Matematika III – 3. přednáška
Funkce více proměnných: derivace vyšších řádů, lokální a absolutní extrémy

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

3. 10. 2012

Obsah přednášky

Plán přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. `http://www.math.muni.cz/~plch/mapm`).
- *Předmětové záložky v IS MU*

Plán přednášky

Diferenciál funkce jedné proměnné

V minulém semestru jste si říkali, že diferenciál dy funkce jedné proměnné v bodě x_0 je přírůstek na tečně ke grafu funkce $y = f(x)$ v tomto bodě a jeho existence je ekvivalentní existenci derivace tamtéž.

Diferenciál funkce jedné proměnné

V minulém semestru jste si říkali, že diferenciál dy funkce jedné proměnné v bodě x_0 je přírůstek na tečně ke grafu funkce $y = f(x)$ v tomto bodě a jeho existence je ekvivalentní existenci derivace tamtéž.
Ukázali jste si, že diferenciál závislé proměnné dy je **lineární funkcí** diferenciálu nezávislé proměnné dx, splňující

$$dy = f'(x_0) \cdot dx.$$

Diferenciál funkce jedné proměnné

V minulém semestru jste si říkali, že diferenciál dy funkce jedné proměnné v bodě x_0 je přírůstek na tečně ke grafu funkce $y = f(x)$ v tomto bodě a jeho existence je ekvivalentní existenci derivace tamtéž.
Ukázali jste si, že diferenciál závislé proměnné dy je **lineární funkcí** diferenciálu nezávislé proměnné dx, splňující

$$dy = f'(x_0) \cdot dx.$$

Formálně říkáme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v x_0, pokud existuje $A \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0.$$

(Přitom z definice derivace snadno plyne, že pak $A = f'(x_0)$.)

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Definice

Funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ je *diferencovatelná v bodě* x, jestliže existuje vektor $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ takový, že pro všechny „směry“ $v \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|} \big(f(x+v) - f(x) - a \cdot v \big) = 0.$$

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Definice

Funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ je *diferencovatelná v bodě* x, jestliže existuje vektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ takový, že pro všechny „směry“ $v \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|} \big(f(x+v) - f(x) - a \cdot v \big) = 0.$$

Lineární funkci *df* definovanou předpisem $v \mapsto a \cdot v$ (závislou na vektorové proměnné v) nazýváme *diferenciál funkce* f.

V literatuře se často také říká *totální diferenciál* df funkce f.

Diferenciál – shrnutí

Funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ je tedy *diferencovatelná v bodě* x, jestliže existuje vektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ takový, že pro všechny „směry“ $v \in \mathbb{R}^n$ platí

1. v bodě x existují všechny směrové derivace $d_v f(x)$, $v \in \mathbb{R}^n$,
2. $v \mapsto d_v f(x)$ je lineární v závislosti na přírůstku v
3. $0 = \lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}\big(f(x+v) - f(x) - d_v f(x)\big)$,
   tj. $0 = \lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}\big(f(x+v) - f(x) - a \cdot v\big)$.

Diferenciál vs. spojitost

Díky tomuto zesílení parciálních a směrových derivací již dostáváme **spojitost:**

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferencovatelná v bodě* $x \in \mathbb{R}^n$*, pak je v tomto bodě spojitá.*

Diferenciál vs. spojitost

Díky tomuto zesílení parciálních a směrových derivací již dostáváme **spojitost:**

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $x \in \mathbb{R}^n$, pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz: Z diferencovatelnosti f v bodě x plyne $f(x+v) - f(x) = a \cdot v + \tau(v)$, kde $\lim_{v \to 0} \frac{\tau(v)}{\|v\|} = 0$.

Diferenciál vs. spojitost

Díky tomuto zesílení parciálních a směrových derivací již dostáváme **spojitost:**

Věta

Je-li funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferencovatelná v bodě* $x \in \mathbb{R}^n$, *pak je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz: Z diferencovatelnosti f v bodě x plyne
$f(x+v) - f(x) = a \cdot v + \tau(v)$, kde $\lim_{v \to 0} \frac{\tau(v)}{\|v\|} = 0$.
Proto:

$$\lim_{v \to 0} \big(f(x+v) - f(x)\big) = \lim_{v \to 0} \big(a \cdot v + \tau(v)\big) = 0,$$

a tedy

$$\lim_{v \to 0} f(x+v) = f(x).$$

$\square$

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x, pak má v tomto bodě všechny směrové (a tedy i parciální) derivace. Pro libovolné $v \in \mathbb{R}^n$ je přitom $d_v f(x) = \mathrm{d}f(x)(v)$, tj. v označení z definice diferenciálu

$$d_v f(x) = a \cdot v.$$

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x, pak má v tomto bodě všechny směrové (a tedy i parciální) derivace. Pro libovolné $v \in \mathbb{R}^n$ je přitom $d_v f(x) = \mathrm{d}f(x)(v)$, tj. v označení z definice diferenciálu

$$d_v f(x) = a \cdot v.$$

Důkaz:

$$d_v f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x+tv) - f(x)\big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(\mathrm{d}f(x)(tv) + \tau(tv)\big) =$$

$$= \mathrm{d}f(x)(v) + \|v\| \lim_{t\to 0} \frac{\tau(tv)}{\|tv\|} = \mathrm{d}f(x)(v) = a \cdot v.$$

Věta

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x, pak má v tomto bodě všechny směrové (a tedy i parciální) derivace. Pro libovolné $v \in \mathbb{R}^n$ je přitom $d_v f(x) = \mathrm{d}f(x)(v)$, tj. v označení z definice diferenciálu

$$d_v f(x) = a \cdot v.$$

Důkaz:

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\mathrm{d}f(x)(tv) + \tau(tv)) =$$
$$= \mathrm{d}f(x)(v) + \|v\| \lim_{t \to 0} \frac{\tau(tv)}{\|tv\|} = \mathrm{d}f(x)(v) = a \cdot v.$$

Poznámka

Z předchozího je ihned vidět, že vektor parciálních derivací $f'(x)$ je přímo roven vektoru a.

