podzim 2012

MB103-zk2-skA

(1) plocha $2x^2+5y^2+z=1$

a) $f(x,y) = x\cdot y\cdot(1-2x^2-5y^2)$

b) $f(x,y) \to$ glob. max. na $M = \{[x,y] \in \langle 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle \times \langle 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\rangle ; 2x^2+5y^2 \le 1\}$
$= \{[x,y] \in \langle 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle \times \langle 0, \sqrt{\frac{1-2x^2}{5}}\rangle\}$

$f'_x = y(1-2x^2-5y^2) + xy(\cancel{1}-4x)$

$f'_y = x(1-2x^2-5y^2) + xy(-10y)$

Najdeme stac. body uvnitř oblasti (tj. pro $x,y>0$):

$f'_x = 0 \iff y(1-2x^2-5y^2) = +4x^2y \overset{y\neq 0}{\iff} 6x^2+5y^2=1$

$f'_y = 0 \iff x(1-2x^2-5y^2) = 10xy^2 \overset{x\neq 0}{\iff} 2x^2+15y^2=1$

Řešením soustavy je $x^2 = \frac{1}{8}$, $y^2 = \frac{1}{20}$, tedy pro $x,y>0$ je řešením $[x,y] = \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right]$.

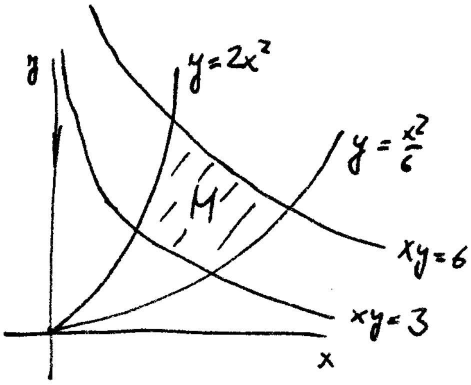
Na hranici platí $x=0$ nebo $y=0$ nebo $2x^2+5y^2=1$, tj. $z=0$, proto je na hranici $f(x,y)=0$ (a nastává zde globální minimum).

Ve stacionárním bodě je $f(x,y) = \frac{1}{8\sqrt{10}}$ a nastává zde globální maximum (nemůže být vzhledem k diferencovatelnosti $f(x,y)$ jinde než ve stac. bodě nebo na hranici).

(2) a) Transformace $F: u = \frac{x^2}{y}$, $v = x\cdot y$ má Jacobián $D^1F = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ y & x \end{vmatrix} = \frac{3x^2}{y}$. Jeho inverze $(D^1F)^{-1} = \frac{y}{3x^2} = \frac{1}{3u}$.

Proto $dx\,dy = \frac{1}{3u}\,du\,dv$.



b) $M = \{[u,v];\ u \in \langle \frac{1}{2}, 6\rangle, v \in \langle 3,6\rangle\}$

$\iint_M dx\,dy = \int_3^6 \int_{\frac{1}{2}}^6 \frac{1}{3u}\,du\,dv = \int_{\frac{1}{2}}^6 \frac{1}{3u}\left(\int_3^6 dv\right) du =$

$= \int_{1/2}^6 \frac{du}{u} = [\ln u]_{1/2}^6 = \ln 6 + \ln 2 = \ln 3 + 2\ln 2$

c) viz zadání 6)

podzim 2012
MB103-782-88A

(3) Postupně relaxujeme hrany (v požadovaném pořadí), u každého vrcholu udržujeme informaci o jeho předchůdci ve stromu nejkratších cest (= počáteční vrchol z poslední relaxace s koncovým vrcholem v „našem" vrcholu).

