

## Matematika III, 5. cvičení

### Lokální extrémy funkcí více proměnných

Připomeňme, že pro funkci jedné proměnné  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a její stacionární bod  $x_0$  (tj. bod  $x_0 \in \mathbb{R}$ , pro který platí  $f'(x_0) = 0$ ) platí:

- je-li  $f''(x_0) < 0$ , má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  ostré lokální minimum,
- je-li  $f''(x_0) \leq 0$ , má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  neostré lokální minimum,
- je-li  $f''(x_0) > 0$ , má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  ostré lokální maximum,
- je-li  $f''(x_0) \geq 0$ , má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  neostré lokální maximum.

Pro jednoduchost budeme uvažovat funkci dvou proměnných  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , obecný případ pro funkci  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  byl probrán na přednášce. Podobné tvrzení jako pro lokální extrémy funkcí jedné proměnné dostaneme pro funkce dvou (resp. více) proměnných:

Nechť  $[x_0, y_0]$  je stacionární bod funkce  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (tedy platí  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ ,  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ ) a nechť má tato funkce v nějakém okolí bodu  $[x_0, y_0]$  spojité parciální derivace druhého řádu. Pak platí:

- Je-li  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$  a

$$\det Hf(x_0, y_0) = \det \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0,$$

má funkce  $f$  v bodě  $[x_0, y_0]$  ostré lokální minimum,

- Je-li  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$  a  $\det Hf(x_0, y_0) > 0$ , má funkce  $f$  v bodě  $[x_0, y_0]$  ostré lokální maximum,
- Je-li  $\det Hf(x_0, y_0) < 0$ , extrém v bodě  $[x_0, y_0]$  nenastává,
- V ostatních případech (tj. pokud  $\det Hf(x_0, y_0) = 0$ ), nic o extrému v bodě  $[x_0, y_0]$  nevíme, musíme použít různé triky.

Dále platí, že funkce  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (platí to i pro funkce více než dvou proměnných) může mít lokální extrém pouze ve svém stacionárním bodě nebo v bodě, kde alespoň jedna z parciálních derivací neexistuje.

**Příklad 87.** Určete lokální extrémy funkce  $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ .

*Výsledek.* Tři stacionární body:  $P_1 = [0, 0]$ ,  $P_2 = [1, 1]$ ,  $P_3 = [-1, -1]$ . V  $P_1$  extrém nenastává, v obou bodech  $P_2, P_3$  má funkce  $f$  ostré lokální minimum.

**Příklad 88.** Určete lokální extrémy funkce  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ .

*Výsledek.* Stacionární body jsou  $P_1 = [0, 0]$ ,  $P_2 = [1, 1]$ , v  $P_1$  není extrém, v  $P_2$  je ostré lokální minimum.

**Příklad 89.** Určete lokální extrémy funkce  $f(x, y) = \ln(5x) - x^2 + xy + y^2$ .

*Výsledek.* Stacionární body jsou  $P_1 = [\sqrt{2/5}, -1/\sqrt{10}]$ ,  $P_2 = [-\sqrt{2/5}, 1/\sqrt{10}]$ , ani v jednom z nich extrém nenastává.

**Příklad 90.** Určete lokální extrémů funkce

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$$

ležící v prvním oktantu (tj v části prostoru, kde jsou všechny tři souřadnice nezáporné) a určete jejich typ.

*Výsledek.* Jediný stacionární bod je  $[\frac{1}{2}, 1, 1]$ , ve kterém je lokální minimum, neboť

$$Hf = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní např. podle Sylvestrova kritéria ( $a_{11} > 0, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0, \det Hf > 0$ ).

**Příklad 91.** Najděte všechny stacionární body funkce  $z = f(x, y)$  definované implicitně rovnicí  $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$  a zjistěte, zda jsou v těchto bodech lokální extrémů.

*Výsledek.* Vyjde

$$z'_x = -\frac{4x + 8z}{8x + 2z - 1}, \quad z'_y = -\frac{4y}{8x + 2z - 1},$$

stacionární body jsou  $[-2, 0, 1], [\frac{16}{7}, 0, -\frac{8}{7}]$ . Dále

$Hf(-2, 0) = \begin{pmatrix} 4/15 & 0 \\ 0 & 4/15 \end{pmatrix}$ , takže funkce  $f(x, y)$  má v bodě  $[-2, 0]$  lokální minimum;

$Hf(\frac{16}{7}, 0) = \begin{pmatrix} -4/15 & 0 \\ 0 & -4/15 \end{pmatrix}$ , takže funkce  $f(x, y)$  má v bodě  $[-2, 0]$  lokální maximum.

**Příklad 92.** Najděte všechny stacionární body funkce  $z = f(x, y)$  definované implicitně rovnicí  $x^2 + y^2 + z^2 - xz - \sqrt{2}yz = 1$  a zjistěte, zda jsou v těchto bodech lokální extrémů.