Uvažujme $f : E_2 \to \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi.
Diferenciál v pevném bodě $[x_0, y_0]$ je lineární funkce $\mathrm{d}f : E_2 \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

na přírůstcích se souřadnicemi danými právě parciálními derivacemi.

Uvažujme $f : E_2 \to \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi.
Diferenciál v pevném bodě $[x_0, y_0]$ je lineární funkce $\mathrm{d}f : E_2 \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

na přírůstcích se souřadnicemi danými právě parciálními derivacemi.

Příklad

Přímo z definice určete $\mathrm{d}f$ a funkci τ pro $f(x, y) = x^2 + y^2$ v obecném bodě $[x^*, y^*]$.

Uvažujme $f : E_2 \to \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi. Diferenciál v pevném bodě $[x_0, y_0]$ je lineární funkce $\mathrm{d}f : E_2 \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

na přírůstcích se souřadnicemi danými právě parciálními derivacemi.

Příklad

Přímo z definice určete $\mathrm{d}f$ a funkci τ pro $f(x, y) = x^2 + y^2$ v obecném bodě $[x^*, y^*]$.

Řešení

Kvůli přehlednosti označme $h := \mathrm{d}x$, $k := \mathrm{d}y$. Pak

$$\begin{aligned} f(x^* + \mathrm{d}x, y^* + \mathrm{d}y) - f(x^*, y^*) = \\ &= (x^* + h)^2 + (y^* + k)^2 - (x^*)^2 - (y^*)^2 = \\ &= 2x^*h + 2y^*h + h^2 + k^2. \end{aligned}$$

Odtud $\mathrm{d}f(x^*, y^*)(h, k) = 2x^* \cdot h + 2y^* \cdot k$ a $\tau(h, k) = h^2 + k^2$.

Obecněji v případě funkcí více proměnných píšeme obdobně

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \qquad (*)$$

a platí:

Věta

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je funkce n proměnných, která má v okolí bodu $x \in E_n$ spojité parciální derivace. Pak existuje její diferenciál $\mathrm{d}f$ v bodě x a jeho souřadné vyjádření je dáno rovnicí $(*)$.

Přibližné výpočty

Podobně jako v případě diferenciálu funkcí jedné proměnné lze i diferenciál funkce více proměnných využít k (velmi) přibližným výpočtům.

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočteme $e^{0{,}05^3 - 0{,}02}$.

Přibližné výpočty

Podobně jako v případě diferenciálu funkcí jedné proměnné lze i diferenciál funkce více proměnných využít k (velmi) přibližným výpočtům.

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočteme $e^{0{,}05^3-0{,}02}$.

Řešení

Využijeme diferenciál funkce $f(x,y) = e^{x^3+y}$ v bodě $x = [0,0]$ s diferencemi $v = (0{,}05; -0{,}02)$. Máme

$$df(x,y) = e^{x^3+y} \cdot 3x^2\, dx + e^{x^3+y}\, dy,$$

a tedy $df(0,0) = 0\, dx + 1\, dy$, což celkem dává odhad $e^{0{,}05^3-0{,}02} = f(0{,}05; -0{,}02) \approx f(0,0) + df(0{,}05; -0{,}02) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$.

Tečná nadrovina ke grafu funkce

Pro $f : E_2 \to \mathbb{R}$ a pevný bod $[x_0, y_0] \in E_2$ uvažme rovinu v E_3:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Je to jediná rovina procházející (x_0, y_0), ve které leží derivace a tedy i tečny všech křivek $c(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. Říkáme jí *tečná rovina* ke grafu funkce f.

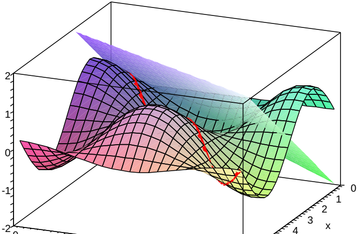
Tečná nadrovina ke grafu funkce

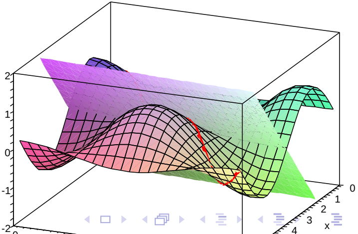
Pro $f : E_2 \to \mathbb{R}$ a pevný bod $[x_0, y_0] \in E_2$ uvažme rovinu v E_3:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Je to jediná rovina procházející (x_0, y_0), ve které leží derivace a tedy i tečny všech křivek $c(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. Říkáme jí *tečná rovina* ke grafu funkce f.

Na obrázku jsou zobrazeny dvě tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$. Červená čára je obrazem křivky $c(t) = (t, t, f(t, t))$.





Obecně pro $f : E_n \to \mathbb{R}$ je *tečnou rovinou* afinní nadrovina v E_{n+1}.

Obecně pro $f : E_n \to \mathbb{R}$ je *tečnou rovinou* afinní nadrovina v E_{n+1}. Tato nadrovina

1. prochází bodem $(x, f(x))$
2. její zaměření je grafem lineárního zobrazení $df(x) : E_n \to \mathbb{R}$, tj. diferenciálu v bodě $x \in E_n$.

