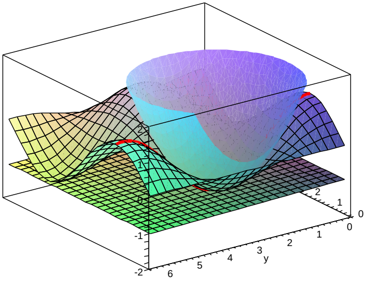



Tečná rovina je vynesena spolu s kvadratickým přiblížením pro funkci $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$.

# Použití Hessiánu připomíná Taylorovu větu funkcí jedné proměnné!




Tečná rovina je vynesena spolu s kvadratickým přiblížením pro funkci $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$.

Obecně pro funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$, body $x = [x_1, \dots, x_n] \in E_n$ a přírůstky $v = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ klademe

$$d^k f(x)(v) = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_k \le n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_1, \dots, x_n) \cdot \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}.$$

# Taylorova věta

Taylorova věta pro funkci jedné proměnné aproximovala danou funkci v okolí bodu $x_0$ *Taylorovým polynomem*, přičemž zároveň udávala chybu, jíž se při tomto odhadu dopouštíme.

# Taylorova věta

Taylorova věta pro funkci jedné proměnné aproximovala danou funkci v okolí bodu $x_0$ *Taylorovým polynomem*, přičemž zároveň udávala chybu, jíž se při tomto odhadu dopouštíme.
U funkcí více proměnných je situace podobná, pouze formálně složitější.

## Definice

*Taylorovým polynomem* funkce $f$ stupně $m$ (se středem) v bodě $x^*$ nazýváme polynom (více proměnných), který má s funkcí $f$ stejnou funkční hodnotu v daném bodě $x^*$ a stejnou hodnotu všech parciálních derivací až do řádu $m$ včetně.

## Věta (Taylorova)

*Nechť má funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x^*$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $m+1$. Pak pro $v \in \mathbb{R}^n$ platí:*

$$f(x) = f(x^* + v) = T_m(x) + R_m(x),$$

## Věta (Taylorova)

*Nechť má funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x^*$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $m+1$. Pak pro $v \in \mathbb{R}^n$ platí:*

$$f(x) = f(x^* + v) = T_m(x) + R_m(x),$$

*kde*

$$T_m(x) = f(x^*) + \mathrm{d}f(x^*)(v) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(x^*)(v) + \cdots + \frac{1}{m!}\mathrm{d}^m f(x^*)(v),$$

*resp.*

$$R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1} f(x^* + \theta v)(v), \quad \theta \in (0,1),$$

*je Taylorův polynom, resp. zbytek v Taylorově vzorci a $v = x - x^*$ je vektor diferencí.*

## Věta (Taylorova)

*Nechť má funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě $x^*$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $m+1$. Pak pro $v \in \mathbb{R}^n$ platí:*

$$f(x) = f(x^* + v) = T_m(x) + R_m(x),$$

*kde*

$$T_m(x) = f(x^*) + \mathrm{d}f(x^*)(v) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(x^*)(v) + \cdots + \frac{1}{m!}\,\mathrm{d}^m f(x^*)(v),$$

*resp.*

$$R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!}\,\mathrm{d}^{m+1} f(x^* + \theta v)(v), \quad \theta \in (0,1),$$

*je Taylorův polynom, resp. zbytek v Taylorově vzorci a $v = x - x^*$ je vektor diferencí.*

**Důkaz:** poměrně snadný s využitím Taylorovy věty pro funkci $F(t) = f(x^* + t \cdot v)$ jedné proměnné $t$.

Přibližme si uvedené pojmy ve dvou proměnných:

Přibližme si uvedené pojmy ve dvou proměnných:

Tečná rovina: $f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$

Přibližme si uvedené pojmy ve dvou proměnných:

Tečná rovina: $f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$

Výraz třetího řádu

$$\mathrm{d}^3 f(x, y)(\xi, \eta) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\xi^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\xi^2\eta + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\xi\eta^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\eta^3$$

