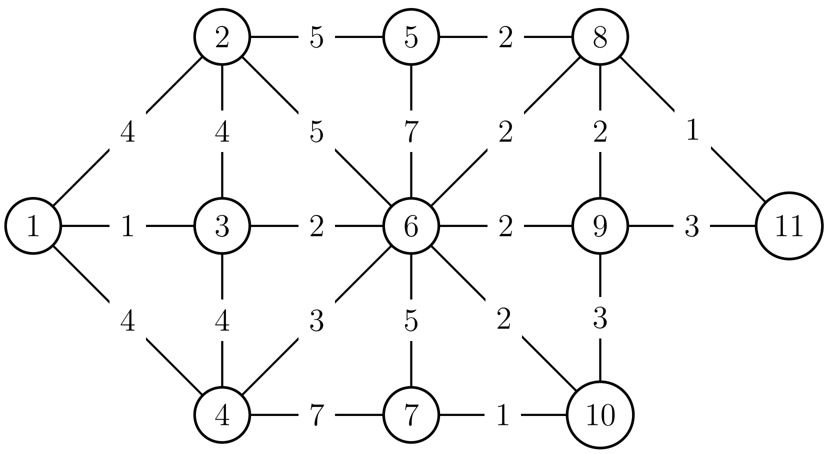
Jméno: **Skupina: A** **Místnost:** **1. zkouška**

příklad *učo* *body*

0123456789

Příklad 1

Grafy (5 bodů): Problém čínského pošťáka v hranově ohodnoceném neorientovaném grafu je problémem nalezení nejkratšího uzavřeného sledu, který obsahuje každou hranu v grafu. Nalezněte řešení tohoto problému pro graf na obrázku. Postup (včetně výsledku) vhodným způsobem zapište.



Jméno: **Skupina: A** **Místnost:** **1. zkouška**

0001 ***příklad*** 2 ***učo*** ***body***

0123456789

Příklad 2

Aplikace integrálů (6 bodů): Určete hmotnost a souřadnice těžiště tělesa, které je tvořeno částí mezikruží $1 < x^2 + y^2 < 16$, ležící v polorovině určené nerovností $x \leq 0$, je-li hustota v bodě $[x, y]$ rovna $\frac{y^2}{x^2+y^2}$.

Jméno: **Skupina: A** **Místnost:** **1. zkouška**

příklad *učo* *body*

0123456789

Funkce více proměnných (6 bodů): Drát délky ℓ je rozdělen na 3 části. **Příklad 3**
Z jedné části je vytvořen kruh, z druhé čtverec a ze třetí rovnostranný trojúhelník (vždy stočením vytvoříme obvod příslušného útvaru). Určete délky jednotlivých částí tak, aby celková plocha omezená těmito útvary byla **maximální** (tj. sestavte funkci pro obsah vymezených ploch a najděte její lokální i absolutní extrémy). Výsledek interpretujte.

Jméno: **Skupina: A** **Místnost:** **1. zkouška**

0001 *příklad* 4 *učo* *body*

0123456789

Grafy (3 body):

Příklad 4

(a) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) ohodnoceného grafu na třech vrcholech, na němž dá Dijkstrův algoritmus chybný výsledek.

(b) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) nerovinného grafu, který neobsahuje kružnici.

(c) Dokažte, že existuje graf s 12 vrcholy a 28 hranami takový, že stupeň každého vrcholu bude 3 nebo 5.

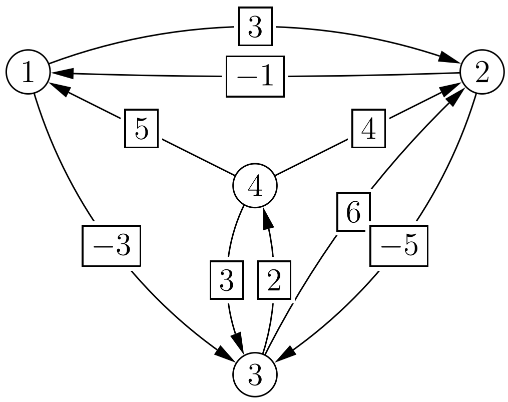
Jméno: **Skupina: B** **Místnost:** **1. zkouška**

0002 ***příklad*** 1 ***učo*** ***body***

0123456789

Grafy (5 bodů): Uveďte Floyd-Warshallův algoritmus pro nalezení nejkratších cest mezi všemi dvojicemi vrcholů a zformulujte vztah, na němž je myšlenka algoritmu založena. Tento algoritmus použijte na orientovaný graf na obrázku. Jednotlivé mezivýpočty zapisujte do matic. Udržujte zároveň všechny potřebné údaje ke konstrukci nejkratších cest a určete pomocí nich nejkratší cestu z 2 do 4.