Obecně pro $f : E_n \to \mathbb{R}$ je *tečnou rovinou* afinní nadrovina v E_{n+1}. Tato nadrovina

1. prochází bodem $(x, f(x))$
2. její zaměření je grafem lineárního zobrazení $df(x) : E_n \to \mathbb{R}$, tj. diferenciálu v bodě $x \in E_n$.

Analogie s funkcemi jedné proměnné

Diferencovatelná funkce f má na E_n v bodě $x \in E_n$ nulový diferenciál tehdy a jen tehdy, když její složení s libovolnou křivkou procházející tímto bodem zde má stacionární bod.
To ovšem neznamená, že v takovém bodě musí mít f aspoň lokálně buď maximum nebo minimum. Stejně jako u funkcí jedné proměnné můžeme rozhodovat teprve podle derivací vyšších.

Plán přednášky

Pro pevný přírůstek $v \in \mathbb{R}^n$ je vyčíslení diferenciálů na tomto přírůstku opět operace na funkcích $f : E_n \to \mathbb{R}$

$$f \mapsto d_v f = \mathrm{d}f(v).$$

Výsledkem je $\mathrm{d}f(v) : E_n \to \mathbb{R}$. Jestliže je tato funkce opět diferencovatelná, můžeme tento proces opakovat.

Pro pevný přírůstek $v \in \mathbb{R}^n$ je vyčíslení diferenciálů na tomto přírůstku opět operace na funkcích $f : E_n \to \mathbb{R}$

$$f \mapsto d_v f = \mathrm{d}f(v).$$

Výsledkem je $\mathrm{d}f(v) : E_n \to \mathbb{R}$. Jestliže je tato funkce opět diferencovatelná, můžeme tento proces opakovat.
Pro **parciální derivace druhého řádu** píšeme

$$(\frac{\partial}{\partial x_j} \circ \frac{\partial}{\partial x_i})f = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

v případě opakované volby $i = j$ píšeme také

$$(\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \frac{\partial}{\partial x_i})f = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Úplně stejně postupujeme při dalších iteracích a hovoříme o **parciálních derivacích k-tého řádu**

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}.$$

Věta

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je k-krát diferencovatelná funkce se spojitými parciálními derivacemi až do řádu k včetně v okolí bodu $x \in \mathbb{R}^n$. Pak všechny parciální derivace nezávisí na pořadí derivování.

Úplně stejně postupujeme při dalších iteracích a hovoříme o **parciálních derivacích k-tého řádu**

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}.$$

Věta

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je k-krát diferencovatelná funkce se spojitými parciálními derivacemi až do řádu k včetně v okolí bodu $x \in \mathbb{R}^n$. Pak všechny parciální derivace nezávisí na pořadí derivování.

Speciálně tedy pro $n = 2$ platí (při alternativním způsobu zápisu parciálních derivací):

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Taylorův polynom funkce jedné proměnné – opakování

Viděli jsme, že pro aproximaci funkce pomocí *lineárního polynomu* slouží tečna (tedy diferenciál). Lze ale použít i aproximace vyšších řádů. V tomto obecnějším případě potom hovoříme o *Taylorově polynomu*.

Taylorův polynom funkce jedné proměnné – opakování

Viděli jsme, že pro aproximaci funkce pomocí *lineárního polynomu* slouží tečna (tedy diferenciál). Lze ale použít i aproximace vyšších řádů. V tomto obecnějším případě potom hovoříme o *Taylorově polynomu*.

Definice

Nechť $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ je bod, ve kterém existují vlastní derivace $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\dots$, $f^{(n)}(x_0)$ funkce $f(x)$ až do řádu n. *Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ se středem v bodě x_0 je polynom*

$$T(x) = T_n(x) = T_n^f(x) = T_n^f(x; x_0)$$

definovaný jako

$$T(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Taylorova věta

Věta

Nechť $f(x)$ má spojité derivace $f'(x)$, $f''(x)$, $\dots$, $f^{(n)}(x)$ na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a nechť existuje vlastní derivace $f^{(n+1)}(x)$ na otevřeném intervalu (a, b). Potom pro každý bod $x \in (a, b)$ existuje bod $c \in (a, x)$ tak, že platí rovnost

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \qquad \text{kde } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

kde $T_n(x)$ je Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ se středem v bodě a.

Definice

Je-li $f : E_n \to \mathbb{R}$ libovolná dvakrát diferencovatelná funkce v bodě x, nazýváme symetrickou matici

$$Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Hessovou maticí (příp. Hessiánem) funkce f v bodě x. Často bývá Hessián značen $f''(x)$.

Definice

Je-li $f : E_n \to \mathbb{R}$ libovolná dvakrát diferencovatelná funkce v bodě x, nazýváme symetrickou matici

$$Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Hessovou maticí (příp. Hessiánem) funkce f v bodě x. Často bývá Hessián značen $f''(x)$.

Poznámka

Analogicky jako v případě parciálních derivací lze definovat i směrové derivace vyšších řádů v bodě $x \in E_n$. Pak platí (za předpokladu spojitosti jedné ze stran v x)

$$f_{uv}(x) = f_{vu}(x) = u^T Hf(x) v = (Hf(x)u) \cdot v.$$

Pro křivku $c(t) = (x(t), y(t)) = (x_0 + \xi t, y_0 + \eta t)$ mají funkce

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= f(x(t), y(t))\\ \beta(t) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta\\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0, y_0)\xi^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\xi\eta + f_{yy}(x_0, y_0)\eta^2\right)\end{aligned}$$

v bodě (x_0, y_0) stejné derivace do druhého řádu včetně.