Přibližme si uvedené pojmy ve dvou proměnných:
Tečná rovina: $f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$
Výraz třetího řádu

$$\mathrm{d}^3 f(x,y)(\xi,\eta) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\xi^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\xi^2\eta + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\xi\eta^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\eta^3$$

a obecně

$$\mathrm{d}^k f(x,y)(\xi,\eta) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-\ell}\partial y^{\ell}}\xi^{k-\ell}\eta^{\ell}.$$

### Poznámka

Uvedené výrazy Vám jistě (možná, snad?) připomínají *binomickou větu*. Tak si je lze rovněž "neformálně" zapamatovat:

$$d^k f(x,y)(\xi,\eta) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\xi + \frac{\partial}{\partial y}\eta\right)^k,$$

přičemž $j$-té mocniny nahrazujeme $j$-tými parciálními derivacemi.

# Aproximace

Taylorova věta nám (stejně jako v jednorozměrném případě) dává lepší možnosti aproximace funkcí v okolí bodu než pouhý diferenciál.
Přenost výpočtu samozřejmě přímo ovlivní i volba funkce, jejíž hodnoty budeme aproximovat.

# Aproximace

Taylorova věta nám (stejně jako v jednorozměrném případě) dává lepší možnosti aproximace funkcí v okolí bodu než pouhý diferenciál.
Přenost výpočtu samozřejmě přímo ovlivní i volba funkce, jejíž hodnoty budeme aproximovat.

## Příklad

Pomocí Taylorovy věty přibližně vypočteme $e^{0{,}05^3-0{,}02}$.

## Řešení

Přibližnou hodnotu vypočteme pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce $f(x, y) = \mathrm{e}^{x^3+y}$ v bodě $[0, 0]$ s diferencemi $v = (\xi, \eta) = (0,05; -0,02)$.

## Řešení

Přibližnou hodnotu vypočteme pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^3+y}$ v bodě $[0,0]$ s diferencemi $v = (\xi, \eta) = (0,05; -0,02)$.

Parciální derivace jsou:

$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{x^3+y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathrm{e}^{x^3+y} \cdot (3x^2 \cdot 3x^2 + 6x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \mathrm{e}^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{x^3+y}$.

## Řešení

Přibližnou hodnotu vypočteme pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce $f(x, y) = e^{x^3+y}$ v bodě $[0, 0]$ s diferencemi $v = (\xi, \eta) = (0,05; -0,02)$.

Parciální derivace jsou:

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^3+y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x^3+y} \cdot (3x^2 \cdot 3x^2 + 6x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = e^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x^3+y}$.

Pak

$$
\begin{aligned}
T_2(0+\xi, 0+\eta) &= \\
&= f(0,0) + \mathrm{d}f(0,0) \cdot (\xi, \eta) + (\xi, \eta) \cdot \mathrm{d}^2 f(0,0) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \\
&= 1 + \eta + \eta^2.
\end{aligned}
$$

## Řešení

Přibližnou hodnotu vypočteme pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce $f(x,y) = e^{x^3+y}$ v bodě $[0,0]$ s diferencemi $v = (\xi, \eta) = (0,05; -0,02)$.

Parciální derivace jsou:
$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^3+y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x^3+y} \cdot (3x^2 \cdot 3x^2 + 6x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = e^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x^3+y}$.

Pak

$$T_2(0+\xi, 0+\eta) =$$
$$= f(0,0) + \mathrm{d}f(0,0) \cdot (\xi,\eta) + (\xi,\eta) \cdot \mathrm{d}^2 f(0,0) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} =$$
$$= 1 + \eta + \eta^2.$$

Odtud dostáváme odhad

$$e^{0,05^3 - 0,02} \approx 1 - 0,02 + 0,02^2 = 0,9804.$$

# Plán přednášky

## Definice

Vnitřní bod $x^* \in E_n$ definičního oboru funkce $f$ je (lokálním) **maximem** (resp. **minimem**), jestliže existuje jeho okolí $U$ takové, že pro všechny body $x \in U$ platí $f(x) \leq f(x^*)$ (resp. $f(x) \geq f(x^*)$). Pokud nastává v předchozích nerovnostech ostrá nerovnost pro všechny $x \neq x^*$, hovoříme o **ostrém lokálním extrému**.