Příklad 1



Jméno: **Skupina: B** **Místnost:** **1. zkouška**

0002 ***příklad*** 2 ***učo*** ***body***

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 2

Aplikace integrálů (6 bodů): Určete hmotnost a souřadnice těžiště tělesa, které je tvořeno částí mezikruží $4 < x^2 + y^2 < 36$, ležící v polorovině určené nerovností $x \leq 0$, je-li hustota v bodě $[x, y]$ rovna $\frac{y^2}{x^2+y^2}$.

Jméno: **Skupina: B** **Místnost:** **1. zkouška**

0002 *příklad* 3 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Funkce více proměnných (6 bodů): Uvažte funkci $z = z(x, y)$ zadanou v okolí bodu $[1, 1, -1]$ implicitně předpisem

Příklad 3

$$z^3 - 2xyz - x^2y = 0.$$

(a) Zapište diferenciál $\mathrm{d}z$ (jako funkci $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$) v bodě $[1, 1]$.

(b) Zapište rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v bodě $[1, 1]$.

(c) Pomocí lineární aproximace odhadněte hodnotu $f(0{,}9; 1{,}2)$.

(d) Určete směrovou derivaci z v bodě $[1, 1]$ ve směru vektoru $(-1, 2)$.

(e) Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce $z(x, y)$ se středem v $[1, 1]$.

(f) Uveďte podmínku (ve tvaru polynomiální rovnice v proměnných x, y, z) pro to, aby v obecném bodě $[x, y, z]$ byla zadaným předpisem určená funkce $z(x, y)$.

Jméno: **Skupina: B** **Místnost:** **1. zkouška**

0002 *příklad* 4 *učo* *body*

0123456789

Grafy (3 body):

Příklad 4

(a) Uveďte příklad grafu na alespoň 4 vrcholech, pro který nedá Borůvkův algoritmus správný výsledek.

(b) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte neexistenci) souvislého nerovinného grafu, který není hamiltonovský.

(c) Dokažte, že z Oreho věty plyne věta Diracova.

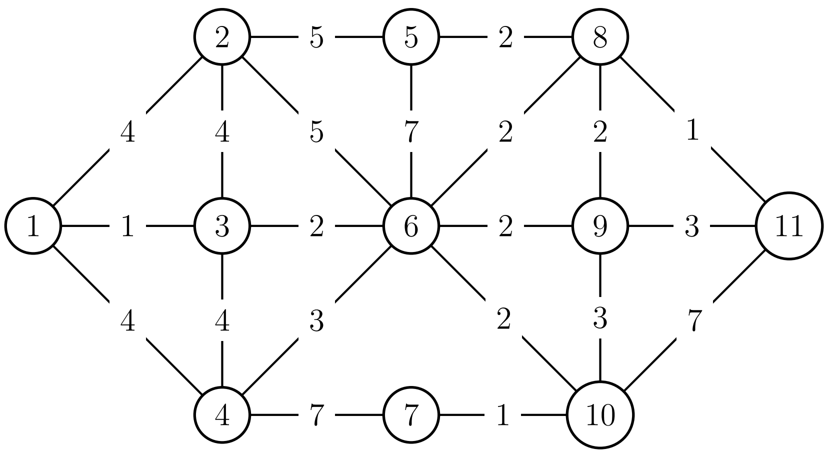
Jméno: **Skupina: C** **Místnost:** **1. zkouška**

0003 ***příklad*** 1 ***učo*** ***body***

0123456789

Příklad 1

Grafy (5 bodů): Problém čínského pošťáka v hranově ohodnoceném neorientovaném grafu je problémem nalezení nejkratšího uzavřeného sledu, který obsahuje každou hranu v grafu. Nalezněte řešení tohoto problému pro graf na obrázku. Postup (včetně výsledku) vhodným způsobem zapište.



Jméno: **Skupina: C** **Místnost:** **1. zkouška**

0003 *příklad* 2 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 2

Aplikace integrálů (6 bodů): Určete hmotnost a souřadnice těžiště tělesa, které je tvořeno částí mezikruží $9 < x^2 + y^2 < 16$, ležící v horní polorovině ($y \geq 0$), je-li hustota v bodě $[x, y]$ rovna $\frac{x^2}{x^2+y^2}$.