Pro křivku $c(t) = (x(t), y(t)) = (x_0 + \xi t, y_0 + \eta t)$ mají funkce

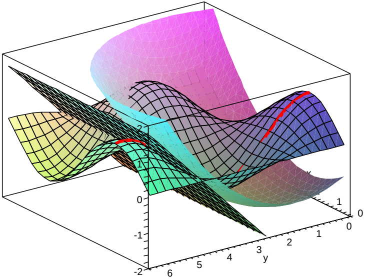
$$\alpha(t) = f(x(t), y(t))$$
$$\beta(t) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0, y_0)\xi^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\xi\eta + f_{yy}(x_0, y_0)\eta^2\right)$$

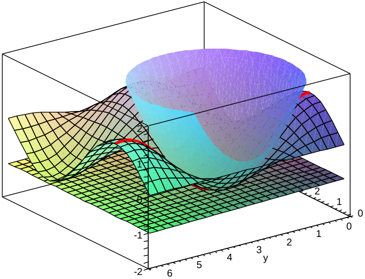
v bodě (x_0, y_0) stejné derivace do druhého řádu včetně.
Funkci β lze psát vektorově takto:

$$\beta(t) = f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\xi, \eta) \cdot Hf(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

nebo $\beta(t) = f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(v) + \frac{1}{2}Hf(x_0, y_0)(v, v)$, kde $v = (\xi, \eta) = c'(t)$ je přírůstek zadaný derivací křivky $c(t)$ a Hessián symetrická 2–forma.

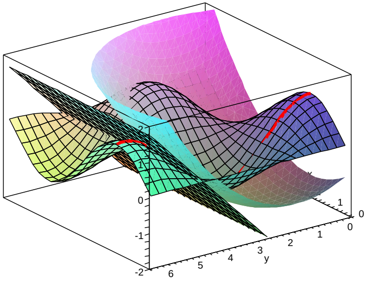
Použití Hessiánu připomíná Taylorovu větu funkcí jedné proměnné!

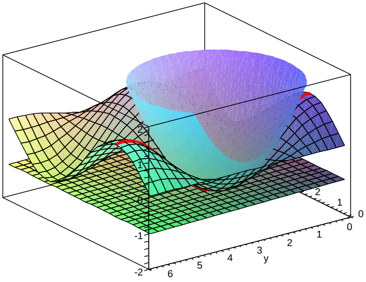




Tečná rovina je vynesena spolu s kvadratickým přiblížením pro funkci $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$.

Použití Hessiánu připomíná Taylorovu větu funkcí jedné proměnné!





Tečná rovina je vynesena spolu s kvadratickým přiblížením pro funkci $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$.
Obecně pro funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$, body $x = [x_1,\dots,x_n] \in E_n$ a přírůstky $v = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ klademe

$$d^k f(x)(v) = \sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}(x_1,\dots,x_n)\cdot \xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k}.$$

Taylorova věta

Taylorova věta pro funkci jedné proměnné aproximovala danou funkci v okolí bodu x_0 *Taylorovým polynomem*, přičemž zároveň udávala chybu, jíž se při tomto odhadu dopouštíme.

Taylorova věta

Taylorova věta pro funkci jedné proměnné aproximovala danou funkci v okolí bodu x_0 *Taylorovým polynomem*, přičemž zároveň udávala chybu, jíž se při tomto odhadu dopouštíme.
U funkcí více proměnných je situace podobná, pouze formálně složitější.

Definice

Taylorovým polynomem funkce f stupně m (se středem) v bodě x^* nazýváme polynom (více proměnných), který má s funkcí f stejnou funkční hodnotu v daném bodě x^* a stejnou hodnotu všech parciálních derivací až do řádu m včetně.

Věta (Taylorova)

Nechť má funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě x^* a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $m+1$. Pak pro $v \in \mathbb{R}^n$ platí:

$$f(x) = f(x^* + v) = T_m(x) + R_m(x),$$

Věta (Taylorova)

Nechť má funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ v bodě x^* a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $m+1$. Pak pro $v \in \mathbb{R}^n$ platí:

$$f(x) = f(x^* + v) = T_m(x) + R_m(x),$$

kde

$$T_m(x) = f(x^*) + \mathrm{d}f(x^*)(v) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(x^*)(v) + \cdots + \frac{1}{m!}\,\mathrm{d}^m f(x^*)(v),$$

resp.

$$R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!}\,\mathrm{d}^{m+1} f(x^* + \theta v)(v), \quad \theta \in (0,1),$$

je Taylorův polynom, resp. zbytek v Taylorově vzorci a $v = x - x^*$ je vektor diferencí.

Přibližme si uvedené pojmy ve dvou proměnných:

Přibližme si uvedené pojmy ve dvou proměnných:

Tečná rovina: $f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$

Přibližme si uvedené pojmy ve dvou proměnných:

Tečná rovina: $f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$

Výraz třetího řádu

$$\mathrm{d}^3 f(x,y)(\xi,\eta) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\xi^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\xi^2\eta + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\xi\eta^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\eta^3$$

Přibližme si uvedené pojmy ve dvou proměnných:
Tečná rovina: $f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$
Výraz třetího řádu

$$\mathrm{d}^3 f(x,y)(\xi,\eta) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\xi^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\xi^2\eta + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\xi\eta^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\eta^3$$

a obecně

$$\mathrm{d}^k f(x,y)(\xi,\eta) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-\ell}\partial y^{\ell}}\xi^{k-\ell}\eta^{\ell}.$$

Poznámka

Uvedené výrazy vám snad připomínají *binomickou větu*. Tak si je lze rovněž „neformálně“ zapamatovat:

$$d^k f(x,y)(\xi,\eta) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\xi + \frac{\partial}{\partial y}\eta\right)^k,$$

přičemž j-té mocniny nahrazujeme j-tými parciálními derivacemi.

