(A) ① $z(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y)$ $\qquad 0 \le x, y \le \frac{\pi}{2}$.

$z'_x = \cos x - \sin(x-y)$

$z'_y = -\sin y + \sin(x-y)$

$z'_x = 0 \iff \cos x = \sin(x-y)$

$z'_y = 0 \iff \sin y = \sin(x-y)$, speciálně $\sin y = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ a protože je funkce sin na $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ prostá $\Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - x$.

Po dosazení řešíme rovnici $\cos x = \sin(2x - \frac{\pi}{2})$ pro $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$; tedy $2x - \frac{\pi}{2} \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$

Protože je $\cos x \ge 0$ (pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$), musí $2x - \frac{\pi}{2} \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, a ~~protože~~

rovnice $\overset{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} = \sin(2x - \frac{\pi}{2})$ má pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ jediné řešení

$\frac{\pi}{2} - x = 2x - \frac{\pi}{2} \iff x = \frac{\pi}{3}$, odtud $y = \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{6}$.

Vyšetříme Hessián v $[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}]$: (není třeba, stačí porovnat s hraničními hodnotami, zde pro úplnost)

$z''_{xx} = -\sin x - \cos(x-y)$

$z''_{xy} = \cos(x-y)$

$z''_{yy} = -\cos y - \cos(x,y)$

$$H_z(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{6}) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt3}{2} - \frac{\sqrt3}{2} & \frac{\sqrt3}{2} \\ \frac{\sqrt3}{2} & -\frac{\sqrt3}{2} - \frac{\sqrt3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt3 & \frac{\sqrt3}{2} \\ \frac{\sqrt3}{2} & -\sqrt3 \end{pmatrix}$$

$\det H_z = 3 - \frac{3}{4} > 0$; $-\sqrt3 < 0 \Rightarrow H_z$ neg. def.

$\Rightarrow$ v $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ lokální maximum.

$\underline{z(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) = 3\frac{\sqrt3}{2} \approx 2{,}6}$

<u>Hranice:</u> $x = 0 \Rightarrow z(0,y) = 2\cos y \in \langle 0, 1\rangle$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z(\frac{\pi}{2}, y) = 1 + \cos y + \cos(\frac{\pi}{2} - y) = 1 + \cos y + \sin y = 1 + \sqrt2 \left(\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)\right)$
$\in \langle 2; 1+\sqrt2\rangle$

$y = 0 \Rightarrow z(x,0) = \sin x + 1 + \cos x \underset{\text{viz výše}}{\in} \langle 2; 1+\sqrt2\rangle$

$y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z(x, \frac{\pi}{2}) = \sin x + \cos(x - \frac{\pi}{2}) = 2\sin x \in \langle 0, 1\rangle$

Celkem: abs. maximum v $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ s hodnotou $3\frac{\sqrt3}{2}$, minimum v $[0, \frac{\pi}{2}]$ s hodnotou 0.

② Podmínky: $x - x^2 \ge 0$ $\qquad -\sqrt{x - x^2} \le y \le \sqrt{1 - x^2}$
$1 - x^2 \ge 0$

a) $x - x^2 \ge 0 \iff x(1-x) \ge 0 \iff x \in \langle 0, 1\rangle$

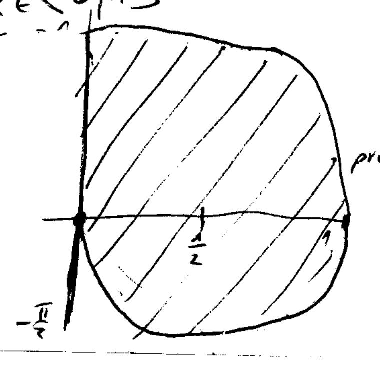
$1 - x^2 \ge 0 \iff x \in \langle -1, 1\rangle$