Jméno: **Skupina: C** **Místnost:** **1. zkouška**

příklad *učo* *body*

0123456789

Příklad 3

Funkce více proměnných (6 bodů): Drát délky ℓ je rozdělen na 3 části. Z jedné části je vytvořen kruh, z druhé čtverec a ze třetí rovnostranný trojúhelník (vždy stočením vytvoříme obvod příslušného útvaru). Určete délky jednotlivých částí tak, aby celková plocha omezená těmito útvary byla **minimální** (tj. sestavte funkci pro obsah vymezených ploch a najděte její lokální i absolutní extrémy). Výsledek interpretujte.

Jméno: **Skupina: C** **Místnost:** **1. zkouška**

0003 *příklad* 4 *učo* *body*

0123456789

Grafy (3 body):

Příklad 4

(a) Rozhodněte (a zdůvodněte), zda existuje strom s kódem 00011001111001.

(b) Uveďte příklad grafu se šesti vrcholy, který je vrcholově i hranově právě 2-souvislý.

(c) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) hamiltonovského grafu, jehož uzávěrem (ve smyslu Bondy-Chvátalovy věty) není úplný graf.

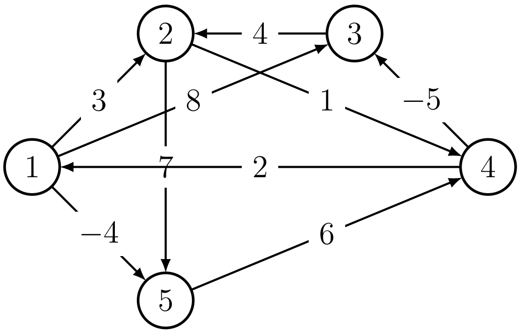
Jméno: **Skupina: D** **Místnost:** **1. zkouška**

0004 ***příklad*** 1 ***učo*** ***body***

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1

Grafy (5 bodů): Uveďte Floyd-Warshallův algoritmus pro nalezení nejkratších cest mezi všemi dvojicemi vrcholů a zformulujte vztah, na němž je myšlenka algoritmu založena. Tento algoritmus použijte na orientovaný graf na obrázku. Jednotlivé mezivýpočty zapisujte do matic. Udržujte zároveň všechny potřebné údaje ke konstrukci nejkratších cest a určete pomocí nich nejkratší cestu z 3 do 1.



Jméno: **Skupina: D** **Místnost:** **1. zkouška**

0004 *příklad* 2 *učo* *body*

0123456789

Příklad 2

Aplikace integrálů (6 bodů): Určete hmotnost a souřadnice těžiště tělesa, které je tvořeno částí mezikruží $1 < x^2 + y^2 < 25$, ležící v horní polorovině ($y \geq 0$), je-li hustota v bodě $[x, y]$ rovna $\frac{x^2}{x^2+y^2}$.

Jméno: **Skupina: D** **Místnost:** **1. zkouška**

0004 *příklad* 3 *učo* *body*

0123456789

Příklad 3

Funkce více proměnných (6 bodů): Uvažte funkci $z = z(x, y)$ zadanou v okolí bodu $[1, 0, 1]$ implicitně předpisem

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - x - 2y - z = 0.$$

(a) Zapište diferenciál $\mathrm{d}z$ (jako funkci $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$) v bodě $[1, 0]$.

(b) Zapište rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v bodě $[1, 0]$.

(c) Pomocí lineární aproximace odhadněte hodnotu $f(0{,}9; -0{,}04)$.

(d) Určete směrovou derivaci z v bodě $[1, 0]$ ve směru vektoru $(-2, 1)$.

(e) Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce $z(x, y)$ se středem v $[1, 0]$.

(f) Uveďte podmínku (ve tvaru polynomiální rovnice v proměnných x, y, z) pro to, aby v obecném bodě $[x, y, z]$ byla zadaným předpisem určená funkce $z(x, y)$.

Jméno: **Skupina: D** **Místnost:** **1. zkouška**

příklad *učo* *body*

Grafy (3 body):

Příklad 4

(a) Udejte příklad souvislého grafu se šesti vrcholy, který není eulerovský ani hamiltonovský.

(b) Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, že neexistuje) hranově ohodnoceného grafu, který není stromem a má jednoznačně určenou minimální kostru, přestože ohodnocení není prostá funkce.

(c) Dokažte, že K_5 není rovinný (bez použití Kuratowského věty).