Aproximace

Taylorova věta nám (stejně jako v jednorozměrném případě) dává lepší možnosti aproximace funkcí v okolí bodu než pouhý diferenciál.
Přesnost výpočtu samozřejmě přímo ovlivní i volba funkce, jejíž hodnoty budeme aproximovat.

Aproximace

Taylorova věta nám (stejně jako v jednorozměrném případě) dává lepší možnosti aproximace funkcí v okolí bodu než pouhý diferenciál.
Přesnost výpočtu samozřejmě přímo ovlivní i volba funkce, jejíž hodnoty budeme aproximovat.

Příklad

Pomocí Taylorovy věty přibližně vypočteme $e^{0,05^3-0,02}$.

Řešení

Přibližnou hodnotu vypočteme pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce $f(x, y) = e^{x^3+y}$ v bodě $[0, 0]$ s diferencemi $v = (\xi, \eta) = (0{,}05; -0{,}02)$.

Řešení

Přibližnou hodnotu vypočteme pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^3+y}$ v bodě $[0,0]$ s diferencemi $v = (\xi, \eta) = (0{,}05; -0{,}02)$.

Parciální derivace jsou:

$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{x^3+y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathrm{e}^{x^3+y} \cdot (3x^2 \cdot 3x^2 + 6x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \mathrm{e}^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{x^3+y}$.

Řešení

Přibližnou hodnotu vypočteme pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^3+y}$ v bodě $[0,0]$ s diferencemi $v = (\xi, \eta) = (0{,}05; -0{,}02)$.

Parciální derivace jsou:
$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{x^3+y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathrm{e}^{x^3+y} \cdot (3x^2 \cdot 3x^2 + 6x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \mathrm{e}^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{x^3+y}$.

Pak

$$T_2(0+\xi, 0+\eta) =$$

$$= f(0,0) + \mathrm{d}f(0,0)\cdot(\xi,\eta) + (\xi,\eta)\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(0,0)\cdot\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} =$$

$$= 1 + \eta + \frac{1}{2}\eta^2.$$

Řešení

Přibližnou hodnotu vypočteme pomocí Taylorova polynomu 2. stupně funkce $f(x,y) = e^{x^3+y}$ v bodě $[0,0]$ s diferencemi $v = (\xi, \eta) = (0{,}05; -0{,}02)$.
Parciální derivace jsou:
$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^3+y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x^3+y} \cdot (3x^2 \cdot 3x^2 + 6x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = e^{x^3+y} \cdot 3x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x^3+y}$.
Pak

$$T_2(0+\xi, 0+\eta) =$$

$$= f(0,0) + \mathrm{d}f(0,0) \cdot (\xi,\eta) + (\xi,\eta) \cdot \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(0,0) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + \eta + \tfrac{1}{2}\eta^2.$$

Odtud dostáváme odhad

$$e^{0{,}05^3 - 0{,}02} \approx 1 - 0{,}02 + \tfrac{1}{2} 0{,}02^2 = 0{,}9802.$$

Plán přednášky

Definice

Vnitřní bod $x^* \in E_n$ definičního oboru funkce f je (lokálním) **maximem** (resp. **minimem**), jestliže existuje jeho okolí U takové, že pro všechny body $x \in U$ platí $f(x) \leq f(x^*)$ (resp. $f(x) \geq f(x^*)$). Pokud nastává v předchozích nerovnostech ostrá nerovnost pro všechny $x \neq x^*$, hovoříme o **ostrém lokálním extrému**.

Definice

Vnitřní bod $x^* \in E_n$ definičního oboru funkce f je (lokálním) **maximem** (resp. **minimem**), jestliže existuje jeho okolí U takové, že pro všechny body $x \in U$ platí $f(x) \leq f(x^*)$ (resp. $f(x) \geq f(x^*)$). Pokud nastává v předchozích nerovnostech ostrá nerovnost pro všechny $x \neq x^*$, hovoříme o **ostrém lokálním extrému**.

Vnitřní bod $x^* \in E_n$ definičního oboru funkce f, ve kterém je diferenciál $df(x)$ nulový, nazýváme **stacionární bod funkce** f.

Definice

Vnitřní bod $x^* \in E_n$ definičního oboru funkce f je (lokálním) **maximem** (resp. **minimem**), jestliže existuje jeho okolí U takové, že pro všechny body $x \in U$ platí $f(x) \leq f(x^*)$ (resp. $f(x) \geq f(x^*)$). Pokud nastává v předchozích nerovnostech ostrá nerovnost pro všechny $x \neq x^*$, hovoříme o **ostrém lokálním extrému**.
Vnitřní bod $x^* \in E_n$ definičního oboru funkce f, ve kterém je diferenciál $df(x)$ nulový, nazýváme **stacionární bod funkce** f.

Nutnou podmínkou pro existenci maxima nebo minima v bodě x^* (v případě diferencovatelnosti funkce f v x^*) **je vymizení diferenciálu v tomto bodě, tj.** $df(x^*) = 0$. Skutečně, pokud je $df(x^*) \neq 0$, pak existuje směr v, ve kterém je $d_v f(x^*) \neq 0$. Pak ovšem nutně je podél přímky $x^* + tv$ na jednu stranu od bodu x^* hodnota funkce roste a na druhou klesá.

