Spojité modely a statistika – 1. přednáška
Funkce a zobrazení více proměnných

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

15. 9. 2014

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant, *Matematika drsně a svižně*, MU Brno, 2013, 774 s. (též jako e-text).
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, *Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple*, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- *Předmětové záložky v IS MU*

V diferenciálním a integrálním počtu funkcí jedné proměnné jsme se (jak už název napovídá) zabývali zobrazeními

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Přirozeně se nabízí otázka, jak příslušné pojmy zobecnit pro případ zobrazení

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

Začneme dvěma speciálními případy:

- n=1 – funkce více proměnných
- m=1 – křivka v prostoru $\mathbb{R}^n$

Definice

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazýváme *reálná funkce více proměnných* (ty obvykle značíme $x_1, \ldots, x_n$). Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ často místo číslovaných proměnných používáme písmena x, y, z. To znamená, že funkce f definované v „prostoru“ $E_n = \mathbb{R}^n$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$$

a např. funkce f definované v „rovině“ $E_2 = \mathbb{R}^2$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

Definiční obor $A \subset \mathbb{R}^n$ – množina, kde je funkce definována. (Častým úkolem - nejen - v písemkách bývá nalézt k dané formuli pro funkci co největší definiční obor, na kterém má tato formule smysl.)

Definiční obor funkce

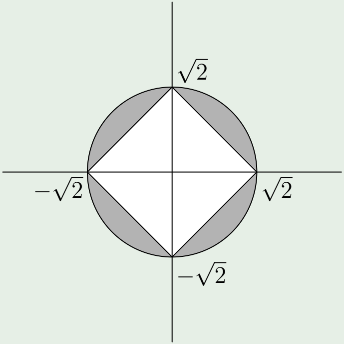
Příklad

Nalezněte a v rovině zobrazte definiční obor funkce

$$f(x, y) = \arccos(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{|x| + |y| - \sqrt{2}}.$$

Řešení

Funkce arccos připouští argument pouze z intervalu $[-1, 1]$, odmocnina připouští pouze nezáporný argument. Definičním oborem je tedy množina bodů (x, y) vyznačená na obrázku.



Příklady

Příklad

Zobrazte v rovině definiční obory funkcí:

a) $f(x,y) = \sqrt{1 - (\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4})}$,

b) $f(x,y) = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$,

Příklad

Určete definiční obor funkce

$$f(x,y,z) = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Definice

Grafem funkce více proměnných je podmnožina $G_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ splňující

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n));\ (x_1, \dots, x_n) \in A\},$$

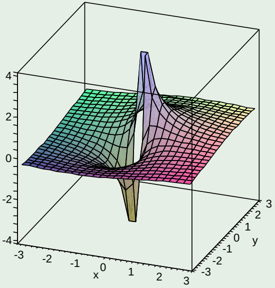
kde A je definiční obor funkce f.

Příklad

Grafem funkce definované v E_2

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

je plocha na obrázku, maximálním definičním oborem je $E_2 \setminus \{(0, 0)\}$.



Vrstevnice funkce dvou proměnných

U funkcí dvou proměnných uvažujeme pro lepší názornou představu rovněž tzv. vrstevnice funkce (obdoba vrstevnic v geografickém smyslu).

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných, $c \in \mathbb{R}$. Množinu

$$f_c = \{(x, y) \in R^2 : f(x, y) = c\}$$

nazýváme *vrstevnice funkce f na úrovni c*.

Zřejmě jde v případě vrstevnice na úrovni c o přímou analogii řezu grafu funkce f rovinou $z = c$. Pro představu o grafu funkce dvou proměnných jsou samozřejmě užitečné rovněž řezy rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a rovinami rovnoběžnými (kde je místo 0 jiná konstanta).

Příklady

Příklad

Načrtněte vrstevnice funkcí:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$,

b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$.

Křivky

Už na příkladu s vrstevnicemi jsme viděli příklad „prostorových“ křivek (správněji spíše jejich *obrazů*).

Definice

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \to E_n$.

Je třeba rozlišovat křivku a její obraz v E_n:

Příklad

Obrazem křivky $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$ v rovině E_2 je jednotková kružnice, stejně jako v případě **jiné** křivky $t \mapsto (\cos(t^3), \sin(t^3))$, $t \in \mathbb{R}$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné lze definovat:

Definice

- *Limita:* $\lim_{t\to t_0} c(t) \in E_n$
- *Derivace:* $c'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{(c(t)-c(t_0))}{t-t_0} \in \mathbb{R}^n$
- *Integrál:* $\int_a^b c(t)dt \in \mathbb{R}^n$.

Limity, derivace i integrály lze spočítat po jednotlivých n souřadných složkách.

Analogie souvislosti Riemannova integrálu a primitivní funkce pro křivky:

Věta

Je-li $c : \mathbb{R} \to E_n$ křivka spojitá na intervalu $[a, b]$, pak existuje její Riemannův integrál $\int_a^b c(t)dt$. Navíc je křivka

$$C(t) = \int_a^t c(s)ds \in \mathbb{R}^n$$

dobře definovaná, diferencovatelná a platí $C'(t) = c(t)$ pro všechny hodnoty $t \in [a, b]$.

Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \to E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$, tj. vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření $\mathbb{R}^n$ daný derivací.

Přímka zadaná parametricky $T: \ c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce* c v bodě t_0, na rozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky c.

V geometrii a fyzice se v souvislosti s křivkami zavádějí i další pojmy:

Příklad

Pro křivku $c(t) = (\cos t, t, t^2), t \in [0, 3]$ určete *rychlost*, *velikost* rychlosti a *zrychlení* v čase $t = 0$.

$c'(t) = (-\sin t, 1, 2t)$, $c''(t) = (-\cos t, 0, 2)$,

$c'(0) = (0, 1, 0)$, $\|c'(0)\| = 1$, $c''(0) = (-1, 0, 2)$.

Zrychlení ve směru tečny je pak $\frac{1}{\|c'(0)\|}(c'(0) \cdot c''(0))$.

Příklady

Příklad

Určete tečnu křivky dané předpisem

$$f(t) = (2\cos t + \cos 3t, \sin 2t, t)$$

v bodě $t = \frac{3\pi}{2}$.

Příklad

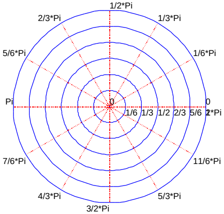
Na křivce $f(t) = (t, t^2, t^3)$ najděte takový bod, že jím procházející tečna je rovnoběžná s rovinou $x + 2y + z = 1$.

Zobrazení

Křivky a funkce jsou speciální případy zobrazení $F : E_m \to E_n$. Stejně jako u vektorových prostorů, volba souřadnic, tj. našeho „pohledu na věc“, může zjednodušit nebo zhoršit naše vnímání. Změna souřadnic je invertibilní zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Příklad

Příklad: polohu P zadáváme jako vzdálenost od počátku souřadnic r a úhel φ mezi spojnicí s počátkem a osou x.



Přechod z polárních souřadnic do standardních je

$$P_{\text{polární}} = (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = P_{\text{kartézské}}$$

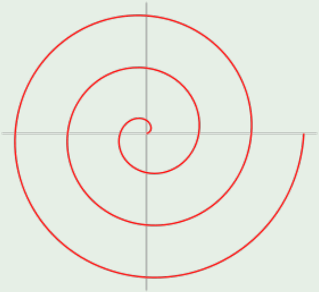
Graf funkce můžeme také vnímat jako obraz zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Funkce jedné proměnné v polárních souřadnicích

Jak už jsme podotkli, kartézské souřadnice jsou nejběžnější, ale nikoliv jediné možné. Mnohé „objekty“ mají např. v polárních souřadnicích výrazně jednodušší vyjádření (toho využijeme i později zejména pro výpočty obsahů či objemů takových objektů).

Příklad

Archimédova spirála má v polárních souřadnicích rovnici $r(\varphi) = a + b\varphi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry.



Limita funkce více proměnných

Definici limity funkce v bodě lze takřka slovo od slova přepsat podle situace v případě funkcí jedné proměnné (okolí bodu již ale samozřejmě vypadají jinak).

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má ve svém *hromadném* bodě $a \in \mathbb{R}^n$ limitu L, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(a) \setminus \{a\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.
Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Obdobně jde (při vhodné definici okolí) limitu definovat i v „nevlastních“ bodech (kterých je pro $n \geq 1$ již 2^n).
Má-li mít funkce v daném bodě limitu, *nesmí záležet na „cestě“*, po které k danému bodu konvergujeme (analogie limit zleva a zprava u funkcí jedné proměnné).

Vlastnosti limit

Analogické jako v případě jedné proměnné:

Věta

- *jednoznačnost limity,*
- *věta o třech limitách* [a]*,*
- *linearita, tj.*

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x)+d\cdot g(x)) = c\cdot\lim_{x\to a} f(x) + d\cdot\lim_{x\to a} g(x),$$

- *multiplikativita, divisibilita,*
- *je-li* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *a funkce* $g(x)$ *je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu a, pak*

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0.$$

[a] někdy také *o dvou policajtech :)*

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ v bodě $(0, 0)$.

Řešení

Viz cvičení.

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ v bodě $(0, 0)$.

Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ v bodě $(0, 0)$.

Příklady k procvičení

Příklad

Vypočtěte limity nebo dokažte jejich neexistenci.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x}$,

b) $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$,

c) $\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$,

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy}$.

Spojitost funkce

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v hromadném bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pokud má v bodě a vlastní limitu a platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Věta (Weierstrassova)

Spojitá funkce na kompaktní množině zde nabývá maxima i minima.

Věta (Bolzanova)

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá na otevřené **souvislé** *množině A. Jsou-li $a, b \in A$ takové, že $f(a) < 0 < f(b)$, pak existuje $c \in A$ tak, že $f(c) = 0$.*