Democvičení

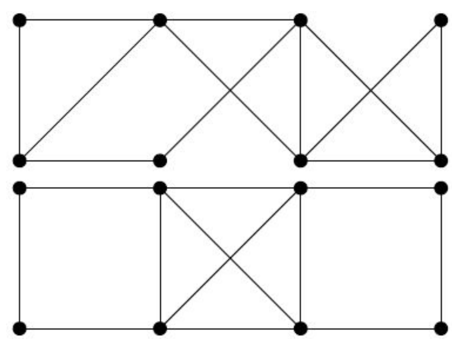
MB101 - jaro 2012

19. listopadu 2012

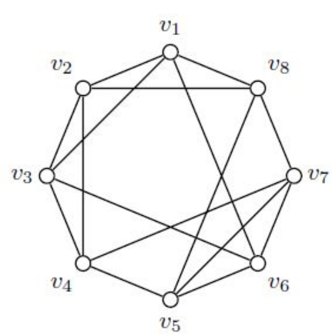
Příklad 1 (Úvodní)**.** Dokažte, že nelze projít koněm přes všechna políčka šachovnice 3×3.

Příklad 2. Rozhodněte, zda jsou následující grafy eulerovské. Pokud nejsou, doplňte je přidáním hran na eulerovské (je-li to možné).

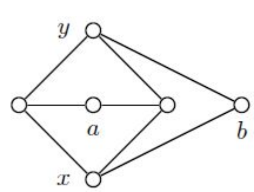
Nalezněte eulerovské tahy.



Příklad 3. Rozhodněte, zda je daný graf eulerovský, případně nalezněte eulerovský tah.



Příklad 4. Máme dán graf $K_{3,3}$ bez jedné hrany



1. Je možno graf $K_{3,3}-e$ nakreslit jedním uzavřeným tahem? Nakreslete nebo zdůvodněte, proč to není možné.

2. Je možno graf $K_{3,3}-e$ nakreslit jedním otevřeným tahem? Nakreslete nebo zdůvodněte, proč to není možné.

3. Je možno graf $K_{3,3}-e$ nakreslit dvěma otevřenými tahy? Nakreslete nebo zdůvodněte, proč to není možné.

4. Kolik nejméně hran je třeba přidat do grafu $K_{3,3} - e$, aby jej bylo možno nakreslit jedním otevřeným tahem?

5. Kolik nejméně hran je třeba přidat do grafu $K_{3,3} - e$, aby jej bylo možno nakreslit jedním uzavřeným tahem?

Příklad 5. Najděte příklad souvislého grafu, který má dva vrcholy lichého stupně a všechny ostatní vrcholy sudého stupně a do kterého

1. stačí přidat jedinou hranu tak, aby byl eulerovský.

2. není možné přidat jedinou hranu tak, aby byl eulerovský.

Příklad 6. Ukažte, že souvislý graf s 2t vrcholy lichého stupně je možno nakreslit t otevřenými eulerovskými tahy.

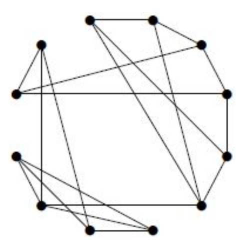
Příklad 7. Pro každé $t \in \mathbb{N}$ najděte příklad souvislého grafu, který

1. není souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy.

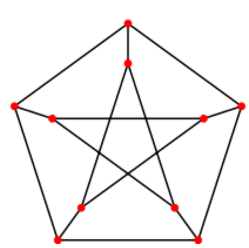
2. je souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy, ale není možné přidáním t hran získat eulerovský graf.

3. je souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy, a přidáním t hran je možné získat eulerovský graf.

Příklad 8. Nalezněte hamiltonovskou kružnici v následujícím grafu



Příklad 9. Rozhodněte, zda je Petersenův graf eulerovský a zda v něm existuje hamiltonovská cesta.



Příklad 10. Může jezdec projít šachovnici (o 64 polích) tak, aby každým polem prošel právě jednou a posledním tahem se vrátil na výchozí pole?

Věta 1 (Dirac)**.** *Nechť $G = [U, H]$ je konečný graf, $|U| = n \geq 3$ a $st(x) \geq n - 2$ pro každý uzel $x \in U$. Pak je G hamiltonovský.*

Věta 2 (Ore)**.** *Buď $G = [U, H]$ konečný graf, $|U| \geq 3$. Nechť pro každé dva uzly $x, y \in U$, které nejsou sousední, platí $st(x) + st(y) \geq |U|$. Pak je graf $[U, H]$ hamiltonovský.*

Příklad 11. Sestrojte příklad hamiltonovského grafu, který splňuje předpoklady Oreho věty, ale nesplňuje předpoklady věty Diracovy.

Příklad 12. Problém čínského pošťáka v hranově ohodnoceném neorientovaném grafu je problémem nalezení nejkratšího uzavřeného sledu, který obsahuje každou hranu v grafu. Nalezněte řešení tohoto problému pro graf na obrázku.