## Definice

Vnitřní bod $x^* \in E_n$ definičního oboru funkce $f$ je (lokálním) **maximem** (resp. **minimem**), jestliže existuje jeho okolí $U$ takové, že pro všechny body $x \in U$ platí $f(x) \leq f(x^*)$ (resp. $f(x) \geq f(x^*)$). Pokud nastává v předchozích nerovnostech ostrá nerovnost pro všechny $x \neq x^*$, hovoříme o **ostrém lokálním extrému**.

Vnitřní bod $x^* \in E_n$ definičního oboru funkce $f$, ve kterém je diferenciál $df(x)$ nulový, nazýváme **stacionární bod funkce** $f$.

## Definice

Vnitřní bod $x^* \in E_n$ definičního oboru funkce $f$ je (lokálním) **maximem** (resp. **minimem**), jestliže existuje jeho okolí $U$ takové, že pro všechny body $x \in U$ platí $f(x) \leq f(x^*)$ (resp. $f(x) \geq f(x^*)$). Pokud nastává v předchozích nerovnostech ostrá nerovnost pro všechny $x \neq x^*$, hovoříme o **ostrém lokálním extrému**.

Vnitřní bod $x^* \in E_n$ definičního oboru funkce $f$, ve kterém je diferenciál $df(x)$ nulový, nazýváme **stacionární bod funkce** $f$.

Nutnou podmínkou pro existenci maxima nebo minima v bodě $x^*$ (v případě diferencovatelnosti funkce $f$ v $x^*$) **je vymizení diferenciálu v tomto bodě, tj.** $df(x^*) = 0$. Skutečně, pokud je $df(x^*) \neq 0$, pak existuje směr $v$, ve kterém je $d_v f(x^*) \neq 0$. Pak ovšem nutně je podél přímky $x^* + tv$ na jednu stranu od bodu $x^*$ hodnota funkce roste a na druhou klesá.

## Příklad

Funkce $f : E_2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 1 & \text{pro } [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

má v počátku ostré lokální maximum (přitom zde není spojitá, a tedy ani diferencovatelná).

### Příklad

Funkce $f : E_2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 1 & \text{pro } [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

má v počátku ostré lokální maximum (přitom zde není spojitá, a tedy ani diferencovatelná).

### Příklad

Funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ je v počátku spojitá a má zde ostré lokální minimum, přestože v tomto bodě není diferencovatelná (grafem funkce je kuželová plocha – viz první přednáška).

# Stacionární body

Pro to, aby nabývala v daném bodě diferencovatelná funkce svého lokálního extrému (maxima nebo minima), je nutnou podmínkou, aby byl daný bod *stacionární*.

# Stacionární body

Pro to, aby nabývala v daném bodě diferencovatelná funkce svého lokálního extrému (maxima nebo minima), je nutnou podmínkou, aby byl daný bod *stacionární*.
Přitom ale (podobně jako u funkcí jedné proměnné) stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému.
Např. funkce $f(x, y) = (x - x_0)(y - y_0)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ stacionární bod ($\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (y - y_0)dx + (x - x_0)dy$), nemá zde však zřejmě lokální extrém (jde o tzv. "sedlo").

# Stacionární body

Pro to, aby nabývala v daném bodě diferencovatelná funkce svého lokálního extrému (maxima nebo minima), je nutnou podmínkou, aby byl daný bod *stacionární*.
Přitom ale (podobně jako u funkcí jedné proměnné) stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému.
Např. funkce $f(x,y) = (x - x_0)(y - y_0)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ stacionární bod ($\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (y - y_0)dx + (x - x_0)dy$), nemá zde však zřejmě lokální extrém (jde o tzv. "sedlo").
Poznat, jakého typu je daný stacionární bod, nám stejně jako v případě funkcí jedné proměnné umožní (díky Taylorově větě) derivace vyšších řádů.

