Matematika III, 3. cvičení

Derivace funkce zadané implicitně

Funkci značíme písmenem y, proměnnou písmenem x, můžeme si představit, že $y = f(x)$. Proto derivace x je 1, ale derivace y je y', takže např. $(x^2)' = 2x$ a $(y^2)' = 2yy'$.

Příklad 36. *Určete první a druhou derivaci, pokud* $x^2 + y^2 = 1$.

Výsledek. $y' = -\frac{x}{y}$, $y'' = -\frac{y^2+x^2}{y^3}$.

Příklad 37. *Určete derivaci, pokud* $xy^2 - 2xy + x^3 - 3y^2 + 5 = 0$.

Výsledek. $y' = \frac{2y-3x^2-y^2}{2xy-2x-6y}$.

Příklad 38. *Určete derivaci, pokud* $\sin(x^2) + \cos(y^2) - 1 = 0$.

Výsledek. $y' = \frac{x\cos(x^2)}{y\sin(y^2)}$.

Příklad 39. *Nechť je funkce* $y = y(x)$ *dána v okolí bodu* $[1, 1]$ *implicitně rovnicí* $y^3 - 2xy + x^2 = 0$. *Určete* $y'(1)$ *a* $y''(1)$.

Výsledek. $y'(1) = 0$, $y''(1) = -2$.

Příklad 40. *Nechť je funkce* $y = y(x)$ *dána v okolí bodu* $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *implicitně rovnicí* $y - \frac{\sin y}{2} = x$. *Určete* $y'(\frac{\pi-1}{2})$ *a* $y''(\frac{\pi-1}{2})$.

Výsledek. $y'(\frac{\pi-1}{2}) = 1, y''(\frac{\pi-1}{2}) = -\frac{1}{2}$.

Příklad 41. *Rozhodněte, zda křivka* $x^3 - y^3 + 2xy = 0$ *leží v okolí bodu* $[1, -1]$ *nad (nebo pod) svojí tečnou.*

Nápověda. Křivku v okolí bodu $[1, -1]$ považujte za funkci $y(x)$ zadanou implicitně, odpovězte podle hodnoty druhé derivace této funkce v daném bodě.

Výsledek. $y''(1) = 16 > 0$, funkce je tedy konvexní a leží nad tečnou.

Příklad 42. *Rozhodněte, zda křivka* $\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - \frac{9}{2} = 0$ *leží v okolí bodu* $[1, 3]$ *nad (nebo pod) svojí tečnou.*

Výsledek. $y''(1) = \frac{15}{9} > 0$, funkce je tedy konvexní a leží nad tečnou.

Parciální derivace

Pro funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou parciální derivace prvního řádu definovány takto:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}, \quad f'_y(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Při výpočtu parciální derivace podle jedné proměnné považujeme druhou proměnnou za konstantu a derivujeme podle první proměnné.

Parciální derivace druhého a vyšších řádů dostaneme (podobně jako několikanásobné derivace funkcí jedné proměnné) opětovným derivováním dané funkce. Např. f''_{xy} dostaneme tak, že nejdřív zderivujeme funkci f podle x (přitom y považujeme za konstantu) a výsledek pak zderivujeme podle y (tentokrát x považujeme za konstantu).

Příklad 43. *Vypočtěte f'_x a f'_y, kde $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.*

Příklad 44. *Vypočtěte f'_x a f'_y, kde $f(x,y)=x^y; x>0$.*

Příklad 45. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu funkce $f(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$.*

Výsledek. $f'_x=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}, f'_y=x^{\frac{y}{z}}\ln x\cdot\frac{1}{z}, f'_z=x^{\frac{y}{z}}\ln x\cdot\frac{-y}{z^2}$,
$f''_{xx}=\frac{y}{z}(\frac{y}{z}-1)x^{\frac{y}{z}-2}, f''_{yy}=x^{\frac{y}{z}}\ln^2 x\cdot\frac{1}{z^2}, f''_{zz}=x^{\frac{y}{z}}\ln^2 x\cdot\frac{y^2}{z^4}+x^{\frac{y}{z}}\ln x\cdot\frac{2y}{z^3}$,
$f''_{xy}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}-1}+\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}\ln x\cdot\frac{1}{z}, f''_{xz}=\frac{-y}{z^2}x^{\frac{y}{z}-1}+\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}\ln x\cdot\frac{-y}{z^2}, f''_{yz}=x^{\frac{y}{z}}\ln^2 x\cdot\frac{-y}{z^3}+x^{\frac{y}{z}}\ln x\cdot\frac{-1}{z^2}$.