$-\sqrt{x - x^2} \le y$

pro $y < 0 \Rightarrow x^2 - x + y^2 \le 0$

$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \le \frac{1}{4}$

$y \ge 0$ splněno vždy



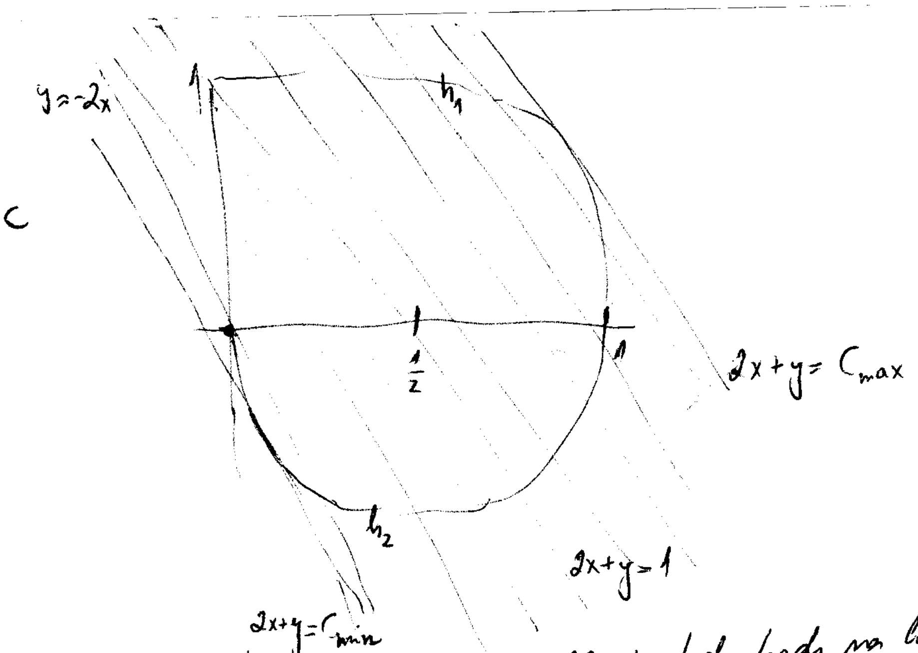
$y \le \sqrt{1 - x^2}$

$y < 0$ splněno vždy

pro $y \ge 0 \Rightarrow y^2 + x^2 \le 1$

b)

$2x+y=c$



Směrnice vrstevnic je vždy -2, hledáme tedy body na kraji M, v nichž má tečna směrnici -2, tj. normálový vektor je násobkem vektoru $(2,1)$

h_1: $x^2+y^2=1$
$x,y\geq 0$

Normálový vektor v $[x_0,y_0]$ je $(2x_0,2y_0)$

$(2x_0,2y_0)=t(2,1) \Leftrightarrow y_0=\frac{t}{2},\ x_0=t$

$t^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2=1 \Rightarrow \frac{5t^2}{4}=1 \Rightarrow t^2=\frac{4}{5} \Rightarrow t=\frac{2}{\sqrt5}$

$\Rightarrow [x_0,y_0]=\left[\frac{2}{\sqrt5};\frac{1}{\sqrt5}\right]$

$C_{max}=\frac{4}{\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt5}=\underline{\underline{\sqrt5}}$

h_2: $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$
$x\geq 0,\ y\leq 0$

Normálový vektor v $[x_0,y_0]$ je $(2x_0-1,2y_0)$

$(2x_0-1,2y_0)=t(2,1) \Leftrightarrow y_0=\frac{t}{2},\ x_0=t+\frac{1}{2}$

$(t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2})^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{5t^2}{4}=\frac{1}{4} \Rightarrow t^2=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow t=\frac{-1}{\sqrt5} \Rightarrow [x_0,y_0]=\left[\frac{-1}{\sqrt5}+\frac{1}{2};\frac{-1}{2\sqrt5}\right]$
$(y<0)$

$C_{min}=-\frac{2}{\sqrt5}+1-\frac{1}{2\sqrt5}<0$

c) transformace do polárních souřadnic.
Pro $y\geq 0$ podmínky $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq r\leq 1$
$y<0$ podmínky $+\frac{3\pi}{2}\leq\varphi\leq 2\pi$ $\quad r^2\leq r\cos\varphi \Leftrightarrow r\leq\cos\varphi$

$x^2-x+y^2\leq 0$

$$\iint_M dx\,dy=\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\,dr\,d\varphi+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\int_0^{\cos\varphi} r\,dr\,d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos 2\varphi+1\,d\varphi=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\varphi\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}=\underline{\underline{\frac{3\pi}{8}}}$$