# Situace v jedné proměnné

Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod $x_0$ (tj. $f'(x_0) = 0$). Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce v $x_0$ ostré lokální maximum (analogicky neostré, resp. minimum).

# Situace v jedné proměnné

Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod $x_0$ (tj. $f'(x_0) = 0$).
Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce v $x_0$ ostré lokální maximum (analogicky neostré, resp. minimum).
Toto tvrzení vyplynulo z Taylorovy věty (stačí uvážit Taylorův polynom 1. stupně a příslušný zbytek)

$$\begin{aligned} f(x) = T_1(x) + R_1(x) = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2 = \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2, \end{aligned}$$

kde $\xi$ leží mezi $x$ a $x_0$.

# Situace v jedné proměnné

Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod $x_0$ (tj. $f'(x_0) = 0$). Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce v $x_0$ ostré lokální maximum (analogicky neostré, resp. minimum).
Toto tvrzení vyplynulo z Taylorovy věty (stačí uvážit Taylorův polynom 1. stupně a příslušný zbytek)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= T_1(x) + R_1(x) = \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2 = \\
&= f(x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2,
\end{aligned}
$$

kde $\xi$ leží mezi $x$ a $x_0$. Ze spojitosti $f''$ a vlastnosti $f''(x_0) < 0$ pak pro $\xi$ dostatečně blízko $x_0$ dostáváme $f''(\xi) < 0$ a tedy $R_1(x) < 0$ dostatečně blízko $x_0$ . Proto zde $f(x) < f(x_0)$ a $x_0$ je lokálním maximem.

# Situace ve více proměnných

Mějme funkci $f : E_n \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod $x^*$ (tj. $f'(x^*) = \mathbf{0}$ – nulový vektor parciálních derivací).

# Situace ve více proměnných

Mějme funkci $f : E_n \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod $x^*$ (tj. $f'(x^*) = \mathbf{0}$ – nulový vektor parciálních derivací).
Z Taylorovy věty pak dostáváme (opět stačí uvážit Taylorův polynom 1. stupně a příslušný zbytek)

$$\begin{aligned} f(x) = {} & T_1(x) + R_1(x) = \\ & = f(x^*) + \mathrm{d}f(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(\xi)(x - x^*) = \\ & = f(x^*) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(\xi)(x - x^*), \end{aligned}$$

kde $\xi = x^* + \theta v$ (pro $\theta \in (0,1)$) leží *mezi* $x$ a $x^*$.

# Situace ve více proměnných

Mějme funkci $f : E_n \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod $x^*$ (tj. $f'(x^*) = \mathbf{0}$ – nulový vektor parciálních derivací).
Z Taylorovy věty pak dostáváme (opět stačí uvážit Taylorův polynom 1. stupně a příslušný zbytek)

$$\begin{aligned} f(x) &= T_1(x) + R_1(x) = \\ &= f(x^*) + \mathrm{d}f(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(\xi)(x - x^*) = \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(\xi)(x - x^*), \end{aligned}$$

kde $\xi = x^* + \theta v$ (pro $\theta \in (0,1)$) leží *mezi* $x$ a $x^*$.
Zbývá do více proměnných přeložit podmínku, která říká, že výraz

$$\mathrm{d}^2 f(\xi)(x - x^*) = (x - x^*)^T Hf(\xi)(x - x^*)$$

je nekladný (resp. nezáporný) pro libovolné $x$.

# Pozitivně (negativně) definitní kvadratické formy

## Definice

Kvadratická forma $h : E_n \to \mathbb{R}$ je

- **pozitivně definitní**, je-li $h(u) > 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **pozitivně semidefinitní**, je-li $h(u) \geq 0$ pro všechny $u \in V$
- **negativně definitní**, je-li $h(u) < 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **negativně semidefinitní**, je-li $h(u) \leq 0$ pro všechny $u \in V$
- **indefinitní**, je-li $h(u) > 0$ a $h(v) < 0$ pro vhodné $u, v \in V$.