Příklad

Funkce $f : E_2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 1 & \text{pro } [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

má v počátku ostré lokální maximum (přitom zde není spojitá, a tedy ani diferencovatelná).

Příklad

Funkce $f : E_2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 1 & \text{pro } [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

má v počátku ostré lokální maximum (přitom zde není spojitá, a tedy ani diferencovatelná).

Příklad

Funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ je v počátku spojitá a má zde ostré lokální minimum, přestože v tomto bodě není diferencovatelná (grafem funkce je kuželová plocha – viz první přednáška).

Stacionární body

Pro to, aby nabývala v daném bodě diferencovatelná funkce svého lokálního extrému (maxima nebo minima), je nutnou podmínkou, aby byl daný bod *stacionární*.

Stacionární body

Pro to, aby nabývala v daném bodě diferencovatelná funkce svého lokálního extrému (maxima nebo minima), je nutnou podmínkou, aby byl daný bod *stacionární*.
Přitom ale (podobně jako u funkcí jedné proměnné) stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému.
Např. funkce $f(x, y) = (x - x_0)(y - y_0)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ stacionární bod ($\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (y - y_0)dx + (x - x_0)dy$), nemá zde však zřejmě lokální extrém (jde o tzv. "sedlo").

Stacionární body

Pro to, aby nabývala v daném bodě diferencovatelná funkce svého lokálního extrému (maxima nebo minima), je nutnou podmínkou, aby byl daný bod *stacionární*.
Přitom ale (podobně jako u funkcí jedné proměnné) stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému.
Např. funkce $f(x,y) = (x - x_0)(y - y_0)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ stacionární bod ($df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (y - y_0)dx + (x - x_0)dy$), nemá zde však zřejmě lokální extrém (jde o tzv. "sedlo").
Poznat, jakého typu je daný stacionární bod, nám stejně jako v případě funkcí jedné proměnné umožní (díky Taylorově větě) derivace vyšších řádů.

Situace v jedné proměnné

Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod x_0 (tj. $f'(x_0) = 0$). Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce v x_0 ostré lokální maximum (analogicky neostré, resp. minimum).

Situace v jedné proměnné

Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod x_0 (tj. $f'(x_0) = 0$). Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce v x_0 ostré lokální maximum (analogicky neostré, resp. minimum).
Toto tvrzení vyplynulo z Taylorovy věty (stačí uvážit Taylorův polynom 1. stupně a příslušný zbytek)

$$\begin{aligned} f(x) = T_1(x) + R_1(x) = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2 = \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2, \end{aligned}$$

kde ξ leží mezi x a x_0.

Situace v jedné proměnné

Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod x_0 (tj. $f'(x_0) = 0$). Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce v x_0 ostré lokální maximum (analogicky neostré, resp. minimum).
Toto tvrzení vyplynulo z Taylorovy věty (stačí uvážit Taylorův polynom 1. stupně a příslušný zbytek)

$$\begin{aligned} f(x) &= T_1(x) + R_1(x) = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2 = \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2, \end{aligned}$$

kde ξ leží mezi x a x_0. Ze spojitosti f'' a vlastnosti $f''(x_0) < 0$ pak pro ξ dostatečně blízko x_0 dostáváme $f''(\xi) < 0$ a tedy $R_1(x) < 0$ dostatečně blízko x_0 . Proto zde $f(x) < f(x_0)$ a x_0 je lokálním maximem.

Situace ve více proměnných

Mějme funkci $f : E_n \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod x^* (tj. $f'(x^*) = \mathbf{0}$ – nulový vektor parciálních derivací).

Situace ve více proměnných

Mějme funkci $f : E_n \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod x^* (tj. $f'(x^*) = \mathbf{0}$ – nulový vektor parciálních derivací).
Z Taylorovy věty pak dostáváme (opět stačí uvážit Taylorův polynom 1. stupně a příslušný zbytek)

$$\begin{aligned} f(x) &= T_1(x) + R_1(x) = \\ &= f(x^*) + \mathrm{d}f(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(\xi)(x - x^*) = \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(\xi)(x - x^*), \end{aligned}$$

kde $\xi = x^* + \theta v$ (pro $\theta \in (0, 1)$) leží „mezi“ x a x^*.

Situace ve více proměnných

Mějme funkci $f : E_n \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod x^* (tj. $f'(x^*) = \mathbf{0}$ – nulový vektor parciálních derivací).
Z Taylorovy věty pak dostáváme (opět stačí uvážit Taylorův polynom 1. stupně a příslušný zbytek)

$$\begin{aligned} f(x) = T_1(x) + R_1(x) = \\ &= f(x^*) + \mathrm{d}f(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(\xi)(x - x^*) = \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(\xi)(x - x^*), \end{aligned}$$

kde $\xi = x^* + \theta v$ (pro $\theta \in (0,1)$) leží „mezi“ x a x^*.
Zbývá do více proměnných přeložit podmínku, která říká, že výraz

$$\mathrm{d}^2 f(\xi)(x - x^*) = (x - x^*)^T Hf(\xi)(x - x^*)$$

je nekladný (resp. nezáporný) pro libovolné x.

Pozitivně (negativně) definitní kvadratické formy

Definice

Kvadratická forma $h : E_n \to \mathbb{R}$ je

- **pozitivně definitní**, je-li $h(u) > 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **pozitivně semidefinitní**, je-li $h(u) \geq 0$ pro všechny $u \in V$
- **negativně definitní**, je-li $h(u) < 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **negativně semidefinitní**, je-li $h(u) \leq 0$ pro všechny $u \in V$
- **indefinitní**, je-li $h(u) > 0$ a $h(v) < 0$ pro vhodné $u, v \in V$.