(3) Ohodnocení hran zapíšeme do matice a postupně konstruujeme matice $U_0,\dots,U_n$ $(n=4)$, kde ~~maji~~ ~~nejvyšší~~ kde na místě kde $u_k(i,j)$ je délka nejkratší cesty z i do j jsou z množiny $\{1,2,\dots,k\}\cup\{i,j\}$. $u_k(i,j)=\min\{u_{k-1}(i,j),u_{k-1}(i,k)+u_{k-1}(k,j)\}$

Zároveň v kroku k při změně upravíme následníka i v nejkratší cestě z i do j na k.

$$U_0=\begin{pmatrix}0&4&-3&\infty\\-3&0&-5&\infty\\\infty&6&0&2\\7&4&3&0\end{pmatrix},\quad U_1=\begin{pmatrix}0&4&-3&\infty\\-3&0&-6&\infty\\\infty&6&0&2\\7&4&3&0\end{pmatrix},\quad U_2=\begin{pmatrix}0&4&-3&\infty\\-3&0&-6&\infty\\3&6&0&2\\1&4&-2&0\end{pmatrix},\quad U_3=\begin{pmatrix}0&3&-3&-1\\-3&0&-6&-4\\3&6&0&2\\1&4&-2&0\end{pmatrix}$$

$$U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & -6 & -4 \\ 3 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice následníků

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$, cesta z 3 do 1: $MN(3,1) = 4$

$MN(4,1) = 2$

$MN(2,1) = 2$

3 ~~4~~ 2 – 1 dokončení 3.

(4)

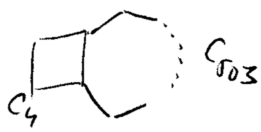
a) strom je souvislý graf bez kružnic

list je vrchol ve stromu stupně 1

$|V| \geq 2 \Rightarrow$ ukáže se, že ~~..~~ koncové vrcholy na cestě max. délky mají stupeň 1.

b) $2011 = (m+1)(n+1) - 1$, kde např. $m = 3$, $n = 502$

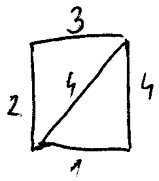
C_{503} C_4



c) uvažme cestu nejdelší délky; ta neobsahuje všechny vrcholy (jinak by strom byl cestou)

$\Rightarrow$ neex. hamiltonovská cesta

d) např.



(B) (1) $z(x,y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)$ MB103–2011–zk2

$z'_x = \sin y\,(\cos x \cdot \sin(x+y) + \sin x \cos(x+y)) = \sin y \cdot \sin(2x+y)$ $0 \le x, y \le \pi$

$z'_y = \sin x \cdot (\cos y \cdot \sin(x+y) + \sin y \cos(x+y)) = \sin x \cdot \sin(x+2y)$

$z'_x = 0 \Leftrightarrow \sin y = 0 \vee \sin(2x+y) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{y = 0 \vee y = \pi}_{\text{hranice}} \vee 2x+y \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi\}$

$z'_y = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin(x+2y) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = 0 \vee x = \pi}_{\text{hranice}} \vee x+2y \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi\}$

Stacionární body mimo hranici ~~jsou~~ splňují: $2x+y \in \{\pi, 2\pi\}$

$x+2y \in \{\pi, 2\pi\} \Leftrightarrow [x,y] \in \{[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]; [\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]\}$

$z(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt3}{2} \cdot \frac{\sqrt3}{2} \cdot \frac{\sqrt3}{2} = \frac{3\sqrt3}{8}$

$z(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt3}{2} \cdot \frac{\sqrt3}{2} \cdot (-\frac{\sqrt3}{2}) = -\frac{3\sqrt3}{8}$

Hranice: $x = 0 \Rightarrow z(0,y) = 0$ $x = \pi \Rightarrow z(\pi, y) = 0$

$y = 0 \Rightarrow z(x,0) = 0$ $y = \pi \Rightarrow z(x, \pi) = 0$

Závěr: Funkce nabývá maxima $\frac{3\sqrt3}{8}$ v $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ a minima $-\frac{3\sqrt3}{8}$ v $[\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$.