# Pozitivně (negativně) definitní kvadratické formy

## Definice

Kvadratická forma $h : E_n \to \mathbb{R}$ je

- **pozitivně definitní**, je-li $h(u) > 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **pozitivně semidefinitní**, je-li $h(u) \geq 0$ pro všechny $u \in V$
- **negativně definitní**, je-li $h(u) < 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **negativně semidefinitní**, je-li $h(u) \leq 0$ pro všechny $u \in V$
- **indefinitní**, je-li $h(u) > 0$ a $h(v) < 0$ pro vhodné $u, v \in V$.

Často rovněž hovoříme o definitnosti matice $A$ kvadratické formy $h$ (jsou spolu ve vztahu $h(u) = u^T Au = Au \cdot u$).

# Pozitivně (negativně) definitní kvadratické formy

**Definice**

Kvadratická forma $h : E_n \to \mathbb{R}$ je

- **pozitivně definitní**, je-li $h(u) > 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **pozitivně semidefinitní**, je-li $h(u) \geq 0$ pro všechny $u \in V$
- **negativně definitní**, je-li $h(u) < 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **negativně semidefinitní**, je-li $h(u) \leq 0$ pro všechny $u \in V$
- **indefinitní**, je-li $h(u) > 0$ a $h(v) < 0$ pro vhodné $u, v \in V$.

Často rovněž hovoříme o definitnosti matice $A$ kvadratické formy $h$ (jsou spolu ve vztahu $h(u) = u^T Au = Au \cdot u$).

S těmito pojmy jste se setkali již v části věnované lineárním modelům a měli byste tedy umět rozeznat definitnost kvadratické formy (resp. její matice v dané bázi).

# Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice $A$ je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

# Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice $A$ je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice $A$ (tj. kořeny $\lambda$ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,

# Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice $A$ je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice $A$ (tj. kořeny $\lambda$ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,
- všechny hlavní minory $A$ jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)

# Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice $A$ je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice $A$ (tj. kořeny $\lambda$ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,
- všechny hlavní minory $A$ jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)

# Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice $A$ je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice $A$ (tj. kořeny $\lambda$ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,
- všechny hlavní minory $A$ jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)

Daná symetrická matice $A$ je *negativně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

# Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice $A$ je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice $A$ (tj. kořeny $\lambda$ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,
- všechny hlavní minory $A$ jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)

Daná symetrická matice $A$ je *negativně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice $A$ jsou záporné,

# Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice $A$ je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice $A$ (tj. kořeny $\lambda$ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,
- všechny hlavní minory $A$ jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)

Daná symetrická matice $A$ je *negativně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice $A$ jsou záporné,
- hlavní minory $A$ střídají znaménko, počínaje záporným.

## Věta

*Nechť* $f : E_n \to \mathbb{R}$ *je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce a* $x^* \in E_n$ *nechť je stacionární bod funkce* $f$*. Potom*

1. *je-li* $Hf(x^*)$ *pozitivně (negativně) definitní, má* $f$ *v* $x^*$ *ostré lokální minimum (maximum),*
2. *je-li* $Hf(x^*)$ *indefinitní, nemá* $f$ *v bodě* $x^*$ *lokální extrém.*
3. *má-li* $f$ *v* $x^*$ *lokální minimum (maximum), je* $Hf(x^*)$ *pozitivně (negativně) semidefinitní,*