*Výsledek.* Vyjde

$$z'_x = \frac{z - 2x}{2z - x - \sqrt{2}y}, \quad z'_y = \frac{\sqrt{2}z - 2y}{2z - x - \sqrt{2}y},$$

stacionární body jsou  $[1, \sqrt{2}, 2], [-1, -\sqrt{2}, -2]$ . Dále ve stacionárních bodech je

$$z''_{xx} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}, \quad z''_{xy} = 0, \quad z''_{yy} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}.$$

Ve stacionárních bodech je  $Hf$  negativně, resp. pozitivně definitní, proto zde nastává ostré lokální maximum, resp. minimum funkce  $f$ .

**Příklad 93.** Určete lokální extrémů funkce  $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ .

*Výsledek.*

$$f'_x = y \left[ \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \right], \quad f'_y = x \left[ \ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \right],$$

stacionární body jsou

$$P_{1,2} = [0, \pm 1], \quad P_{3,4} = [\pm 1, 0], \quad P_{5-8} = [\pm 1/\sqrt{2e}, \pm 1/\sqrt{2e}].$$

Dále

$$f''_{xx} = \frac{2xy(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \ln(x^2 + y^2) + 2 - \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{yy} = \frac{2xy(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$\det Hf(P_{1-4}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4 < 0$ , tudíž v bodech  $P_{1-4}$  není extrém.

Pro  $P_5 = [1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}]$  a  $P_6 = [-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}]$  je  $f''_{xx}(P_{5,6}) = 2 > 0$ ,  $\det Hf(P_{5,6}) = 4 > 0$ , tudíž v bodech  $P_5, P_6$  je ostré lokální minimum.

Pro  $P_7 = [1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}]$  a  $P_8 = [-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}]$  je  $f''_{xx}(P_{7,8}) = -2 < 0$ ,  $\det Hf(P_{5,6}) = 4 > 0$ , tudíž v bodech  $P_7, P_8$  je ostré lokální maximum.

**Příklad 94.** Najděte lokální extrémy funkce  $f(x, y) = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  a pro každý extrém určete jeho typ.

Výsledek. Vyjde

$$f'_x = 1 + \frac{x - 3y}{x^2 + y^2}, \quad f'_y = -2 + \frac{3x + y}{x^2 + y^2},$$

stacionární bod je  $[-7/5, 1/5]$ . Dále

$$f''_{xx} = \frac{y^2 - x^2 + 6xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{yy} = \frac{3y^2 - 3x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{yy} = \frac{x^2 - y^2 - 6xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$Hf(-7/5, 1/5) = \begin{pmatrix} -9/10 & -13/10 \\ -13/10 & 9/10 \end{pmatrix}$ , takže funkce  $f(x, y)$  v bodě  $[-7/5, 1/5]$  nemá extrém.

### Implicitně zadaná funkce

Nechť  $F(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitě diferencovatelná funkce v okolí bodu  $[x_0, y_0]$ , dále  $F(x_0, y_0) = 0$  a  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Pak existuje spojitá funkce  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná na nějakém okolí  $U$  bodu  $x_0$ , přičemž  $F(x, f(x)) = 0$  pro všechna  $x \in U$ . Funkce  $y = f(x)$  je tedy rovností  $F(x, y) = 0$  implicitně definovaná v okolí bodu  $x_0$ . Pokud  $F'_y(x_0, y_0) = 0$ , funkce  $f$  se zmíněnými vlastnostmi neexistuje.

Podobné tvrzení platí pro funkci více proměnných, uvedeme si ještě případ pro 3 proměnné: Nechť  $F(x, y, z): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitě diferencovatelná funkce v okolí bodu  $[x_0, y_0, z_0]$ , dále  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$  a  $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . Pak existuje spojitá funkce  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná na nějakém okolí  $U$  bodu  $[x_0, y_0]$ , přičemž  $F(x, y, f(x, y)) = 0$  pro všechna  $x \in U$ . Pokud  $F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$ , funkce  $f$  se zmíněnými vlastnostmi neexistuje.

**Příklad 95.** V okolí kterých bodů jednodílného hyperboloidu  $h$  o rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

nelze vyjádřit  $z$  jako funkci  $z = f(x, y)$ ?

*Nápověda.* Určete body  $[x_0, y_0, z_0]$  na  $h$  splňující  $F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$ , kde  $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$ .

*Výsledek.* Množina hledaných bodů je elipsa obsahující body  $[x_0, y_0, 0]$ , kde  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ .

**Příklad 96.** V okolí kterých bodů křivky  $x^2 + 2xy - y^2 - 8 = 0$  nelze vyjádřit  $y$  jako funkci  $y = f(x)$ ?

*Výsledek.*  $[2, 2], [-2, -2]$ .

**Příklad 97.** V okolí kterých bodů parabolické válcové plochy  $z^2 - 2px = 0$ , kde  $p > 0$ , nelze vyjádřit  $z$  jako funkci  $z = f(x, y)$ ?

*Výsledek.* Všechny body osy  $y$ .