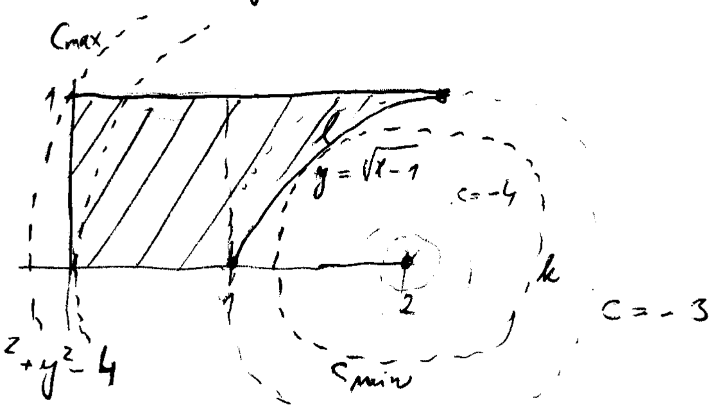
(2) Podmínky: $2x - x^2 \ge 0$ $x \ge 1 \Rightarrow y^2 \ge x - 1$

$y - y^2 \ge 0$

tj. $x \in \langle 0, 2\rangle$ $x \ge 1 \Rightarrow y^2 \ge x-1$

$y \in \langle 0, 1\rangle$

a)



b) $g(x,y) = x^2 - 4x + y^2 = (x-2)^2 + y^2 - 4$

Zřejmě maximum bude v bodě $[0,1]$, kdy $C_{max} = g(0,1) = 1$.

Minimum bude v bodě, kde se kružnice $k: (x-2)^2 + y^2 = 4 + c$ dotkne křivky $l: y = \sqrt{x-1}$, tj. v bodě, kde mají společnou tečnu (a normálu).

Normála ke k v $[x_0, y_0]$ má směrový vektor: $(2x_0 - 4, 2y_0)$, normálový vektor ke l v $[x_0, y_0]$ je $(1, -2y_0)$. V bodě $[x_0, y_0]$, který hledáme, platí $(-y^2 + x - 1 = 0)$

$(2x_0 - 4, 2y_0) = t\,(1, -2y_0) \Rightarrow t = -1,\ x_0 = \frac{3}{2},\ y_0 = \sqrt{\frac{3}{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt2}$.

V bodě $[\frac{3}{2}, \frac{1}{\sqrt2}]$ je $C_{min} = (\frac{3}{2} - 2)^2 + (\frac{1}{\sqrt2})^2 - 4 = \frac{3}{4} - 4 = -3\frac{1}{4}$

c) $\iint_M x\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 x\,dx\,dy + \int_1^2 \int_{\sqrt{x-1}}^1 x\,dy\,dx = \frac{1}{2} + \int_1^2 x(1 - \sqrt{x-1})\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{subs. } t = \sqrt{x-1},\ t^2 = x-1 \\ 2t\,dt = dx \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = 2 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| =$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^1 (t^2+1)(1-t)2t\,dt = \frac{1}{2} + 2\int_0^1 (-t^4 + t^3 - t^2 + t)\,dt = \frac{1}{2} + 2\left[-\frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{13}{30} = \frac{14}{15}$$

(3) Ohodnocení hran zapíšeme do matice A a postupně počítáme matice $V_1, \dots, V_{n-1}$ $(n=4)$, kde $V_p(i,j)$ je délka nejkratší cesty z i do j mající $\leq p$ hran.

Vztah: $V_1 = A$, $V_p(i,j) = \min_k \{ v_{p-1}(i,k) + a(k,j) \}$

Pokud dojde v kroku p ke změně (tj. minimum nastane pro $k \neq i,j$), pak upravíme předchůdce vrcholu $\underset{\text{při cestě z } i}{j}$ v matici předchůdců na k.

$$V_1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 & \infty \\ -3 & 0 & -5 & \infty \\ \infty & 6 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & -6 & -3 \\ 3 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & -6 & -4 \\ 3 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

matice předchůdců
$$MP = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

cesta z 4 do 3: $MP(4,3) = 1$
$MP(4,1) = 2$
$MP(4,2) = 4$
$4-2-1-3$ s hodnotou -2.

(4)
a) graf je kružnice C_n (nebo Oreho či Diracova věta apod.)
b) graf je 1-souvislý (nebo 2-souvislý apod.)
c) K_5
d) C_4