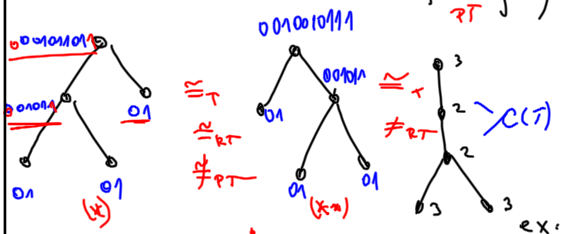
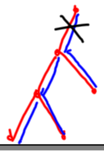
Př: izomorfismus stromů (kořenových, pěstěných)
T RT PT



„kreslení"



$001011 < 01$

proto pro kořenový strom volíme kód (*)

11 28-12:00

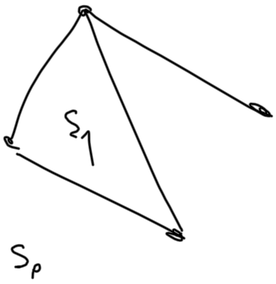
Dk Tvrzení: indukcí:

I. $|T| \leq 2$

II. „zapomeneme" vždy listy T a hrany z nich vycházející $\Rightarrow$ strom T' má stejný střed, tj. $C(T') = C(T)$ (neboť $ex_{T'}(v) = ex_T(v) - 1 \quad \forall v \in T'$)

Z IP na T' dostáváme tvrzení.

11 28-12:30



11 28-12:44

$|V| = 4 \quad |S| = 1 \quad |E| = 2$

$|V| - |E| + |S| \neq 2$

11 28-12:47

Dk (Eulerův vztah): indukcí podle $|E|$:

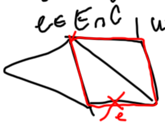
I. $|E| = 0 \Rightarrow |V| = 1, \; |S| = 1$

$|V| + |S| = |E| + 2$

II. $|E| = n$, indukční předpoklad: pro souvislé rovinné grafy $|E'| < n$ platí.

a) $G = (V, E)$ je strom platí E.V. pro stromy

b) G je souvislý a obs. kružnici C, buď $e \in E \cap C$, uvažme $E' = E \setminus \{e\}$



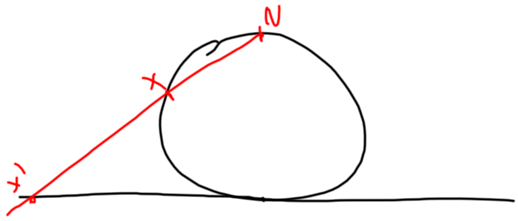
$|V'| = |V|$
$|E'| = |E| - 1$
$|S'| = |S| - 1$ (topologie)

IP pro $(V', E', S') \Rightarrow |V'| + |S'| = |E'| + 2$

$\Rightarrow |V| + |S| = |E| + 1$

$\square$

11 28-12:48



11 28-12:54

Stromy | **Rovinné grafy** | Kostra grafu | Minimální kostra

Přeložíme si požadavek pravidelnosti do vlastností příslušného grafu: chceme aby každý vrchol měl stejný stupeň $d \geq 3$ a zároveň aby na hranici každé stěny byl stejný počet $k \geq 3$ vrcholů. Označme n počet vrcholů, e počet hran a s počet stěn.
Máme k dispozici jednak vztah provazující stupně vrcholů s počtem hran:

$$dn = 2e$$

a podobně počítáme počet hran, které ohraničují jednotlivé stěny, a bereme v úvahu, že každá je hranicí dvou stěn, tj.

$$2e = ks.$$

Eulerův vztah pak říká

$$\boxed{2 = n - e + s = \frac{2e}{d} - e + \frac{2e}{k}.} \quad |:(2e) \quad \Rightarrow$$

Úpravou odtud dostáváme pro naše známé d a k vztah

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}. \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{e} = \frac{1}{d} - \frac{1}{2} + \frac{1}{k}$$

11 28-13:02

$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}.$ (*) Jaká e, d, k?

Víme, že $d, k \geq 3$.

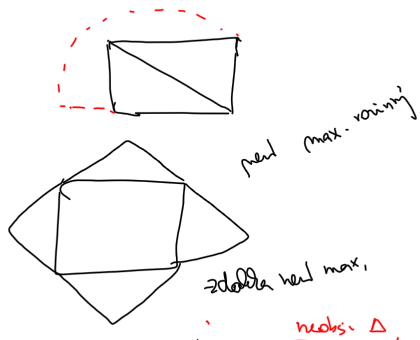
Z (*) $\Rightarrow d \leq 3 \vee k \leq 3$
(jinak $\frac{1}{d} + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$)

Kdyby $d \geq 6 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow \frac{1}{d} + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Podobně $k \leq 5$.

$k, d \in \{3, 4, 5\}$ Dále viz slajdy.

11 28-13:04



neobs. Δ

n-max. $3|S| = 2|E|$ (4)

$|E| + 2 = \frac{2}{3}|E| + |V|$ (1/2)

$|V| - 2 = \frac{|E|}{3}$ (2)

$3|V| - 6 = |E|$ $\qquad |E| = 2|V| - 4$

Obecně: $|E| \leq 3|V| - 6$

11 28-13:11

Důsledek

- K_5 *není rovinný;*
- $K_{3,3}$ *není rovinný;*
- *každý rovinný graf obsahuje alespoň jeden vrchol stupně nejvýše 5;*
- *každý rovinný graf bez trojúhelníků obsahuje alespoň jeden vrchol stupně nejvýše 3.*

$G = K_5$: $|V| = 5$, $|E| = 10 > 3 \cdot |V| - 6$

$G = K_{3,3}$: $|V| = 6$, $|E| = 9 > 2 \cdot |V| - 4$

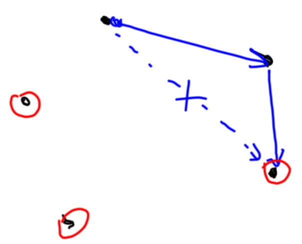
neobs. Δ

kdyby $\forall v: \deg(v) \geq 6 \Rightarrow |E| = \frac{1}{2}\sum \deg(v) \geq$
$\geq |V| \cdot 3 > 3|V| - 6$

kdyby $\forall v: \deg(v) \geq 4 \wedge$ neobs. $\Delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |E| = \frac{1}{2}\sum \deg(v) \geq 2|V| > 2|V| - 4$

11 28-13:17

$n = 5$



1. šipka: $n(n-1)$

11 28-13:15

$$\prod_{k=0}^{n-2} n(n-k-1) = (n-1)! \cdot n^{\cancel{n-1}\, n-2} = \cancel{n}(n-1)! \cdot \kappa(K_n)$$

$$\kappa(K_n) = n^{n-2}$$

11 28-13:37

11 28-13:35