Matematika III, 13. cvičení

Pojmy k zopakování

- Vytvořující funkce dané posloupnosti
- Operace s vytvořujícími funkcemi
- Zobecněná binomická věta
- Lineární rekurence
- Catalanova čísla
- Fibonacciho čísla

Příklad 266. *Určete vytvořující funkce následujících posloupností*

1. $(1; 2; 1; 4; 1; 8; 1; 16; \dots)$
2. $(1; 1; 0; 1; 1; 0; 1; 1; \dots)$
3. $(1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; \dots)$

Výsledek. 1. $\frac{1}{1-x^2} + \frac{2x}{1-2x^2}$

2. $\frac{1+x}{1-x^3}$

3. $\frac{-1}{(1-x^2)^2} + \frac{x}{(1-x^2)^2}$

Příklad 267. *Určete koeficient u* x^{17} *v* $(x^3 + x^4 + x^5 + \dots)^3$

Výsledek. 45

Příklad 268. *V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků (míčky téže barvy jsou nerozpoznatelné). Kolik je různých možností, jak z takovéto krabice vybrat soubor 70 míčků?*

Výsledek. $\binom{72}{2} - \binom{41}{2} - \binom{31}{2} - \binom{21}{2}$

Příklad 269. *Jaká je pravděpodobnost, že při hodu 12 hracími kostkami padne součet 30?*

Nápověda: Vyjádřete počet všech možností, kdy padne součet 30. Uvažujte $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{12}$.

Výsledek. $\binom{29}{11} - 12 \cdot \binom{23}{11} + 66 \cdot \binom{17}{11} - 220 \cdot \binom{11}{11}$

Příklad 270. *Sadař má vysadit 25 nových stromků, přičemž má k dispozici pouze 4 druhy. Sadařova manželka si však klade omezující podmínky: nejvýše jeden ořešák, nejvýše 10 jabloní, alespoň 6 třešní a alespoň 8 slivoní Kolik existuje různých způsobů výběru druhů stromů?*

Nápověda: Zajímá nás koeficient u x^{25} *v*

$$(1 + x)(1 + x + \cdots + x^{10})(x^6 + x^7 + \dots)(x^8 + x^9 + \dots).$$

Výsledek. $\binom{14}{3} - \binom{12}{3} - \binom{3}{3}$.

Příklad 271. *Vyjádřete obecný člen posloupností určených následujícími rekurencemi:*

1. $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$ *pro* $n = 1, 2, 3 \dots$.

2. $a_0 = 0, a_1 = 1$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 4a_n$ *pro* $n = 0, 1, 2, 3 \dots$

Příklad 272. *Řešte rekurenci, kde v posloupnosti* $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ *je následující člen aritmetickým průměrem předchozích dvou.*

Výsledek. $a_n = k\left(-\frac{1}{2}\right)^n + l$.

Příklad 273. *Řešte rekurenci* $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}a_n}$ *s počátečními podmínkami* $a_0 = 2, a_1 = 8$.
Nápověda: Utvořte novou posloupnost $b_n = \log_2 a_n$.

Příklad 274. *Spočtěte počet triangulací konvexního n-úhelníku.*
Nápověda: Vyberme libovolnou úhlopříčku jdoucí pevným vrcholem. Ta nám mnohoúhelnk rozdělí na dva.

Výsledek. $t_n = C_{n-2}$, kde C_n značí Catalanovo číslo.

Příklad 275. *Určete počet procházek ve čtvercové síti o rozměrech* $n \times n$ *z levého dolního rohu* A *do pravého horního rohu* B*, které vedou pouze doprava a nahoru takových, že mají právě jeden bod na diagonále* AB *(nepočítaje* A *a* B*).*
Nápověda: Catalanova čísla.

Příklad 276. *Dokažte, že pro Fibonacciho čísla platí:*

1. $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
2. $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$

Příklad 277. *Označme* H_n *minimální počet kroků potřebných k přemístění věže o n kotoučích z jednoho kolíku na druhý u hlavolamu Hanojská věž. Odvoďte rekurentní formuli pro výpočet* H_n *a určet její obecné řešení.*

Výsledek. $H_{n+1} = 2H_n + 1$, $H_n = 2^{n-1}$