I. relaxované hrany, nová hodnota cílového vrcholu:

SF, 12 ; SH, 2

II. FC, 28 ; FG, 14 ; GE, −4 ; HF, 6 ; HG, 10

III. EB, −2 ; ED, 0 ; FC, 22 ; FG, 8 ; GE, −10

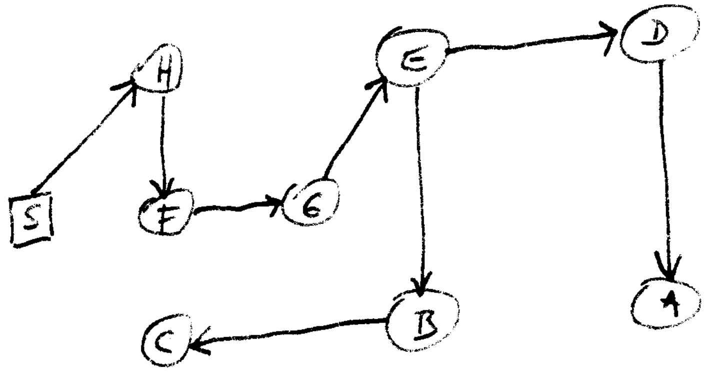
IV. BA, 12 ; BC, 4 ; DA, 2 ; EB, −8 ; ED, −6

V. BC, −2 ; DA, −4

VI.

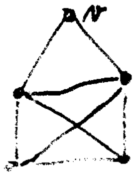
VII. beze změny, končíme.

záporný cyklus není (našel by se, pokud by došlo ke změně hodnot při n-tém průchodu, n = |V|, zde n = 9)



(4) a) $n \geq 3$ Dirac : $\forall v \in V: \deg(v) \geq \frac{n}{2}$

Ore : $\forall v, w \in V: v \neq w \wedge \{v, w\} \notin E \Rightarrow \deg(v) + \deg(w) \geq n$

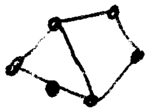
např.  $\deg(v) < \frac{5}{2}$, ale předp. Oreho věty je splněn

b) $G = (V, E)$, $|V| \geq 11$; G rovinný $\Rightarrow |E| \leq 3 \cdot |V| - 6$

G' doplněk G, G' rovinný $\Rightarrow |E'| \leq 3|V| - 6$, celkem $|E| + |E'| \leq 6|V| - 12$

$G' = (V, E')$ $\qquad \frac{|V| \cdot (|V|-1)}{2} \leq 6|V| - 12$,

ale to platí $\Rightarrow |V| \in \left\langle \frac{13-\sqrt{73}}{2}, \frac{13+\sqrt{73}}{2} \right\rangle$, což je ve sporu s $|V| \geq 11$.

c) např. 

d) neexistuje (kód obsahuje vlastní prefix se stejným počtem 0 a 1)

podzim 2012
MB103-882-88B

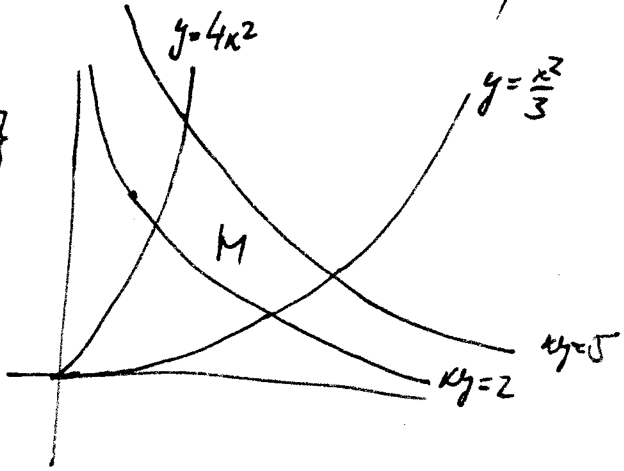
① plocha $3x^2+4y^2+z=1$

a) $f(x,y) = x\cdot y\cdot(1-3x^2-4y^2)$, $M = \{[x,y] \in \langle 0,\frac{1}{\sqrt3}\rangle \times \langle 0,\frac12\rangle;\ 3x^2+4y^2\le 1\}$
$= \{[x,y]\in \mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+;\ x\in\langle 0,\frac{1}{\sqrt3}\rangle,\ y\le\sqrt{\frac{1-3x^2}{4}}\}$