Příklad 46. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního řádu funkce $f(x,y,z)=x^{y^z}$ (pozor: $x^{y^z}=x^{(y^z)}\neq(x^y)^z$).*

Příklad 47. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního řádu: $f(x,y)=\ln(\frac{x+4}{y^2})$.*

Příklad 48. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu: $f(x,y)=\frac{\cos(x^2)}{y}$.*

Příklad 49. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu v bodě $[1,\sqrt{2},2]$ funkce $z=f(x,y)$ definované v okolí daného bodu implicitně rovnicí $x^2+y^2+z^2-xz-\sqrt{2}yz=1$.*

Výsledek. $z'_x(1,\sqrt{2})=\frac{z-2x}{2z-x-\sqrt{2}y}=0$, $z'_y(1,\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}z-2y}{2z-x-\sqrt{2}y}=0$, $z''_{xx}(1,\sqrt{2})=z''_{yy}(1,\sqrt{2})=-2$, $z''_{xy}(1,\sqrt{2})=0$.

Příklad 50. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu v bodě $[-2,0,1]$ funkce $z=f(x,y)$ definované v okolí daného bodu implicitně rovnicí $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$.*

Výsledek. $z'_x(-2,0)=-\frac{4x+8z}{8x+2z-1}=0$, $z'_y(-2,0)=-\frac{4y}{8x+2z-1}=0$, $z''_{xx}(-2,0)=z''_{yy}(-2,0)=\frac{4}{15}$, $z''_{xy}(-2,0)=0$.

Směrové derivace

Je-li $u=(u_1,u_2)$ nenulový vektor, pak směrová derivace funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ ve směru vektoru u je

$$f'_u(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+u_1t,y_0+u_2t)-f(x_0,y_0)}{t}.$$

Zřejmě $f'_x=f'_{(1,0)}$ a $f'_y=f'_{(0,1)}$.

Jiný způsob výpočtu směrové derivace: Nejdříve spočítáme obě parciální derivace $f'_x(x_0,y_0)$ a $f'_y(x_0,y_0)$. Pak

$$f'_u(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\cdot u_1+f'_y(x_0,y_0)\cdot u_2.$$

Pro funkce tří a více proměnných je to analogické.

Příklad 51. *Vypočtěte $f'_u(1,-1)$, kde $f(x,y)=\operatorname{arctg}(x^2+y^2)$ a $u=(1,2)$.*

Výsledek. $-\frac{2}{5}$.

Příklad 52. *Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y)=x^3+4xy$ v bodě $[2,-1]$ ve směru vektoru $(1,3)$.*

Výsledek. $f'_{(1,3)}(2,-1)=32$.

Příklad 53. *Vypočtěte směrovou derivaci funkce $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ v bodě $[1,1]$ ve směru vektoru $(-1,3)$.*

Výsledek. $f'_{(-1,3)}(1,1) = \sqrt{2}$.

Příklad 54. *Vypočtěte směrovou derivaci funkce* $f(x,y) = e^{x(y-1)}$ *v bodě* $[0,2]$ *ve směru vektoru* $(-1,2)$.

Výsledek. $f'_{(-1,2)}(0,2) = -1$.

Příklad 55. *Vypočtěte směrovou derivaci funkce* $f(x,y,z) = z - e^x \sin y$ *v bodě* $[\ln 3, \frac{3\pi}{2}, -3]$ *ve směru vektoru* $(1,2,2)$.

Výsledek. $f'_{(1,2,2)}(\ln 3, \frac{3\pi}{2}, -3) = 5$.

Směrové derivace a spojitost

V následujícím příkladě si ukážeme, že z existence derivací funkce více proměnných v libovolném směru neplyne spojitost této funkce (avšak u funkce jedné proměnné z existence derivace plyne spojitost).

Příklad 56. *Dokažte, že funkce*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} & \textit{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \textit{pro } [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

není spojitá v bodě $[0,0]$, *ale v tomto bodě existuje derivace funkce* f *v libovolném směru.*

Nápověda. Pomocí přibližování se k limitnímu bodu po parabolách dokažte, že funkce nemá v bodě $[0,0]$ limitu; směrové derivace vypočítejte podle definice.