Pozitivně (negativně) definitní kvadratické formy

Definice

Kvadratická forma $h : E_n \to \mathbb{R}$ je

- **pozitivně definitní**, je-li $h(u) > 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **pozitivně semidefinitní**, je-li $h(u) \geq 0$ pro všechny $u \in V$
- **negativně definitní**, je-li $h(u) < 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **negativně semidefinitní**, je-li $h(u) \leq 0$ pro všechny $u \in V$
- **indefinitní**, je-li $h(u) > 0$ a $h(v) < 0$ pro vhodné $u, v \in V$.

Často rovněž hovoříme o definitnosti matice A kvadratické formy h (jsou spolu ve vztahu $h(u) = u^T A u = Au \cdot u$).

Pozitivně (negativně) definitní kvadratické formy

Definice

Kvadratická forma $h : E_n \to \mathbb{R}$ je

- **pozitivně definitní**, je-li $h(u) > 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **pozitivně semidefinitní**, je-li $h(u) \geq 0$ pro všechny $u \in V$
- **negativně definitní**, je-li $h(u) < 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **negativně semidefinitní**, je-li $h(u) \leq 0$ pro všechny $u \in V$
- **indefinitní**, je-li $h(u) > 0$ a $h(v) < 0$ pro vhodné $u, v \in V$.

Často rovněž hovoříme o definitnosti matice A kvadratické formy h (jsou spolu ve vztahu $h(u) = u^T Au = Au \cdot u$).

S těmito pojmy jste se setkali již v části věnované lineárním modelům a měli byste tedy umět rozeznat definitnost kvadratické formy (resp. její matice v dané bázi).

Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice A je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice A je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice A (tj. kořeny λ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,

Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice A je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice A (tj. kořeny λ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,
- všechny hlavní minory A jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)

Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice A je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice A (tj. kořeny λ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,
- všechny hlavní minory A jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)

Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice A je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice A (tj. kořeny λ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,
- všechny hlavní minory A jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)

Daná symetrická matice A je *negativně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice A je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice A (tj. kořeny λ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,
- všechny hlavní minory A jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)

Daná symetrická matice A je *negativně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice A jsou záporné,

Kritéria pozitivní definitnosti matic

Daná symetrická matice A je *pozitivně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice A (tj. kořeny λ jejího charakteristického polynomu $|A - \lambda I_n|$) jsou kladné,
- všechny hlavní minory A jsou kladné (Sylvesterovo kritérium)

Daná symetrická matice A je *negativně definitní*, právě tehdy když platí některá z těchto ekvivalentních podmínek:

- všechny vlastní hodnoty matice A jsou záporné,
- hlavní minory A střídají znaménko, počínaje záporným.

Věta

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ *je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce a* $x^* \in E_n$ *nechť je stacionární bod funkce* f*. Potom*

1. *je-li* $Hf(x^*)$ *pozitivně (negativně) definitní, má* f *v* x^* *ostré lokální minimum (maximum),*
2. *je-li* $Hf(x^*)$ *indefinitní, nemá* f *v bodě* x^* *lokální extrém.*
3. *má-li* f *v* x^* *lokální minimum (maximum), je* $Hf(x^*)$ *pozitivně (negativně) semidefinitní,*

Věta

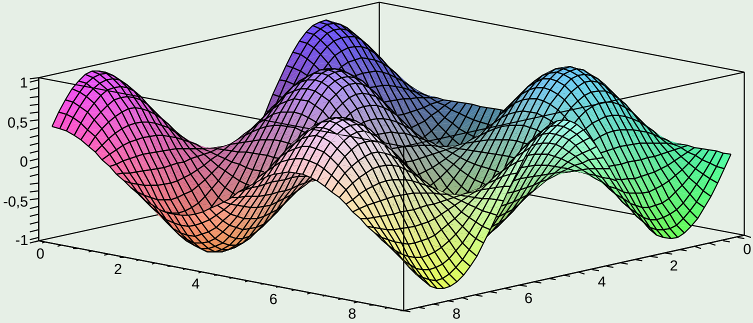
Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce a $x^* \in E_n$ nechť je stacionární bod funkce f. Potom

1. *je-li $Hf(x^*)$ pozitivně (negativně) definitní, má f v x^* ostré lokální minimum (maximum),*
2. *je-li $Hf(x^*)$ indefinitní, nemá f v bodě x^* lokální extrém.*
3. *má-li f v x^* lokální minimum (maximum), je $Hf(x^*)$ pozitivně (negativně) semidefinitní,*

Všimněme si, že věta nedává žádný výsledek, pokud je hessián funkce ve zkoumaném bodě degenerovaný (nulový). Důvod je opět stejný jako u funkcí jedné proměnné. V takových případech totiž existují směry, ve kterých první i druhá derivace zmizí a my proto v tomto řádu přiblížení neumíme poznat, zda se funkce bude chovat jako t^3 nebo jako $\pm t^4$ dokud nespočteme alespoň v potřebných směrech derivace vyšší.

Příklad

Uvažme funkci $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$, která připomíná známá kartonová plata na vajíčka a spočtěme její lokální extrémy.



Příklad (pokr.)

Spočtěme si nejprve první parciální derivace:

$$f_x(x,y) = \cos(x)\cos(y), \;\; f_y(x,y) = -\sin(x)\sin(y),$$

takže obě derivace budou nulové pro dvě sady bodů

1. $\cos(x) = 0$, $\sin(y) = 0$, to je $[x,y] = [\frac{2k+1}{2}\pi, \ell\pi]$, pro libovolné $k, \ell \in \mathbb{Z}$
2. $\cos(y) = 0$, $\sin(x) = 0$, to je $[x,y] = [k\pi, \frac{2\ell+1}{2}\pi]$, pro libovolné $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Příklad (pokr.)