## Věta

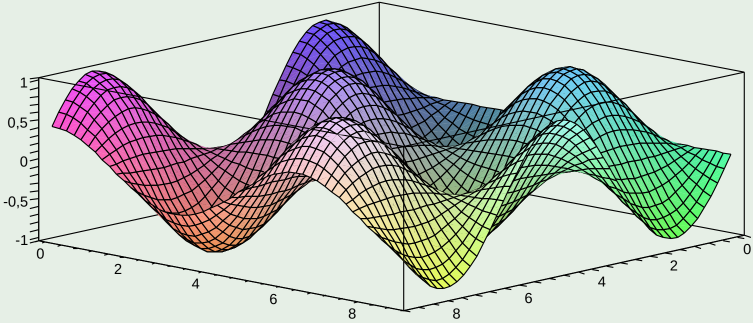
*Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce a $x^* \in E_n$ nechť je stacionární bod funkce $f$. Potom*

1. *je-li $Hf(x^*)$ pozitivně (negativně) definitní, má $f$ v $x^*$ ostré lokální minimum (maximum),*
2. *je-li $Hf(x^*)$ indefinitní, nemá $f$ v bodě $x^*$ lokální extrém.*
3. *má-li $f$ v $x^*$ lokální minimum (maximum), je $Hf(x^*)$ pozitivně (negativně) semidefinitní,*

Všimněme si, že věta nedává žádný výsledek, pokud je hessián funkce ve zkoumaném bodě degenerovaný (nulový). Důvod je opět stejný jako u funkcí jedné proměnné. V takových případech totiž existují směry, ve kterých první i druhá derivace zmizí a my proto v tomto řádu přiblížení neumíme poznat, zda se funkce bude chovat jako $t^3$ nebo jako $\pm t^4$ dokud nespočteme alespoň v potřebných směrech derivace vyšší.

## Příklad

Uvažme funkci $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$, která připomíná známá kartonová plata na vajíčka a spočtěme její lokální extrémy.



## Příklad (pokr.)

Spočtěme si nejprve první parciální derivace:

$$f_x(x,y) = \cos(x)\cos(y), \;\; f_y(x,y) = -\sin(x)\sin(y),$$

takže obě derivace budou nulové pro dvě sady bodů

1. $\cos(x) = 0$, $\sin(y) = 0$, to je $[x,y] = [\frac{2k+1}{2}\pi, \ell\pi]$, pro libovolné $k, \ell \in \mathbb{Z}$
2. $\cos(y) = 0$, $\sin(x) = 0$, to je $[x,y] = [k\pi, \frac{2\ell+1}{2}\pi]$, pro libovolné $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

## Příklad (pokr.)

Spočtěme si nejprve první parciální derivace:

$$f_x(x,y) = \cos(x)\cos(y), \;\; f_y(x,y) = -\sin(x)\sin(y),$$

takže obě derivace budou nulové pro dvě sady bodů

1. $\cos(x) = 0$, $\sin(y) = 0$, to je $[x,y] = [\frac{2k+1}{2}\pi, \ell\pi]$, pro libovolné $k, \ell \in \mathbb{Z}$
2. $\cos(y) = 0$, $\sin(x) = 0$, to je $[x,y] = [k\pi, \frac{2\ell+1}{2}\pi]$, pro libovolné $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Druhé parciální derivace jsou

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y) \\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

## Příklad (pokr.)

V našich dvou sadách bodů tedy dostáváme následující hessiány:

1. $Hf(k\pi + \frac{\pi}{2}, \ell\pi) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když $k$ a $\ell$ jsou *různé* parity a naopak pro $-$,
2. $Hf(k\pi, \ell\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když $k$ a $\ell$ jsou různé parity a naopak pro $-$.

## Příklad (pokr.)

V našich dvou sadách bodů tedy dostáváme následující hessiány:

1. $Hf(k\pi + \frac{\pi}{2}, \ell\pi) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když $k$ a $\ell$ jsou *různé* parity a naopak pro $-$,
2. $Hf(k\pi, \ell\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když $k$ a $\ell$ jsou různé parity a naopak pro $-$.

Protože naše funkce má spojitý hessián, který je nedegenerovaný, nastane lokální maximum tehdy a jen tehdy, když náš bod $(x^*, y^*)$ patří do první skupiny se stejnými paritami $k$ a $\ell$. Když budou parity opačné, pak bod z první skupiny bude naopak bodem lokálního minima.