b) $f(x,y) \to$ glob. max. na M:
$f'_x = y(1-3x^2-4y^2) + xy(-6x)$
$f'_y = x(1-3x^2-4y^2) + xy(-8y)$.
Najdeme stac. body uvnitř M. (tj. zejména $x,y>0$):
$f'_x = 0 \iff y(1-3x^2-4y^2) = 6x^2y \iff 9x^2+4y^2=1$
$f'_y = 0 \iff x(1-3x^2-4y^2) = 8xy^2 \iff 3x^2+12y^2=1$
Řešením soustavy je $x^2=\frac{1}{12}$, $y^2=\frac{1}{16}$, tj. v M: $[x,y]=[\frac{1}{2\sqrt3},\frac14]$
Na hranici platí $x=0$ nebo $y=0$ nebo $3x^2+4y^2=1$, tj. $z=0$,
proto zde zřejmě $f(x,y)=0$ (nastává globální minimum).
Ve stac. bodě $f(x,y) = \frac{1}{16\sqrt3}$ a nastává globální maximum (jinde než
zde nebo na hranici nemůže díky diferencovatelnosti f být)

② a) Transformace F: $u=\frac{x^2}{y}$, $v=x\cdot y$ má Jacobián $D^1F = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y\end{vmatrix} =$
$= \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ y & x\end{vmatrix} = \frac{3x^2}{y}$. Jeho inverze $(D^1F)^{-1} = \frac{y}{3x^2} = \frac{1}{3u}$,
proto $dx\,dy = \frac{1}{3u}\,du\,dv$.

b) $M = \{[u,v];\ u\in\langle\frac14,3\rangle,\ v\in\langle 2,5\rangle\}$



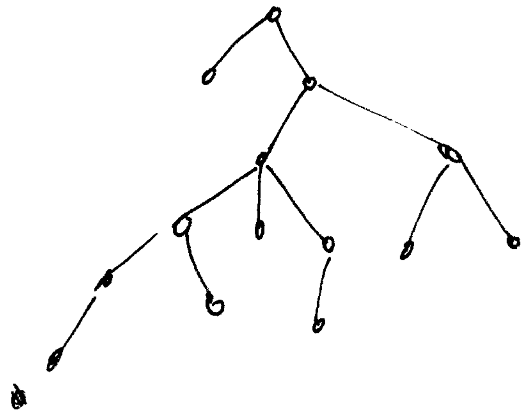
$$\iint_M dx\,dy = \int_{\frac14}^{3}\frac{1}{3u}\left(\int_2^5 dv\right)du = \int_{1/4}^{3}\frac{du}{u} =$$
$$= \Big[\ln u\Big]_{1/4}^{3} = \ln 3 - \ln\frac14$$

c) $\ln 3 - \ln\frac14 = \ln 3 + 2\ln 2$

podzim 2012
MB103-řl2-8L B

(3) stejně jako sk. 4 (hodnoty jsou poloviční)

(4) a)



b) např. 

c) skóre $(5,5,3,2,x,y) \to \dots \to (1,0,x-3,y-2) \to (0,x-3,y-2)$
předpoklad $x \geq y$

Nyní a) $x-3=y-2=0$ $(5,5,3,3,2,2)$ ✓
b) $x-3=y-2=1$ $(5,5,4,3,3,2)$ ✓

d) $|V|+|S|=|E|+2$, přitom každá stěna je incidentní s alespoň 3 hranami
(tj. $3|S| \leq 2|E|$).
Tedy $|E|+2=|V|+|S| \leq |V|+\frac{2}{3}|E| \Rightarrow |E| \leq 3|V|-6$