Spočtěme si nejprve první parciální derivace:

$$f_x(x, y) = \cos(x)\cos(y), \ \ f_y(x, y) = -\sin(x)\sin(y),$$

takže obě derivace budou nulové pro dvě sady bodů

1. $\cos(x) = 0$, $\sin(y) = 0$, to je $[x, y] = [\frac{2k+1}{2}\pi, \ell\pi]$, pro libovolné $k, \ell \in \mathbb{Z}$
2. $\cos(y) = 0$, $\sin(x) = 0$, to je $[x, y] = [k\pi, \frac{2\ell+1}{2}\pi]$, pro libovolné $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Druhé parciální derivace jsou

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y) \\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

Příklad (pokr.)

V našich dvou sadách bodů tedy dostáváme následující hessiány:

1. $Hf(k\pi + \frac{\pi}{2}, \ell\pi) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když k a ℓ jsou *různé* parity a naopak pro $-$,
2. $Hf(k\pi, \ell\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když k a ℓ jsou různé parity a naopak pro $-$.

Příklad (pokr.)

V našich dvou sadách bodů tedy dostáváme následující hessiány:

1. $Hf(k\pi + \frac{\pi}{2}, \ell\pi) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když k a ℓ jsou *různé* parity a naopak pro $-$,
2. $Hf(k\pi, \ell\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když k a ℓ jsou různé parity a naopak pro $-$.

Protože naše funkce má spojitý hessián, který je nedegenerovaný, nastane lokální maximum tehdy a jen tehdy, když náš bod (x^*, y^*) patří do první skupiny se stejnými paritami k a ℓ. Když budou parity opačné, pak bod z první skupiny bude naopak bodem lokálního minima.

Příklad (pokr.)

V našich dvou sadách bodů tedy dostáváme následující hessiány:

1. $Hf(k\pi + \frac{\pi}{2}, \ell\pi) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když k a ℓ jsou *různé* parity a naopak pro $-$,
2. $Hf(k\pi, \ell\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když k a ℓ jsou různé parity a naopak pro $-$.

Protože naše funkce má spojitý hessián, který je nedegenerovaný, nastane lokální maximum tehdy a jen tehdy, když náš bod (x^*, y^*) patří do první skupiny se stejnými paritami k a ℓ. Když budou parity opačné, pak bod z první skupiny bude naopak bodem lokálního minima. Naopak, hessián u druhé skupiny bodů se vyčíslí kladně na některých přírůstcích a záporně na jiných. Stejně se proto bude chovat i celá funkce f v okolí těchto stacionárních bodů.

Příklad (Poznámky)

- matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ je indefinitní, přestože má oba hlavní minory nekladné (pro semidefinitnost je znaménko minorů pouze nutnou podmínkou!)

Příklad (Poznámky)

- matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ je indefinitní, přestože má oba hlavní minory nekladné (pro semidefinitnost je znaménko minorů pouze nutnou podmínkou!)
- nalezené lokální extrémy šlo jistě najít snadněji úvahou o nabývání hodnot ± 1 funkcí $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$, neměli bychom ale jistotu, že jde o **všechny** extrémy.

Absolutní extrémy

Definice

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ a M je podmnožinou definičního oboru f.
V bodě x^* nabývá f absolutního (globálního) maxima (minima) na M, pokud je $f(x^*) \geq f(x)$ $(f(x^*) \leq f(x))$ pro všechna $x \in M$.

Absolutní extrémy

Definice

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ a M je podmnožinou definičního oboru f.
V bodě x^* nabývá f absolutního (globálního) maxima (minima) na M, pokud je $f(x^*) \geq f(x)$ $(f(x^*) \leq f(x))$ pro všechna $x \in M$.

Existence extrémů na kompaktní (uzavřené a ohraničené) množině vyplývá z Weierstrassovy věty.

Věta

Nechť $M \subseteq E_n$ je kompaktní množina, $f : M \to \mathbb{R}$ spojitá. Pak f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálních extrémů uvnitř M nebo v některém hraničním bodě.

Absolutní extrémy

Definice

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ a M je podmnožinou definičního oboru f. V bodě x^* nabývá f absolutního (globálního) maxima (minima) na M, pokud je $f(x^*) \geq f(x)$ $(f(x^*) \leq f(x))$ pro všechna $x \in M$.

Existence extrémů na kompaktní (uzavřené a ohraničené) množině vyplývá z Weierstrassovy věty.

Věta

Nechť $M \subseteq E_n$ je kompaktní množina, $f : M \to \mathbb{R}$ spojitá. Pak f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálních extrémů uvnitř M nebo v některém hraničním bodě.

Hledání absolutních extrémů funkce na množině tak máme převedeno na nalezení lokálních extrémů (což umíme) a vyšetření hraničních bodů. To je ale často komplikovanější záležitost, které se budeme více věnovat později v části o *vázaných extrémech*.

Příklad

Nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ na množině M, která je dána trojúhelníkem, tvořeným souřadnými osami a přímkou $x + y - 4 = 0$.

Příklad

Nalezněte extrémy funkce $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ na množině M, která je dána trojúhelníkem, tvořeným souřadnými osami a přímkou $x + y - 4 = 0$.

Řešení

Jediným stacionárním bodem je $[1, 1]$, kde nastává absolutní maximum $f(1, 1) = 1$. Absolutní minimum -12 nastává v hraničních bodech $[4, 0]$ a $[0, 4]$.