## Příklad (pokr.)

V našich dvou sadách bodů tedy dostáváme následující hessiány:

1. $Hf(k\pi + \frac{\pi}{2}, \ell\pi) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když $k$ a $\ell$ jsou *různé* parity a naopak pro $-$,
2. $Hf(k\pi, \ell\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když $k$ a $\ell$ jsou různé parity a naopak pro $-$.

Protože naše funkce má spojitý hessián, který je nedegenerovaný, nastane lokální maximum tehdy a jen tehdy, když náš bod $(x^*, y^*)$ patří do první skupiny se stejnými paritami $k$ a $\ell$. Když budou parity opačné, pak bod z první skupiny bude naopak bodem lokálního minima. Naopak, hessián u druhé skupiny bodů se vyčíslí kladně na některých přírůstcích a záporně na jiných. Stejně se proto bude chovat i celá funkce $f$ v okolí těchto stacionárních bodů.

## Příklad (Poznámky)

- matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ je indefinitní, přestože má oba hlavní minory nekladné (pro semidefinitnost je znaménko minorů pouze nutnou podmínkou!)

## Příklad (Poznámky)

- matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ je indefinitní, přestože má oba hlavní minory nekladné (pro semidefinitnost je znaménko minorů pouze nutnou podmínkou!)
- nalezené lokální extrémy šlo jistě najít snadněji úvahou o nabývání hodnot $\pm 1$ funkcí $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$, neměli bychom ale jistotu, že jde o **všechny** extrémy.

# Absolutní extrémy

## Definice

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ a $M$ je podmnožinou definičního oboru $f$.
V bodě $x^*$ nabývá $f$ absolutního (globálního) maxima (minima) na $M$, pokud je $f(x^*) \geq f(x)$ $(f(x^*) \leq f(x))$ pro všechna $x \in M$.

# Absolutní extrémy

**Definice**

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ a $M$ je podmnožinou definičního oboru $f$.
V bodě $x^*$ nabývá $f$ absolutního (globálního) maxima (minima) na $M$, pokud je $f(x^*) \geq f(x)$ $(f(x^*) \leq f(x))$ pro všechna $x \in M$.

Existence extrémů na kompaktní (uzavřené a ohraničené) množině vyplývá z Weierstrassovy věty.

**Věta**

*Nechť $M \subseteq E_n$ je kompaktní množina, $f : M \to \mathbb{R}$ spojitá. Pak $f$ nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálních extrémů uvnitř $M$ nebo v některém hraničním bodě.*

# Absolutní extrémy

## Definice

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ a $M$ je podmnožinou definičního oboru $f$.
V bodě $x^*$ nabývá $f$ absolutního (globálního) maxima (minima) na $M$, pokud je $f(x^*) \geq f(x)$ $(f(x^*) \leq f(x))$ pro všechna $x \in M$.

Existence extrémů na kompaktní (uzavřené a ohraničené) množině vyplývá z Weierstrassovy věty.

## Věta

*Nechť $M \subseteq E_n$ je kompaktní množina, $f : M \to \mathbb{R}$ spojitá. Pak $f$ nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálních extrémů uvnitř $M$ nebo v některém hraničním bodě.*

Hledání absolutních extrémů funkce na množině tak máme převedeno na nalezení lokálních extrémů (což umíme) a vyšetření hraničních bodů. To je ale často komplikovanější záležitost, které se budeme více věnovat později v části o *vázaných extrémech*.

## Příklad

Nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ na množině $M$, která je dána trojúhelníkem, tvořeným souřadnými osami a přímkou $x + y - 4 = 0$.

## Příklad

Nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ na množině $M$, která je dána trojúhelníkem, tvořeným souřadnými osami a přímkou $x + y - 4 = 0$.

## Řešení

Jediným stacionárním bodem je $[1, 1]$, kde nastává absolutní maximum $f(1, 1) = 1$. Absolutní minimum $-12$ nastává v hraničních bodech $[4, 0]$ a $[0, 4]$.